Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului
Analiza Matematică II, Semestrul II
Conf. dr. Lucian MATICIUC

CURS IX – X

Capitolul V: Integrale de suprafaţă

1 Elemente de geometrie diferenţială a suprafeţelor

Definiţia 1 *1) Fie domeniul plan* $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ *compact (închis şi mărginit) şi funcţia vectorială* $F : \Delta \to \mathbb{R}^3$, $F(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$. *Mulţimea punctelor* $M(f(u,v), g(u,v), h(u,v))$, $(u,v) \in \Delta$ *împreună cu reprezentarea parametrică*

$$(S) : x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v), \ (u,v) \in \Delta$$

se numeşte ***suprafaţă****. Parametrii* u, v *se numesc coordonatele curbilinii ale unui punct de pe suprafaţa* (S).

2) Dacă funcţiile f, g, h *sunt continue cu derivatele parţiale de ordinul întâi continue pe* Δ *şi dacă determinanţii funcţionali*

$$\begin{aligned} A \overset{def}{=} \frac{D(g,h)}{D(u,v)} &= g'_u h'_v - g'_v h'_u , \\ B \overset{def}{=} \frac{D(h,f)}{D(u,v)} &= h'_u f'_v - h'_v f'_u , \\ C \overset{def}{=} \frac{D(f,g)}{D(u,v)} &= f'_u g'_v - f'_v g'_u , \end{aligned}$$

nu se anulează simultan pe Δ*, suprafaţa se numeşte* ***suprafaţă netedă****.*

3) Curbele de pe suprafaţa (S) *date prin* $u = u_0 =$ *constant (variază doar* v*) şi* $v = v_0 =$ *constant (variază doar* u*) se numesc* ***curbe de coordonate****.*

Fie în continuare (S) o suprafaţă netedă. Printr-un puct $P(u_0, v_0)$ de pe suprafaţă trece o curbă $u = u_0$ şi $v = v_0$. **Parametrii directori ai tangentei la curba** $u = u_0$ în punctul P sunt daţi de

$$f'_v \, , \ g'_v \, , \ h'_v \, ,$$

(toate calculate în (u_0, v_0)), iar ai tangentei la curba $v = v_0$ în punctul P sunt daţi de

$$f'_u \, , \ g'_u \, , \ h'_u \, ,$$

(toate calculate în (u_0, v_0)). **Cosinuşii directori** ai dreptelor tangente corespunzătoare sunt

$$\pm\frac{f'_v}{\sqrt{G}} \, , \ \pm\frac{g'_v}{\sqrt{G}} \, , \ \pm\frac{h'_v}{\sqrt{G}} \ \text{ şi } \ \pm\frac{f'_u}{\sqrt{E}} \, , \ \pm\frac{g'_u}{\sqrt{E}} \, , \ \pm\frac{h'_u}{\sqrt{E}} \, ,$$

toate calculate în (u_0, v_0), unde

$$E \overset{def}{=} \left(f'_u\right)^2 + \left(g'_u\right)^2 + \left(h'_u\right)^2 \ , \quad G \overset{def}{=} \left(f'_v\right)^2 + \left(g'_v\right)^2 + \left(h'_v\right)^2 .$$

Unghiul θ dintre cele două curbe $u = u_0$ şi $v = v_0$ este dat de

$$\cos\theta = \pm\frac{F}{\sqrt{EG}} \ ,$$

calculată în (u_0, v_0), unde

$$F \overset{not}{=} f'_u \cdot f'_v + g'_u \cdot g'_v + h'_u \cdot h'_v$$

Elementul lungime de arc al unei curbe oarecare trasate pe suprafaţa (S) este

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Dar $dx = df\,(u, v) = f'_u du + f'_v dv$, $dy = dg\,(u, v) = g'_u du + g'_v dv$, $dz = dh\,(u, v) = h'_u du + h'_v dv$, obţinem (calcule...)

$$ds^2 = E \cdot du^2 + 2F \cdot dudv + G \cdot dv^2$$

numită şi **prima formă fundamentală a suprafeţei** (S). Dacă vom nota cu $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ cosinuşii directori ai normalei $\vec{n}$ la suprafaţă în punctul P, atunci, ţinând cont că $\vec{n}$ este perpendicular pe tangentele la curbele de coordonate în punctul P (deci produsul scalar dintre cei doi vectori este nul), obţinem

$$\begin{cases} \cos\alpha \cdot f'_u + \cos\beta \cdot g'_u + \cos\gamma \cdot h'_u = 0 \ , \\ \cos\alpha \cdot f'_v + \cos\beta \cdot g'_v + \cos\gamma \cdot h'_v = 0 \end{cases}$$

În ipoteza că matricea sistemului

$$\begin{pmatrix} f'_u & g'_u & h'_u \\ f'_v & g'_v & h'_v \end{pmatrix}$$

are rangul doi, obţinem $\cos\alpha = \lambda A$, $\cos\beta = \lambda B$, $\cos\gamma = \lambda C$. Deoarece $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ vom obţine pe $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, deci cosinuşii directori sunt daţi de formulele

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \ , \quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \ , \quad \cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \ . \quad (1)$$

Pe de altă parte, calculând determinanţii funcţionali

$$A = g'_u h'_v - g'_v h'_u, B = h'_u f'_v - h'_v f'_u, C = f'_u g'_v - f'_v g'_u,$$

vom obţine

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$$

Să considerăm funcţia vectorială $\vec{r}\,(u, v)$ unde $\vec{r} = O\vec{M}$ adică este vectorul de poziţie al punctului M. Deci

$$\vec{r}\,(u, v) = (f\,(u, v)\,, g\,(u, v)\,, h\,(u, v))\,,\ (u, v) \in \Delta$$

Dacă punctul (u,v) parcurge domeniul Δ atunci punctul corespunzător $M(x,y,z)=M(f(u,v),g(u,v),h(u,v$ parcurge suprafaţa (S). Tangenta la curba $u=u_0$ în punctul P este vectorul

$$\vec{r}_v' = \left(f_v'(u_0,v_0), g_v'(u_0,v_0), h_v'(u_0,v_0)\right)$$

iar tangenta la curba $v=v_0$ în punctul P este vectorul

$$\vec{r}_u' = \left(f_u'(u_0,v_0), g_u'(u_0,v_0), h_u'(u_0,v_0)\right)$$

Avem de asemenea şi

$$\begin{aligned} E &= \left(\vec{r}_u'\right)^2 = \left(f_u'\right)^2 + \left(g_u'\right)^2 + \left(h_u'\right)^2 \ , \\ G &= \left(\vec{r}_v'\right)^2 = \left(f_v'\right)^2 + \left(g_v'\right)^2 + \left(h_v'\right)^2 \ , \\ F &= \left\langle \vec{r}_u', \vec{r}_v' \right\rangle = f_u' \cdot f_v' + g_u' \cdot g_v' + h_u' \cdot h_v' \ , \end{aligned}$$

iar din egalitatea $A^2+B^2+C^2=EG-F^2$, obţinem

$$EG-F^2 = \left(\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'\right)^2$$

Versorul normalei $\vec{n}$ la suprafaţă este dat de

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{\|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'\|}$$

unde semnele $\pm$ corespund celor două normale la suprafaţă.

2 Aria unei suprafeţe

Fie (S) o suprafaţă dată de reprezentarea parametrică

$$(S): x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v), \ (u,v) \in \Delta$$

Fie $\delta : \Delta_1, ..., \Delta_p$ o diviziune a domeniului plan Δ. Dreptelor $u=u_i$, $v=v_i$, $i=\overline{1,n}$, care formează diviziunea Δ, le corespund pe suprafaţa (S) diviziunea $d : S_1, ..., S_p$. Deci un subdomeniu Δ_k va fi determinat de dreptele $u=u_i$, $u=u_{i+1}$, $v=v_j$, $v=v_{j+1}$, adică

$$\Delta_k = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [u_i, u_{i+1}], \ v \in [v_j, v_{j+1}]\right\}$$

În planul tangent la suprafaţă în punctul $P(u_i,v_j)$ de pe suprafaţă, considerăm paralelogramul cu un vârf în acest punct şi de laturi dirijate după direcţiile tangentelor la curbele de coordonate (adică de direcţie $\vec{r}_u'$ respectiv $\vec{r}_v'$); mărimile laturilor sunt luate: $\ell_1 = \|\vec{r}_u'\| \cdot (u_{i+1}-u_i)$ şi $\ell_2 = \|\vec{r}_v'\| \cdot (v_{j+1}-v_j)$. Aria acestui paralelogram este atunci $\mathcal{A}_{paral} = \ell_1 \cdot \ell_1 \cdot \sin\theta$ iar $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{F^2}{EG}}$ deci se va obţine

$$\mathcal{A}_{paral} = \sqrt{EG-F^2}\,(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j)\,.$$

Atunci aria lui (S) se poate aproxima cu sume din arii ale acestor paralelograme deci

$$\mathcal{A}_S = \sum_{\delta} \sqrt{EG-F^2}\,(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j)$$

Considerând un şir de diviziuni cu norma tinzând la zero, vom deduce, trecând la limită, că aria suprafeţei este dată de integrala dublă

$$\mathcal{A}_S = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Definiţia 2 *1) Spunem că suprafaţa (S) are arie dacă integrala dublă $\iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} dudv$ există şi este finită. Valoare integralei duble reprezintă aria lui (S)*

2) Forma diferenţială

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dudv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv \tag{2}$$

*se numeşte **elementul de arie al suprafeţei** (S).*

Remarca 3 *Dacă suprafaţa este dată explicit prin ecuaţia $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$, atunci luând $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$ vom obţine*

$$E = 1 + p^2 \ , \ G = 1 + q^2 \ , \ F = pq,$$

unde

$$p = f'_x \ , \ q = f'_y$$

Elementul de arie va fi dat atunci de

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy$$

iar aria este

$$\mathcal{A}_S = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy$$

Teorema 4 *Aria suprafeţei S este independentă de reprezentarea parametrică a suprafeţei.*

Exerciţiul 5 *Să se calculeze aria sferei de rază R.*

***Ecuaţiile parametrice ale sferei** sunt*

$$\begin{cases} x = R \sin\theta \cos\varphi \,, \\ y = R \sin\theta \sin\varphi \,, & ,\theta \in [0, \pi] \,, \ \varphi \in [0, 2\pi] \\ z = R \cos\theta \,, \end{cases}$$

unde θ este unghiul făcut de OM cu axa Oz, iar φ este unghiul făcut de proiecţia lui OM pe planul xOy cu axa Ox (din punct de vedere geografic, dacă luăm $\varphi \equiv$ cst. obţinem meridianele, *iar dacă luăm $\theta \equiv$ cst. obţinem* paralelele*).*

Vom calcula mai întâi

$$\begin{aligned} E &= (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = (R\cos\theta\cos\varphi)^2 + (R\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-R\sin\theta)^2 = \\ &= R^2\cos^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + R^2\sin^2\theta = R^2 \\ G &= \left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2 + \left(z'_\varphi\right)^2 = (-R\sin\theta\sin\varphi)^2 + (R\sin\theta\cos\varphi)^2 + 0^2 = R^2\sin^2\theta \\ F &= x'_\varphi x'_\theta + y'_\varphi y'_\theta + z'_\varphi z'_\theta = (R\cos\theta\cos\varphi)(-R\sin\theta\sin\varphi) + (R\cos\theta\sin\varphi)(R\sin\theta\cos\varphi) + \\ &\quad + (-R\sin\theta)\, 0 = 0. \end{aligned}$$

Deci elementul de arie al suprafeţei este

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, d\theta d\varphi = R^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi \Rightarrow \mathcal{A}_S = \iint_\Delta \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = \iint_\Delta R^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi,$$

unde $\Delta = \{(\varphi, \theta) : \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi],\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_S &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} R^2 \sin\theta\, d\theta \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} R^2\, (-\cos\theta)|_{\theta=0}^{\theta=\pi}\, d\varphi = \\ &= R^2 (\cos 0 - \cos\pi) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2R^2\, \varphi|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

3 Integrala de suprafaţă de primul tip

Fie (S) o suprafaţă cu două feţe (orice punct de pe ea admite două normale), netedă pe porţiuni şi mărginită de un contur neted pe porţiuni. Fie f o funcţie definită pe suprafaţa (S). Vom descompune suprafaţa în $S_1, ..., S_n$ şi pe fiecare suprafaţă (S_i) vom lua un punct arbitrar $M_i = M_i(x_i, y_i, z_i)$. **Suma integrală** corespunzătoare va fi dată de

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\, \mathcal{A}(S_i)\ ,$$

unde $\mathcal{A}(S_i)$ reprezintă aria suprafeţei S_i.

Definiţia 6 *Limita finită a sumelor integrale, când norma divizării suprafeţei* (S) *tinde la zero, se numeşte integrala de suprafaţă de primul tip a funcţiei* $f(M) = f(x, y, z)$ *pe suprafaţa* (S) *şi se notează cu*

$$I = \iint_{(S)} f(M)\, d\sigma = \iint_{(S)} f(x, y, z)\, d\sigma$$

Teorema 7 ***(de reducere a integralei de suprafaţă de primul tip la o integrală dublă)*** *Dacă* (S) *este o suprafaţă netedă şi dacă funcţia* $f(x, y, z)$ *definită pe* (S) *este mărginită, atunci are loc egalitatea*

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_\Delta f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

în ipoteza că una din aceste integrale există.

Corolarul 8 *Dacă suprafaţa este dată prin ecuaţia explicită* $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$, *atunci egalitatea de mai sus devine (vezi Observaţia 3)*

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_\Delta f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy,$$

unde $p = z'_x\ ,\ q = z'_y$.

4 Integrala de suprafaţă de al doilea tip

Fie (S) o suprafaţă cu două feţe, netedă pe porţiuni de ecuaţie explicită $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$, unde $\mathcal{D}$ este un domeniu plan mărginit de o curbă netedă pe porţiuni. Dacă pe suprafaţă s-a ales una din cele două feţe, spunem că s-a ales o anumită **orientare** pe suprafaţă sau că suprafaţa este orientată. Dacă se alege pe (S) faţa superioară, atunci dacă o curbă închisă de pe suprafaţă are sens pozitiv, atunci pe faţa inferioară, are sensul opus.Descompunem suprafaţa în subdomeniile $(S_i)_{i=\overline{1,n}}$ şi apoi pe fiecare (S_i), orientat în mod corespunzător, îl proiectăm pe planul xOy. Atunci sensul de parcurgere al conturului lui (S_i) va determina sensul de parcurgere al conturului proiecţiei pe planul xOy. Acest sens va fi cel pozitiv dacă am considerat faţa superioară a suprafeţei (S) şi în acest caz vom lua aria proiecţiei cu semnul plus. În cazul feţei inferioare, sensul va fi cel negativ şi vom lua aria proiecţiei cu semnul minus.

Fie $f(M) = f(x, y, z)$ definită în punctele suprafeţei (S). Descompunem suprafaţa în subdomeniile $(S_i)_{i=\overline{1,n}}$ şi alegem pe fiecare (S_i) un punct $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Formăm suma integrala

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\mathcal{A}_{D_i} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\mathcal{A}_{D_i},$$

unde $\mathcal{A}_{D_i}$ este aria proiecţiei D_i a lui (S_i) pe planul xOy (semnul se va lua corespunzător regulii de mai sus).

Definiţia 9 *Limita finită a sumei integrale de mai sus, când norma divizării $(S_i)_{i=\overline{1,n}}$ tinde la zero, se numeşte integrala de suprafaţă de al doilea tip a funcţiei f calculată pe faţa aleasă a suprafeţei (S), şi se notează cu*

$$I = \iint_{(S)} f(x, y, z)\,dxdy$$

Remarca 10 *Dacă se înlocuieşte faţa considerată a suprafeţei cu faţa opusă, integrala îşi schimbă semnul.*

Dacă subdomeniile (S_i) se proiectează pe planul yOz sau pe zOx atunci se obţin celelalte două integrale de suprafaţă de al doilea tip

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\,dydz\ ,\ \iint_{(S)} f(x, y, z)\,dzdx$$

Forma generală a unei **integrale de suprafaţă de al doilea tip** este

$$I = \iint_{(S)} P(x, y, z)\,dydz + Q(x, y, z)\,dzdx + R(x, y, z)\,dxdy$$

Teorema 11 (de reducere a unei int. de suprafaţă de tipul II la o int. de suprafaţă de primul tip) *Fie (S) o suprafaţă netedă, simplă, cu două feţe, de ecuaţie*

$$z = z(x, y)\,, (x, y) \in \mathcal{D}$$

Dacă funcţia este mărginită atunci are loc egalitatea

$$I = \iint_{(S)} f(x, y, z)\,dxdy = \iint_{(S)} f(x, y, z)\cos\gamma d\sigma, \tag{3}$$

unde $\cos\gamma$ *este cosinusul director al normalei făcut cu axa* Oz*, în ipoteza că cel puţin una din integralele de mai sus există.*

Remarca 12 *Înlocuind faţa superioară cu faţa inferioară se va schimba semnul în membrul stâng al egalităţii (3). Dar în acelaşi timp, schimbând faţa suprafeţei se va schimba şi unghiul* γ *făcut de normală (orientată în jos) cu axa* Oz *în* $(\pi-\gamma)$ *deci vom obţine* $\cos(\pi-\gamma)$ *adică* $-\cos\gamma$*. Deci şi membrul din partea dreaptă îşi va schimba semnul, adică egalitatea (3) se va menţine.*

Remarca 13 *Folosind formula (1), de calcul pentru* $\cos\gamma$ *şi formula (2) pentru calculul elementului de suprafaţă obţinem*

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint_{\Delta} C\cdot f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,dudv$$

(semnul $\pm$ *corespunde celor două feţe ale suprafeţei).*

Teorema 14 *Se poate obţine şi formula generală de reducere a unei integrale de suprafaţă de al doilea tip la o integrală de suprafaţă de primul tip*

$$\iint_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma, \tag{4}$$

unde $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *sunt cosinuşii directori ai normalei pe faţa aleasă a suprafeţei, daţi de formulele (1):*

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,, \quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,, \quad \cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Corolarul 15 *În cazul unei reprezentări parametrice a suprafeţei* (S)*, are loc formula generală de reducere a unei integrale de suprafaţă de al doilea tip la o integrală dublă*

$$\iint_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint_{\Delta} (A\cdot P + B\cdot Q + C\cdot R)\,dudv,$$

unde

$$\begin{aligned}
A &\overset{def}{=} \frac{D(g,h)}{D(u,v)} &=& \; g'_u h'_v - g'_v h'_u\,, \\
B &\overset{def}{=} \frac{D(h,f)}{D(u,v)} &=& \; h'_u f'_v - h'_v f'_u\,, \\
C &\overset{def}{=} \frac{D(f,g)}{D(u,v)} &=& \; f'_u g'_v - f'_v g'_u\,,
\end{aligned}$$

5 Formula lui Stokes

Fie (S) o suprafaţă dată de reprezentarea parametrică

$$(S): x = x(u,v)\,, y = y(u,v)\,, z = z(u,v)\,,\ (u,v)\in\Delta,$$

mărginită de curba $(\mathcal{L})$ netedă pe porţiuni, cu funcţiile x, y, z cu derivatele parţiale de ordinul al doilea continue. Domeniul Δ este mărginit de curba $(\mathcal{C})$ şi presupunem că sensului pozitiv de parcurgere al curbei $(\mathcal{C})$ îi corespunde sensul pozitiv de parcurgere al curbei $(\mathcal{L})$. Dacă (S) este o suprafaţă orientată atunci alegem faţa suprafeţei astfel încât un observator situat pe acea faţă să vadă curba $(\mathcal{L})$ parcursă în sens direct.

Teorema 16 (Formula lui Stokes) *Dacă funcţiile $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ sunt funcţii continue, derivabile parţial cu derivatele de ordinul întâi continue pe suprafaţa (S), atunci are loc egalitatea*

$$\int_{(\mathcal{L})} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(\mathcal{S})} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Demonstraţie. Vom calcula doar integrala curbilinie de al doilea tip $\int_{(\mathcal{L})} Pdx$. Avem

$$dx = d(x(u,v)) = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

Deci

$$\int_{(\mathcal{L})} Pdx = \int_{(\mathcal{C})} P\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)$$

Acum, pentru integrala din membrul drept aplicăm formula lui Green şi obţinem

$$\int_{(\mathcal{C})} P\frac{\partial x}{\partial u} du + P\frac{\partial x}{\partial v} dv = \iint_{(\Delta)} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P \cdot \frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right)\right] dudv =$$
$$= \iint_{(\Delta)} \left[\frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + P \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - P \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right] dudv$$

Dar

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))}{\partial u} = \text{derivarea fcţ compuse} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))}{\partial v} = \text{derivarea fcţ compuse} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Deci

$$\int_{(\mathcal{C})} P\frac{\partial x}{\partial u} du + P\frac{\partial x}{\partial v} dv =$$
$$= \iint_{(\Delta)} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\right] dudv$$
$$= \iint_{(\Delta)} \left[\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right] dudv$$
$$= \iint_{(\Delta)} \left[\frac{\partial P}{\partial z} \cdot B - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot C\right] dudv$$

Am obţinut deci

$$\int_{(\mathcal{L})} Pdx = \iint_{(\Delta)} \left[\frac{\partial P}{\partial z} \cdot B - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot C\right] dudv = \iint_{(\mathcal{S})} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dydz$$

şi prin permutări circulare deducem

$$\int_{(\mathcal{L})} Qdy = \iint_{(\mathcal{S})} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z} dydz\ , \ \int_{(\mathcal{L})} Rdz = \iint_{(\mathcal{S})} \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dzdx$$

■

Remarca 17 *Dacă se ia drept suprafaţă un domeniu plan $\mathcal{D}$ (adică $z = 0$) formula lui Stokes devine formula lui Green, adică*

$$\int_{(\mathcal{L})} Pdx + Qdy = \iint_{(\mathcal{D})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Remarca 18 *Conform (4) formula lui Stokes se poate rescrie*

$$\int_{(\mathcal{L})} Pdx{+}Qdy{+}Rdz = \iint_{(\mathcal{S})} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] d\sigma$$

6 Aplicaţii ale integralelor de suprafaţă

- **Aria unei suprafeţe** (S) este dată de

$$\mathcal{A}_S = \iint_{(S)} d\sigma = \iint_{(D)} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

adică

$$\mathcal{A}_S = \iint_{(S)} d\sigma = \iint_{(D)} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

(dacă suprafaţa este dată parametric)

şi

$$\mathcal{A}_S = \iint_{(S)} d\sigma == \iint_{(D)} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy$$

(dacă suprafaţa este dată explicit).

- **Expresia volumului unui corp printr-o integrală de suprafaţă:** dacă (S) este o suprafaţă închisă care delimitează un corp de volum $\mathcal{V}$, atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} \iint_{(S)} xdydz + ydzdx + zdxdy = \text{(aplicând Teorema 14)} \\ &= \frac{1}{3} \iint_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, d\sigma. \end{aligned}$$

- **Masa şi centrul de greutate ale unei suprafeţe**.

$$\begin{aligned} m &= \iint_{(S)} \mu(x,y,z)\, d\sigma, \\ &\text{şi} \\ x_G &= \frac{1}{m} \iint_{(S)} x\, \mu(x,y,z)\, d\sigma,\ y_G = \frac{1}{m} \iint_{(S)} y\, \mu(x,y,z)\, d\sigma,\ z_G = \frac{1}{m} \iint_{(S)} z\, \mu(x,y,z)\, d\sigma, \end{aligned}$$

unde μ este densitatea de masă.