Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului
Analiza Matematică II, Semestrul II
Conf. dr. Lucian MATICIUC

CURS V – VI

Capitolul III: Integrale curbilinii

1 Integrala curbilinie de primul tip

Fie $[a, b]$ un interval compact (închis şi mărginit).

Definiţia 1 *1) Fie funcţiile $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$. Mulţimea punctelor din plan $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, împreună cu reprezentarea parametrică* $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, *se numeşte **curbă plană**.*

2) Fie funcţiile $x, y, z : [a, b] \to \mathbb{R}$. Mulţimea punctelor din spaţiu $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, împreună cu reprezentarea parametrică $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, *se numeşte **curbă în spaţiu**.*

Exemplul 2 *Fie cercul de ecuaţie implicită $x^2 + y^2 = r^2$. Atunci ecuaţiile parametrice ale cercului sunt*

$$\begin{cases} x(t) = r \cos t, \\ y(t) = r \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Exemplul 3 *Fie elipsa de ecuaţie implicită $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Atunci ecuaţiile parametrice ale elipsei sunt*

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t, \\ y(t) = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Definiţia 4 *1. Dacă $x(a) = x(b)$, $y(a) = y(b)$ atunci curba se numeşte **curbă închisă**.*

*2. Dacă o curbă nu are puncte multiple (puncte în care curba să se autointersecteze) atunci ea se numeşte **curbă simplă**.*

Fie (C) o curbă simplă dată prin ecuaţiile parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, unde funcţiile x, y sunt presupuse continue. Considerăm linia frântă corespunzătoare diviziunii $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. Lungimea acestei linii este

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{|x(t_{i+1}) - x(t_i)|^2 + |y(t_{i+1}) - y(t_i)|^2}$$

(vezi desenul).

Definiţia 5 *Se numeşte* ***lungimea*** s ***a arcului de curbă*** *considerat, marginea superioară a mulţimii* $\{p\}$ *a tuturor lungimilor liniilor frânte. Dacă această margine este finită atunci curba se numeşte* ***rectificabilă****.*

Teorema 6 *Fie curba* $(C) : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$, $t \in [a, b]$. *Dacă funcţiile* x, y *sunt derivabile cu derivata integrabilă pe* I *atunci curba* (C) *este rectificabilă şi lungimea* s *a arcului de curbă* (C) *este dat de*

$$s = \int_a^b \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2} dt$$

Remarca 7 *1. Cantitatea*

$$ds = \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2} dt$$

se numeşte ***elementul lungime de arc*** *de pe curbă.*

2. Pentru o curbă dată explicit $(C) : y = y(x)$, $x \in [a, b]$, *elementul lungime de arc este dat de*

$$ds = \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx$$

(într-adevăr, în acest caz, ecuaţiile parametrice ale curbei sunt $\begin{cases} x = t, \\ y = y(t), \quad t \in [a, b]. \end{cases}$ *)*

3. Pentru o curbă $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, *elementul lungime de arc este dat de*

$$ds = \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2} dt$$

Fie (C) o curbă simplă, continuă şi rectificabilă şi fie $f = f(x, y)$ o funcţie definită pe o mulţime $D \subset \mathbb{R}^2$ care conţine curba (C). Notăm cu A, B capetele curbei şi fie punctele $A = A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n = B$ care formează o **diviziune** d a arcului $\widehat{AB}$.

Fie

$$\sigma_i \overset{def}{=} s(A_i A_{i+1})$$

lungimea arcului de curbă $\widehat{A_i A_{i+1}}$, şi fie

$$\|d\| \overset{def}{=} \max_{i=\overline{0,n-1}} \sigma_i$$

norma diviziunii d.

Pe fiecare arc $\widehat{A_i A_{i+1}}$ considerăm un punct arbitrar $M_i(\xi_i, \eta_i)$ şi formăm **suma integrală**

$$\sigma_d(f) \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \sigma_i.$$

Definiţia 8 *Fie* (d_n) *un şir de diviziuni ale arcului* $\overset{\frown}{AB}$ *cu norma* $\|d_n\| \to 0$*, pentru* $n \to \infty$*. Dacă limita* $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(f)$ *există şi este finită şi nu depinde de şirul de diviziuni* d_n *şi nici de alegerea punctelor intermediare* M_i*, atunci funcţia* f *se numeşte integrabilă pe curba* (C)*. Limita* I *se numeşte* ***integrala curbilinie de primul tip*** *a funcţiei* f *de-a lungul curbei* (C) *şi se notează*

$$I = \int\limits_{(C)} f(x,y)\, ds,$$

unde ds *este elementul lungime de arc de pe curbă.*

Remarca 9 *Analog se poate defini integrala curbilinie pe o curbă* (C) *din spaţiu*

$$I = \int\limits_{(C)} f(x,y,z)\, ds$$

Următoarea teoremă reprezintă **modul de calcul a unei integrale curbilinii de primul tip**.

Teorema 10 (de reducere a integralei curbilinii) *Fie* (C) *o curbă simplă dată prin ecuaţiile parametrice* $(C): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a,b]$*, în care funcţiile* x, y *sunt continue şi derivabile cu derivata continuă. Presupunem de asemenea că funcţia* f *este continuă pe curba* (C)*. Curba este deci rectificabilă şi* $s'(t) = \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}$ *şi există integrala curbilinie de primul tip şi are loc formula*

$$\int\limits_{(C)} f(x,y)\, ds = \int\limits_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2} dt$$

Corolarul 11 *1. În cazul unei curbe dată explicit prin ecuaţia* $y = y(x), x \in [a,b]$*, obţinem formula de calcul*

$$\int\limits_{(C)} f(x,y)\, ds = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx$$

2. În cazul unei curbe în spaţiu (C) *dată prin ecuaţiile parametrice* $(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [a,b]$*,*

obţinem formula de calcul

$$\int\limits_{(C)} f(x,y,z)\, ds = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2} dt$$

Dacă vom considera $f \equiv 1$ vom obţine **lungimea curbei** (C) notată cu $\ell(C)$

$$\ell(C) = \int\limits_{(C)} ds$$

Exerciţiul 12 *Să se calculeze următoarea integrală curbilinie de primul tip* $\int\limits_{(C)} ye^{-x}ds$ *unde* (C) : $x(t) = \ln\left(1+t^2\right)$, $y(t) = 2\operatorname{arctg} t - t + 3$, $t \in [0,1]$.

Trebuie calculat elementul lungime de arc de pe curbă

$$ds = \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}dt = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t\right)^2 + \left(2\frac{1}{1+t^2} - 1 + 0\right)^2}dt$$

$$= \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{\left(1-t^2\right)^2}{(1+t^2)^2}}dt = \frac{1}{1+t^2}\sqrt{4t^2+1+t^4-2t^2}dt = \frac{1}{1+t^2}\sqrt{(1+t^2)^2}dt = dt$$

Deci

$$\int\limits_{(C)} ye^{-x}ds = \int\limits_0^1 (2\text{arctg}t - t + 3)\, e^{-\ln\left(1+t^2\right)}dt = \int\limits_0^1 (2\text{arctg}t - t + 3)\frac{1}{1+t^2}dt$$

deoarece

$$e^{\ln x} = x = \ln e^x, \quad \ln x^\alpha = \alpha \ln x$$

Prin urmare

$$I = 2\int\limits_0^1 \frac{\text{arctg}t}{1+t^2}dt - \int\limits_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt + 3\int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \text{arctg}t\,(\text{arctg}t)'\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{\left(1+t^2\right)'}{1+t^2}dt + 3\,\text{arctg}t\big|_0^1 =$$

$$= \text{aplicăm prima metodă de schimbare de variabilă} =$$

$$= 2\int\limits_{\text{arctg}0}^{\text{arctg}1} udu - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{1}{u}du + 3\,\text{arctg}t\big|_0^1 = 2\left.\frac{u^2}{2}\right|_{\text{arctg}0}^{\text{arctg}1} - \frac{1}{2}\ln u\big|_1^2 + 3\,\text{arctg}t\big|_0^1 =$$

$$= \left(\text{arctg}^2 1 - \text{arctg}^2 0\right) - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) + 3\,(\text{arctg}1 - \text{arctg}0) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\ln 2 + 3\frac{\pi}{4}$$

Exerciţiul 13 *Să se calculeze următoarea integrală curbilinie de primul tip* $\int\limits_{(C)} xyzds$ *unde* (C) : $x(t) = t$, $y(t) = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}$, $z(t) = \frac{1}{2}t^2$, $t \in [0,1]$.

Trebuie calculat elementul lungime de arc de pe curbă.

Avem $x'(t) = 1$, $y'(t) = \left(\frac{1}{3}\left(8t^3\right)^{1/2}\right)' = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(8t^3\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(8t^3\right)' = \frac{1}{6}\left(8t^3\right)^{\frac{-1}{2}}24t^2 = 4\cdot 8^{-1/2}\cdot t^{-3/2+2} = 2^{1/2}\cdot t^{1/2}$, $z'(t) = t$, *deci*

$$ds = \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2}dt = \sqrt{1^2 + \left(2^{1/2}\cdot t^{1/2}\right)^2 + t^2}dt =$$

$$= \sqrt{1+2t+t^2}dt = (1+t)\,dt$$

şi integrala curbilinie este dată atunci de

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 t \cdot \frac{1}{3}\left(8t^3\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2}t^2 \cdot (1+t)\, dt = \frac{2^{1/2}}{3}\int_0^1 t^{9/2}(1+t)\, dt \\
&= \frac{2^{1/2}}{3}\left. \frac{t^{\frac{9}{2}+1}}{\frac{9}{2}+1} + \frac{t^{\frac{9}{2}+1+1}}{\frac{9}{2}+1+1} \right|_0^1 = ...
\end{aligned}
$$

Exerciţiul 14 *Să se calculeze următoarea integrală curbilinie de primul tip* $\int\limits_{(C)} xyds$ *unde* (C) *este sfertul din elipsa* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$*, situat în primul cadran.*

Prima metodă: Se scrie explicit sfertul de elipsa dat

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, x \in [0, a]$$

şi se fac calculele.

A doua metodă: Se scrie parametric sfertul de elipsă dat

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, \pi/2]$$

şi se fac calculele.

2 Integrala curbilinie de al doilea tip

Fie $(\overset{\frown}{AB})$ o curbă şi $f = f(x, y)$ o funcţie definită pe o mulţime $D \subset \mathbb{R}^2$ care conţine curba $(\overset{\frown}{AB})$. Fie punctele $A = A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n = B$ care formează o diviziune d a curbei $(\overset{\frown}{AB})$, unde $A_i(x_i, y_i)$. Pe fiecare arc $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ considerăm un punct arbitrar $M_i(\xi_i, \eta_i)$, deci cu $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\eta_i \in [y_i, y_{i+1}]$ şi formăm **suma integrală**

$$\sigma_d(f) \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i,$$

unde $\Delta x_i \overset{def}{=} x_{i+1} - x_i$.

Definiţia 15 *1) Fie* (d_n) *un şir de diviziuni ale curbei* $(\overset{\frown}{AB})$ *cu norma* $\|d_n\| \to 0$*, pentru* $n \to \infty$*. Dacă limita* $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(f)$ *există şi este finită şi nu depinde de şirul de diviziuni* d_n *şi nici de alegerea punctelor intermediare* M_i*, atunci funcţia* f *se numeşte integrabilă pe curba* $(\overset{\frown}{AB})$ *în raport cu* x*. Limita* I *se numeşte* ***integrala curbilinie de al doilea tip în raport cu*** x *a funcţiei* f *de-a lungul curbei* $(\overset{\frown}{AB})$ *şi se notează*

$$I = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} f(x, y)\, dx$$

2) În mod analog se defineşte ***suma integrală***

$$\sigma_d(f) \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta y_i$$

şi ***integrala curbilinie de al doilea tip în raport cu*** y *a funcţiei* f *de-a lungul curbei* $(\overset{\frown}{AB})$ *şi se notează*

$$I = \int_{(\overset{\frown}{AB})} f(x,y)\,dy$$

3) Dacă de-a lungul curbei $(\overset{\frown}{AB})$ *sunt definite două funcţii* $P(x,y)$ *şi* $Q(x,y)$ *şi dacă există integralele* $\int_{(\overset{\frown}{AB})} P(x,y)\,dx$ *şi* $\int_{(\overset{\frown}{AB})} Q(x,y)\,dy$ *atunci integrala*

$$\int_{(\overset{\frown}{AB})} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

se numeşte ***integrala curbilinie de al doilea tip.***

Remarca 16 *1) În cazul integralei de primul tip, când se scrie suma integrală, valoarea funcţiei* $f(\xi_i, \eta_i)$ *se înmulţeşte cu lungimea* σ_i *a segmentului de curbă* A_iA_{i+1}*, iar în cazul integralei de al doilea tip, valoare medie* $f(\xi_i, \eta_i)$ *se înmulţeşte cu prioiecţia* Δx_i *(şi cu* Δy_i*) a segmentului dat de proiecţia lui* A_iA_{i+1} *pe axa* Ox *(respectiv pe* Oy*).*

2) În cazul integralelor de primul tip nu contează sensul de parcurgere al curbei $(\overset{\frown}{AB})$ *(de la* A *la* B *sau invers), pe când în cazul integralelor de al doilea tip sensul de parcurgere conteză. În acest sens avem*

$$\int_{(\overset{\frown}{BA})} P(x,y)\,dx = -\int_{(\overset{\frown}{AB})} P(x,y)\,dx\ , \quad \int_{(\overset{\frown}{BA})} Q(x,y)\,dy = -\int_{(\overset{\frown}{AB})} Q(x,y)\,dy$$

Remarca 17 *În mod analog în cazul unei curbe în spaţiu se poat defini sume integrale după* x, y *şi* z*, şi apoi integrala curbilinie de al doilea tip*

$$\int_{(\overset{\frown}{AB})} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \overset{def}{=} \int_{(\overset{\frown}{AB})} P(x,y,z)\,dx + \int_{(\overset{\frown}{AB})} Q(x,y,z)\,dy + \int_{(\overset{\frown}{AB})} R(x,y,z)\,dz$$

Următoarea teoremă reprezintă **modul de calcul a unei integrale curbilinii de al doilea tip**.

Teorema 18 *Dacă funcţiile* x, y *sunt continue şi derivabile cu derivata continuă pe* $[a,b]$*, şi dacă* P, Q *sunt continue pe curba* $(\overset{\frown}{AB})$ *atunci există integrala curbilinie de al doilea tip şi are loc formula*

$$\int_{(\overset{\frown}{AB})} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \left[P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t)\right] dt$$

Demonstraţie. Fie punctele $A = A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n = B$ care formează o diviziune d a curbei $(\widehat{AB})$, unde $A_i(x_i, y_i)$. Pe fiecare arc $\widehat{A_i A_{i+1}}$ considerăm un punct arbitrar $M_i(\xi_i, \eta_i)$, deci cu

$$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \ \eta_i \in [y_i, y_{i+1}].$$

Fie t_i, $i = \overline{1,n}$, valori ale parametrului t corespunzătoare punctului A_i şi τ_i, $i = \overline{1,n}$, valori ale parametrului t corespunzătoare punctului M_i, adică

$$\begin{aligned} A_i &= A_i(x(t_i), y(t_i)), \ M_i = M_i(x(\tau_i), y(\tau_i)) \\ &\Leftrightarrow x_i = x(t_i), \ y_i = y(t_i), \ \xi_i = x(\tau_i), \ \eta_i = y(\tau_i). \end{aligned}$$

Studiem mai întâi integrala în raport cu x: $\int_{(\widehat{AB})} P(x,y)\,dx$. Rescriem suma integrală

$$\begin{aligned} \sigma_d(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} P(x(\tau_i), y(\tau_i))(x(t_{i+1}) - x(t_i)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} P(x(\tau_i), y(\tau_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)\,dt \end{aligned}$$

unde $\Delta x_i \overset{def}{=} x_{i+1} - x_i$. Pe de altă parte

$$I \overset{def}{=} \int_a^b P(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt$$

deci

$$\sigma - I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [P(x(\tau_i), y(\tau_i)) - P(x(t), y(t))]\,x'(t)\,dt$$

Funcţia $P(x(t), y(t))$ fiind continuă deducem că pentru $\forall\, \varepsilon > 0$ se pot alege Δt_i suficient de mici astfel încât variaţiile acestei funcţii să fie mici (adică diferenţa $[P(x(\tau_i), y(\tau_i)) - P(x(t), y(t))] < \varepsilon$). Are loc şi $|x'(t)| \leq L, \ \forall t \in [a,b]$ (deoarece x' este continuă pe un compact). Vom obţine deci

$$|\sigma - I| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon \cdot L dt = \varepsilon L \sum_{i=0}^{n-1} (t_i - t_{i+1}) = \varepsilon L (a - b)$$

Trecând la limită deducem că

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt$$

■

Remarca 19 *O integrală curbilinie de al doilea tip în raport cu x calculată pe un segment paralel cu Oy este egală cu 0 (deoarece toţi $\Delta x_i = 0$) iar o integrală curbilinie de al doilea tip în raport cu y calculată pe un segment paralel cu Ox este egală cu 0 (deoarece toţi $\Delta y_i = 0$).*

Analog se poate demonstra formula de calcul pentru o integrală calculată pe o curbă în spaţiu (C) dată prin ecuaţiile parametrice $(C):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [a,b]$.

Teorema 20 *Dacă funcţiile x, y, z sunt continue şi derivabile cu derivata continuă pe $[a,b]$, şi dacă P, Q, R sunt continue pe curba $(\widehat{AB})$ atunci există integrala curbilinie de al doilea tip şi are loc formula*

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\right] dt$$

Exerciţiul 21 *Să se calculeze următoarea integrală curbilinie de al doilea tip $\int_{(C)} xydx - y^2dy$ unde $(C): x = t^2,\ y = t^3$, $t \in [0,1]$.*

Avem $dx = 2tdt$, $dy = 3t^2dt$ deci

$$I = \int_0^1 \left[t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^6 \cdot 3t^2\right] \cdot dt = \int_0^1 \left[2t^6 - 3t^8\right] dt = 2\frac{t^7}{7} - 3\frac{t^9}{9}\bigg|_0^1 = \cdots$$

Exerciţiul 22 *Să se calculeze următoarea integrală curbilinie de al doilea tip $\int_{(C)} \left(x - y^2\right) dx + 2xydy$ unde (C) este curba care uneşte punctele $O(0,0) \longrightarrow A(0,1) \longrightarrow B(1,1)$ (sau curba $O(0,0) \longrightarrow D(0,1) \longrightarrow B(1,1)$).*

Exerciţiul 23 *Să se calculeze următoarea integrală curbilinie de al doilea tip $\int_{(C)} \sqrt{1-x^2}dx + xdy$ unde $(C): x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, $y \geq 0$, parcursă în sens direct.*

Ecuaţiile parametrice ale unei elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sunt următoarele

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases},\ t \in [0, 2\pi]$$

Deci în cazul nostru particular, avem parametrizarea semielipsei superioare ($y \geq 0$):

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases},\ t \in [0, \pi]$$

şi obţinem

$$dx = (x(t))' \, dt = -\sin t \cdot dt \,, \; dy = (y(t))' \, dt = 2\cos t \cdot dt$$

Integrala curbilinie este atunci

$$I = \int_0^{\pi} \left[\sqrt{1-\cos^2 t} \, (-\sin t) + \cos t \cdot 2\cos t \right] \cdot dt = \int_0^{\pi} \left[-\sin^2 t + 2\cos^2 t \right] dt$$

Pentru calculul acestor integrale fom folosi formulele trigonometrice

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \; \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

3 Independenţa de drum a integralei curbilinii de al doilea tip.

Definiţia 24 *O mulţime A se numeşte* ***conexă*** *dacă nu există două mulţimi deschise D_1, D_2 astfel încât:*

$$\begin{array}{ll} a) & D_1 \cap A \neq \emptyset, \; D_2 \cap A \neq \emptyset \\ b) & A \subset D_1 \cup D_2 \\ c) & D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset \end{array}$$

Exemplul 25 *1. Fie $A = (0,1) \cup (2,3)$. Această mulţime nu este conexă. Într-adevăr, mulţimile $D_1 = (0,1)$, $D_2 = (2,3)$ sunt deschise, $D_1 \cap A = (0,1) \neq \emptyset$, $D_2 \cap A = (2,3) \neq \emptyset$, $A = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$*

În general are loc următoarea teoremă

Teorema 26 *O submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$ este conexă dacă şi numai dacă este un interval.*

Să considerăm în continuare D un domeniu deschis şi conex, şi două funcţii continue P, Q. Să considerăm integrala curbiline de al doilea tip

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x,y) \, dx + Q(x,y) \, dy,$$

unde $(\widehat{AB})$ este un arc de curbă (netedă pe porţiuni) care uneşte două puncte A şi B din domeniul D. Scopul aceste secţiuni este acela de a preciza **condiţii în care valoare integralei de mai sus nu depinde de forma drumului care uneşte punctele** A **şi** B (ci doar de cele două puncte).

Teorema 27 (Conditia necesară şi suficientă ca o integrală curbilinie să fie independentă de drum) *În condiţiile de mai sus (D un domeniu deschis şi conex, P, Q două funcţii continue pe D, $(\widehat{AB})$ o curbă netedă pe porţiuni). Integrala*

$$I = \int_{(\widehat{AB})} P(x,y) \, dx + Q(x,y) \, dy$$

este independentă de drumul $(\overset{\frown}{AB})$ *dacă şi numai dacă există funcţia* $F(x,y)$ *diferenţiabilă în* D *astfel încât avem*

$$dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,\ (x,y) \in D \tag{1}$$

Remarca 28 *O funcţie* F *care verifică ecuaţia (1) se numeşte* ***primitivă a formei diferenţiale*** $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$*. Având în vedere expresia diferenţialei unei funcţii*

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \cdot dy,$$

deducem că, condiţia (1) este echivalentă cu

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \end{cases} \tag{2}$$

Demonstraţie. *Necesitatea*. Să presupunem că integrala nu depinde de drum. Fie $M(x,y)$ un punct variabil pe curba dată. Integrala curbilinie calculată de la A la M va depinde numai de $M(x,y)$. Să notăm cu

$$F(x,y) \overset{def}{=} \int\limits_{(\overset{\frown}{AM})} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Fie $M'(x+h,y)$ cu $h>0$ suficient de mic astfel încât segmentul MM' rămânde în domeniul D. Calculăm

$$\begin{aligned} F(x+h,y) - F(x,y) &= \int\limits_{(\overset{\frown}{AM})} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \int\limits_{(\overset{\frown}{AM'})} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \\ &= \int\limits_{(\overset{\frown}{MM'})} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \end{aligned}$$

Având în vedere că pe segmentul MM' variază doar x (nu şi y), obţinem y constant deci $dy = 0$ şi $\int\limits_{(\overset{\frown}{MM'})} Q(x,y)\,dy = 0$, adică

$$F(x+h,y) - F(x,y) = \int_x^{x+h} P(x,y)\,dx$$

Aplicăm acum o formulă de medie pentru integrala de mai sus (având în vedere că P este funcţie continuă) şi obţinem că există $\theta \in (0,1)$ ($\Leftrightarrow x+\theta h \in (x, x+h)$) astfel încât

$$\int_x^{x+h} P(x,y)\,dx = P(x+\theta h, y) \cdot \int_x^{x+h} dx = hP(x+\theta h, y)$$

adică

$$\frac{F(x+h,y) - F(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} P(x,y)\,dx = P(x+\theta h, y)$$

Prin urmare

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h,y)-F(x,y)}{h}=P(x,y)\,,\ \forall (x,y)\in D$$

deci

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=P(x,y)\,,\ \forall (x,y)\in D$$

Analog se va obţine

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)\,,\ \forall (x,y)\in D$$

deci

$$dF(x,y)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\cdot dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\cdot dy\right)=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy,\ (x,y)\in D$$

adică funcţia F este primitivă a formei diferenţiale $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$.

Suficienţa. Dacă forma diferenţială dată admite primitivă atunci are loc (vezi **Observaţia** de mai sus)

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=P(x,y)\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)\,,\ (x,y)\in D\end{cases}$$

Să presupunem că $(\widehat{AB})$ este dată de reprezentarea parametrică $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[a,b]$ cu x,y funcţii continue, derivabile cu derivatele continue pe $[a,b]$. Mai presupunem că punctul A este de forma $A(x(a),y(a))$ şi fie $M(x(\tau),y(\tau))$, $\tau\in[a,b]$. Avem

$$\begin{aligned}&\int_{(\widehat{AM})}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_{(\widehat{AM})}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy=\\&=\int_a^\tau\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x(t),y(t))\cdot x'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}(x(t),y(t))\cdot x'(t)\right)\cdot dt=\int_a^\tau\frac{dF}{dt}(x(t),y(t))\,dt=\\&=F(x(\tau),y(\tau))-F(x(a),y(a))=F(M)-F(A)\,,\end{aligned}$$

deci integrala curbilinie doar de punctele A şi M, de funcţiile P şi Q, şi de sensul de parcurgere al curbei. ■

Remarca 29 *1. Condiţia (1) din teorema de mai sus defineşte faptul că forma diferenţială* $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ *este* ***formă diferenţială totală exactă****. Deci Teorema 27 afirmă că o* ***integrală curbilinie este independentă de drum dacă şi numai dacă forma diferenţială care se integrează este exactă.***

2. ***Pentru integralele care nu depind de drumul ales este valabilă formula lui Leibniz-Newton****, adică are loc*

$$\int_{(\widehat{AB})}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=F(B)-F(A)$$

3. Din condiţia (2) obţinem, derivând parţial, ***legătura dintre P şi Q pentru ca integrala curbilinie să nu depindă de drum***

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,,\ \forall\,(x,y)\in D \tag{3}$$

4. O integrală curbilinie nu depinde de drum dacă şi numai dacă este nulă pe orice curbă închisă conţinută în D.

5. Dacă integrala curbilinie nu depinde de drum atunci să alegem un drum particular (inclus în D) paralel cu axele de coordonate

$$A(a,b)\longrightarrow N(x,b)\longrightarrow M(x,y)$$

Vom obţine

$$F(x,y)=\int\limits_{(\overset{\frown}{AM})}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_a^x P(t,b)\,dt+\int\limits_b^y Q(x,s)\,ds$$

Rezulatele de mai sus se extind în $\mathbb{R}^3$.

Teorema 30 (Conditia necesară şi suficientă ca o integrală curbilinie să fie independentă de drum) *Fie P,Q,R trei funcţii continue pe $D\subset\mathbb{R}^3$, $(\overset{\frown}{AB})$ o curbă în spaţiu netedă pe porţiuni. Integrala*

$$I=\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})}P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$$

este independentă de drumul $(\overset{\frown}{AB})$ dacă şi numai dacă există funcţia $F(x,y,z)$ diferenţiabilă în D astfel încât avem

$$dF(x,y,z)=P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz,\ \ (x,y,z)\in D \tag{4}$$

Remarca 31 *1. O funcţie F care verifică ecuaţia (4) se numeşte* ***primitivă a formei diferenţiale*** *$P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$. Având în vedere expresia diferenţialei unei funcţii*

$$dF(x,y,z)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\cdot dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\cdot dy+\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\cdot dz,$$

deducem că, condiţia (4) este echivalentă cu

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=P(x,y,z)\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=Q(x,y,z)\\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=R(x,y,z)\end{cases} \tag{5}$$

2. Condiţia (4) din teorema de mai sus defineşte faptul că forma diferenţială $P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$ este ***formă diferenţială totală exactă****. Deci Teorema* *de mai sus afirmă că o* ***integrală curbilinie este independentă de drum dacă şi numai dacă forma diferenţială care se integrează este exactă.***

3. ***Pentru integralele care nu depind de drumul ales este valabilă formula lui Leibniz-Newton****, adică are loc*

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = F(B) - F(A)$$

4. Din condiţia (5) obţinem, derivând parţial, ***legătura dintre*** P, Q ***şi*** R ***pentru ca integrala curbilinie să nu depindă de drum***

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,,\ \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y)\,,\ \frac{\partial R}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial z}(x,y)\,,\ \forall\,(x,y,z)\in D \tag{6}$$

5. O integrală curbilinie nu depinde de drum dacă şi numai dacă este nulă pe orice curbă închisă conţinută în D.

6. Dacă integrala curbilinie nu depinde de drum atunci să alegem un drum particular (inclus în D) paralel cu axele de coordonate

$$A(a,b,c) \longrightarrow N_1(x,b,c) \longrightarrow N_2(x,y,c) \longrightarrow M(x,y,z)$$

Vom obţine

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \int_{(\widehat{AM})} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \\ &= \int_a^x P(t,b,c)\,dt + \int_b^y Q(x,s,c)\,ds + \int_c^z R(x,y,r)\,dr \end{aligned}$$

4 Aplicaţii ale integralei curbilinii

4.1 Lungimea arcului unei curbe

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_{(\mathcal{C})} ds$$

4.2 Aria unui domeniu plan

Teorema 32 *Fie* $\mathcal{D}$ *un domeniu plan delimitat de curba* $\mathcal{C}$ *netedă pe porţiuni. Atunci are loc*

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\int_{(\mathcal{C})} xdy - ydx$$

Demonstraţie. Se consideră mai întâi un domeniu particular de tipul $PQRS$ unde PS şi QR sunt două segmente paralele cu Oy iar PQ este o curbă dată explicit de $y = y_1(x)$ şi SR este o curbă dată explicit de $y = y_2(x)$. Notăm cu $M(a,0)$, $N(b,0)$ proiecţiile punctelor P respectiv Q pe axa Ox. Dacă folosim expresia ariei (vezi Curs-*Aplicaţii ale integralei definite*)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(PQRS) &= \mathcal{A}(MNRS) - \mathcal{A}(MNQP) = \int_a^b y_2(x)\,dx - \int_a^b y_1(x)\,dx = \\ &= \int_{(\widehat{SR})} ydx - \int_{(\widehat{PQ})} ydx = -\int_{(\widehat{RS})} ydx - \int_{(\widehat{PQ})} ydx\end{aligned}$$

Pe de altă parte

$$\int_{(\widehat{QR})} ydx = \int_{(\widehat{SP})} ydx = 0$$

deoarece integrăm pe segmente paralele cu axa Oy (x este constant)

Deci

$$\mathcal{A}(PQRS) = -\int_{(\widehat{RS})} ydx - \int_{(\widehat{PQ})} ydx - \int_{(\widehat{QR})} ydx - \int_{(\widehat{SP})} ydx = -\int_{(\widehat{PQRS})} ydx = -\int_{(\mathcal{C})} ydx \tag{7}$$

Analog se poate demonstra formula pentru un domeniu particular de tipul $PQRS$ unde PQ şi RS sunt două segmente paralele cu Ox iar PS este o curbă dată explicit de $x = x_1(y)$ şi QR este o curbă dată explicit de $x = x_2(y)$.

$$\mathcal{A}(PQRS) = \int_{(\widehat{QR})} xdy + \int_{(\widehat{SP})} xdy = \int_{(\widehat{QR})} xdy + \int_{(\widehat{SP})} xdy + \int_{(\widehat{PQ})} xdy + \int_{(\widehat{RS})} xdy = \int_{(\widehat{PQRS})} xdy = \int_{(\mathcal{C})} xdy \tag{8}$$

Din cele două formule (7) şi (8) obţinem în imediat concluzia

$$\mathcal{A}(PQRS) = \frac{1}{2}\int_{(\mathcal{C})} xdy - ydx$$

■

Exerciţiul 33 *Calculaţi următoarea integrală curbilinie constatând în prealabil că este independentă de drum*

$$I = \int_{(\widehat{AB})} \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$$

unde $(\widehat{AB})$ este arcul de curbă ce uneşte punctul $A(0,-1)$ cu $B(1,0)$.

În cazul nostru $P(x,y) = \frac{-y}{(x-y)^2}$ şi $Q(x,y) = \frac{x}{(x-y)^2}$. Se verifică mai întâi egalitatea (3)

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \cdots = -\frac{x+y}{(x-y)^3}$$

apoi se rezolvă sistemul (2) integrându-se una din ecuaţii.

Deci

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx = \cdots = \frac{y}{x-y} + c(y).$$

Folosind a doua ecuaţie ($\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$) obţinem

$$F'_y(x,y) = Q(x,y) \Leftrightarrow \frac{x}{(x-y)^2} + c'(y) = \frac{x}{(x-y)^2} \Leftrightarrow c'(y) = 0 \Leftrightarrow c(y) = c \in \mathbb{R}$$

deci

$$F(x,y) = \frac{y}{x-y} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

După ce s-a determinat primitiva F se aplică formula lui Leibniz-Newton şi obţin că

$$I = F(1,0) - F(0,-1) = \frac{0}{1-0} - \frac{-1}{0-(-1)} = 1.$$

Exerciţiul 34 *Calculaţi următoarea integrală curbilinie constatând în prealabil că este independentă de drum*

$$I = \int_{(\widehat{AB})} y\,dx + x\,dy$$

unde $(\widehat{AB})$ este arcul de curbă ce uneşte punctele $A(2,1) \longrightarrow B(1,3)$.

În cazul nostru $P(x,y) = y$ şi $Q(x,y) = x$. Se verifică mai întâi egalitatea (3)

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 1$$

apoi se rezolvă sistemul (2) integrându-se una din ecuaţii.

Deci

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx = xy + c(y).$$

Folosind a doua ecuaţie ($\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$) obţinem

$$F'_y(x,y) = Q(x,y) \Leftrightarrow x + c'(y) = x \Leftrightarrow c'(y) = 0 \Leftrightarrow c(y) = c \in \mathbb{R}$$

deci

$$F(x,y) = xy + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

După ce s-a determinat primitiva F se aplică formula lui Leibniz-Newton şi obţin că

$$I = F(2,1) - F(1,3) = 2 - 3 = -1.$$

Exerciţiul 35 *Să se studieze dacă următoarea formă diferenţială este exactă şi în caz afirmativ să se calculeze o primitivă a ei:*

$$\omega = \left(4x^3y^3 - 3y^2 + 5\right)dx + \left(3x^4y^2 - 6xy - 4\right)dy.$$

În cazul nostru $P(x,y,z) = 4x^3y^3 - 3y^2 + 5$ şi $Q(x,y,z) = 3x^4y^2 - 6xy - 4$. Se verifică mai întâi egalitatea (6)

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 12x^3y^2 - 6y$$

apoi se rezolvă sistemul (5) integrându-se una din ecuaţii.

Se va obţine

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int P(x,y)\,dx = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x + c(y)\,.$$

Folosind acum ecuaţia a doua avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= Q(x,y) \Leftrightarrow 3x^4y^2 - 6xy + 0 + c'(y) = 3x^4y^2 - 6xy - 4 \\ &\Leftrightarrow c'(y) = 0 \Leftrightarrow c(y) = c\end{aligned}$$

Deci

$$F(x,y) = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Exerciţiul 36 *Să se studieze dacă următoarea formă diferenţială este exactă şi în caz afirmativ să se calculeze o primitivă a ei:*

$$\omega = z\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x^2+z^2}\right)dx + \frac{z}{xy^2}dy + \left(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\right)dz.$$

În cazul nostru $P(x,y,z) = z\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x^2+z^2}\right)$ *şi* $Q(x,y,z) = \frac{z}{xy^2}$, $R(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\right)$. *Se verifică mai întâi egalitatea (6)*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,,\ \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y)\,,\ \frac{\partial R}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial z}(x,y)$$

apoi se rezolvă sistemul (5) integrându-se una din ecuaţii.