Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului
Analiza Matematică II, Semestrul II
Conf. dr. Lucian MATICIUC

CURS XI – XII

Capitolul VI: Integrale triple

1 Definiţie. Metode de calcul

Fie V un domeniu din spaţiu şi funcţia $f(x,y,z)$ definită pe acest domeniu. Descompunem V, cu ajutorul unor reţele de suprafeţe, într-un număr finit de subdomenii $V_1, V_2, ...V_n$. În fiecare subdomeniu V_i vom lua un punct arbitrar $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ şi formăm **suma integrală**

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \mathcal{V}(V_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \mathcal{V}(V_i) \ ,$$

unde $\mathcal{V}(V_i)$ reprezintă volumul domeniului V_i.

Definiţia 1 *Limita finită a sumelor integrale, când norma divizării domeniului V (adică cel mai mare dintre diametrele tuturor domeniilor V_i) tinde la zero, se numeşte integrala triplă a funcţiei $f(x,y,z)$ pe domeniul V şi se notează cu*

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

Remarca 2 *Dacă f este integrabilă pe V atunci f este mărginită pe V.*

Teorema 3 *Orice funcţie continuă pe V este integrabilă pe V.*

Proposiţia 4 (Proprietăţi ale funcţiilor integrabile) *1. Existenţa şi valoarea unei integrale triple nu depinde de valorile luate de funcţia f de-a lungul unui număr finit de domenii.*

2. Dacă $V = V_1 \cup V_2$ atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz$$

(din existenţa integralei din membrul stâng decurgând existenţa integralelor din membrul drept)

3. Dacă $f \geq g$, pe V şi f, g sunt integrabile pe V, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz \geq \iiint_V g(x,y,z)\,dxdydz$$

4. Dacă $f : V \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe V, atunci şi funcţia $|f|$ este integrabilă pe V şi

$$\left| \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz \right| \leq \iiint_V |f(x,y,z)|\,dxdydz$$

*5. (**Teorema de medie**) Dacă f este continuă pe V, atunci există un punct $(\xi, \eta, \zeta) \in V$ astfel încât are loc*

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot \mathcal{V}(V)$$

Teorema 5 (de reducere a integralei triple în cazul unui paralelipiped dreptunghic) *Fie funcţia $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ definită pe paralelipipedul $P = [a,b]\times[c,d]\times[g,h]$. Presupunem că există integrala*

$$I = \iiint_P f(x,y,z)\,dxdydz$$

şi pentru orice $x \in [a,b]$ există şi integrala

$$I(x) = \iint_{[c,d]\times[g,h]} f(x,y,z)\,dydz$$

Atunci există şi integrala iterată

$$\int_a^b \left(\iint_{[c,d]\times[g,h]} f(x,y,z)\,dydz \right) dx$$

şi are loc egalitatea

$$I = \iiint_P f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{[c,d]\times[g,h]} f(x,y,z)\,dydz \right) dx$$

Demonstraţie. Se împart intervalele date în subintervale

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \\ c &= y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d \\ g &= z_0 < z_1 < \cdots < z_l = h \end{aligned}$$

şi deci vom obţine divizarea paralelipipedului P în paralelipipede elementare

$$P_{i,j,k} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]\ ,\quad i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{1, m-1},\ \ k = \overline{1, l-1}$$

Pe aceste paralelipipede elementare vom lucra cu sumele Darboux asociate integralelor date.

■

Să presupunem în continuare că V este un corp cilindric mărginit inferior de suprafaţa $z = g_1(x,y)$ şi superior de suprafaţa $z = g_2(x,y)$, unde $(x,y) \in \mathcal{D}$ care este proiecţia pe planul xOy a domeniului V. Notăm cu $(\mathcal{C})$ curba frontieră a domeniului plan $\mathcal{D}$. Deci V este mărginit de o supratfaţă cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Oz ce se deplsasează pe curba directoare $(\mathcal{C})$. Se introduce funcţia f^* definită pe un paralelipiped P care conţine pe V

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z)\,,\ \text{dacă}\ (x,y,z) \in V \\ 0,\ \text{dacă}\ (x,y,z)\ \text{este în afara lui}\ V \end{cases}$$

Procedând analog ca la integrala dublă, obţinem următoarea teoremă de reducere a integralei triple:

Teorema 6 (de reducere a integralei triple în cazul unui corp cilindric) *Fie domeniul cilindric V dat de*

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{D}\,, \quad g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)\right\}$$

şi funcţia $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ definită pe V.

Presupunem că există

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$$

şi că pentru orice $(x, y) \in \mathcal{D}$ există şi integrala

$$I(x) = \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Atunci are loc egalitatea

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dxdy$$

Remarca 7 *În formula de mai sus se pot permuta rolurile variabilelor şi se obţin şi formule de calcul pentru integralele triple în cazul în care V este un cilindroid cu generatoarele paralele cu Ox sau cu Oy.*

Remarca 8 *Dacă funcţia f este continuă pe V atunci este asigurată existenţa tuturor integralelor de mai sus şi deci au loc toate egalităţile.*

Exerciţiul 9 *Să se calculeze $I = \iiint_V z dxdydz$, unde V este domeniul dat de: $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $x^2 + y^2 \le z^2$, $z \ge 0$.*

Suprafaţa dată de ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ este o sferă de rază a, iar suprafaţa $z^2 = x^2 + y^2$ este un con cu vârful în origine şi cu axă de simetrie Oz. Intersecţia celor două suprafeţe este

$$x^2 + y^2 + \left(x^2 + y^2\right) = a^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(a/\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow z = \pm a/\sqrt{2}$$

adică un cerc de rază $a/\sqrt{2}$ situat la înălţimea $z = a/\sqrt{2}$ (am ales $z \ge 0$). Proiecţia lui V pe planul xOy este deci discul $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \le \left(a/\sqrt{2}\right)^2$. Ecuaţiile explicite ale celor două suprafeţe sunt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (suprafaţa conică ce mărgineşte inferior) şi $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (suprafaţa sferică ce mărgineşte superior). Deci explicitarea lui V este dată de

$$V = \left\{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right\}$$

iar intergrala triplă se reduce astfel

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V z dxdydz = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z dz \right) dxdy = \iint_{\mathcal{D}} \left. \frac{z^2}{2} \right|_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dxdy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left(a^2 - 2x^2 - 2y^2\right) dxdy \end{aligned}$$

Pentru calculul acestei integrale duble folosim coordonate polare: $\rho \in [0, a]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $J = \rho$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left(a^2 - 2x^2 - 2y^2\right) dxdy = \frac{1}{2} \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \left(a^2 - 2\rho^2 \cos^2\theta - 2\rho^2 \sin^2\theta\right) \rho \, d\theta \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a \left(a^2 - 2\rho^2\right) \rho \, d\rho = \dots \end{aligned}$$

2 Formula lui Gauss-Ostrogradski

Fie V un domeniu cilindroid mărginit inferior de suprafaţa $(S_1) : z = g_1(x, y)$, superior de $(S_2) : z = g_2(x, y)$ şi lateral de suprafaţa cilindrică (S_3) cu generatoarele paralele cu axa Oz. Curba directoare a cilindroidului este $(\mathcal{C})$, curba frontieră a lui $\mathcal{D}$ care este proiecţia lui V pe xOy.

Teorema 10 *Dacă $R(x, y, z)$ este o funcţie continuă cu derivata $\frac{\partial R}{\partial z}$ continuă pe V, atunci are loc egalitatea*

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dxdydz = \iint_S R(x, y, z)\, dxdy\,,$$

unde S este suprafaţa care mărgineşte corpul V (integrala de suprafaţă de al doilea tip din membrul drept se consideră calculată pe faţa exterioară).

Demonstraţie. Conform teremei de reducere precedente (având în vedere forma de cilindroid a lui V) obţinem

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dxdydz &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dz \right) dxdy = \\ &= \iint_{\mathcal{D}} R(x, y, g_2(x, y))\, dxdy - \iint_{\mathcal{D}} R(x, y, g_1(x, y))\, dxdy \end{aligned}$$

Conform proprietăţilor de la integrala de suprafaţă avem

$$\iint_{S_2} R(x, y, z)\, dxdy = \iint_{\mathcal{D}} R(x, y, g_2(x, y))\, dxdy\,, \quad \iint_{S_1} R(x, y, z)\, dxdy = -\iint_{\mathcal{D}} R(x, y, g_1(x, y))\, dxdy$$

(ultima integrală este cu $-$ deoarece se consideră pe faţa inferioară a lui S_1). Deci

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{S_2} R(x, y, z)\, dxdy + \iint_{S_1} R(x, y, z)\, dxdy$$

În ceea ce priveşte integrala de suprafaţă pe S_3 avem că

$$\iint_{S_3} R(x, y, z)\, dxdy = 0$$

deoarece suprafaţa S_3 este paralelă cu axa Oz deci unghiul γ făcut de normala la suprafaţă (care este paralelă cu Oz) cu axa Oz este $\gamma = \pi/2 \Rightarrow \cos\gamma = 0$ (cosinusul director corespunzător lui $dxdy$). Deci

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dxdydz &= \iint_{S_1} R(x, y, z)\, dxdy + \iint_{S_2} R(x, y, z)\, dxdy + \iint_{S_3} R(x, y, z)\, dxdy = \\ &= \iint_S R(x, y, z)\, dxdy \end{aligned}$$

deoarece suprafaţa $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. ■

Remarca 11 *Dacă P, Q sunt funcţii continue, cu derivatele $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ continue pe V, atunci analog se demonstrează formulele*

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\,dxdydz &= \iint_S P(x,y,z)\,dydz\\ \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)\,dxdydz &= \iint_S Q(x,y,z)\,dzdx\end{aligned}$$

Deci, adunând cele trei formule obţinem **formula lui Gauss-Ostrogradski**

$$\iiint_V \left(\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdydz = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Folosind teorema de reducere a integralelor de suprafaţă de al doile tip la integralele de suprafaţă de primul tip obţin

$$\iiint_V \left(\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdydz = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma$$

3 Schimbarea de variabile în integrala triplă

Să considerăm spaţiul raportat la un sistem de coordonate rectangulare $Oxyz$ şi un alt spaţiu raportat la sistemul de coordonate rectangulare $\Omega\xi\eta\zeta$. Fie în aceste spaţii două domenii închise V şi Δ mărginite de suprafeţele S respectiv Σ. Presupunem că aceste domenii sunt legate de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta,\zeta), \\ y = y(\xi,\eta,\zeta), \\ z = z(\xi,\eta,\zeta), \ (\xi,\eta,\zeta) \in \Delta \end{cases} \tag{1}$$

Teorema 12 *Dacă funcţiile de mai sus au derivatele parţiale continue pe Δ şi jacobianul transformării*

$$J(\xi,\eta,\zeta) \overset{def}{=} \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

este diferit de 0 pe Δ, atunci unei suprafeţe netede din Δ îi corespunde o suprafaţă netedă din V.

Remarca 13 *Coordonatele ξ, η, ζ, care caracterizează în mod unic poziţia unui punct din spaţiul $Oxyz$, se numesc **coordonate curbilinii** ale acestui punct.*

Remarca 14 ***Coordonatele cilindrice*** *sunt date de*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z, \ \rho \in [0, \infty), \ \theta \in [0, 2\pi], \ z \in (-\infty, \infty) \end{cases}$$

Jacobianul transformării este

$$J(\rho, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{...calcule...} = \rho$$

Remarca 15 ***Coordonatele sferice*** *(sau* ***coordonate polare în spaţiu****) sunt date de*

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta, \ \rho \in [0, \infty), \ \theta \in [0, \pi], \ \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Jacobianul transformării este

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \text{...calcule...} = \rho^2 \sin \theta$$

Teorema 16 (Expresia volumului în coordonate curbilinii) *Fie transformarea (1) între domeniile V şi Δ cu jacobianul $J(\xi, \eta, \zeta)$ nenul pe Δ. Presupun că funcţiile x, y, z admit derivate parţiale continue de ordinul al doilea pe Δ. Atunci volumul lui V este dat de*

$$\mathcal{V} = \pm \iiint_{\Delta} J(\xi, \eta, \zeta) \ d\xi d\eta d\zeta,$$

unde semnul din faţa integralei este acelaşi cu semnul lui $J(\xi, \eta, \zeta)$.

Demonstraţie. Demonstraţia este o generalizare a demonstraţiei Teoremei 20 din Cursul 7-8 (se va aplica formula lui Gauss-Ostrogradski). ■

Corolarul 17 *Elementul de volum $dxdydz$ este deci dat de*

$$dxdydz = |J(\xi, \eta, \zeta)| \ d\xi d\eta d\zeta$$

Teorema 18 (Schimbarea de variabile în integrala triplă) *Fie transformarea (1) între domeniile V şi Δ cu jacobianul $J(\xi, \eta, \zeta)$ nenul pe Δ. Presupun că funcţiile x, y, z admit derivate parţiale continue de ordinul al doilea pe Δ. Atunci*

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dxdydz = \iiint_{\Delta} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \, |J(\xi, \eta, \zeta)| \ d\xi d\eta d\zeta,$$

Demonstraţie. Descompunem domeniile V şi $\cdot$ prin suprafeţe netede pe porţiuni. în subdomeniile $(V_i)_{i=\overline{1,n}}$ şi $(\Delta_i)_{i=\overline{1,n}}$. În fiecare V_i considerăm punctul arbitrar (x_i, y_i, z_i) şi scriem suma integrală care are drept limită integrala triplă

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathcal{V}(V_i) \longrightarrow \iiint_V f(x, y, z)\ dxdydz \tag{2}$$

Pe de altă parte putem deduce, aplicând o teoremă de medie, că

$$\mathcal{V}(V_i) = |J(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*)|\ \mathcal{V}(\Delta_i),$$

unde $(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*)$ este un punct oarecare din domeniul Δ_i iar $\mathcal{V}(\Delta_i)$ este volumul lui Δ_i. Suma integrală devine

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot |J(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)|\ \mathcal{V}(\Delta_i)$$

Punctul $(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*)$ este dat de o teoremă de medie deci nu este arbitrar dar punctul (x_i, y_i, z_i) se ia în V_i arbitrar. Alegem

$$x_i = x(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*),\ y_i = y(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*),\ z_i = z(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*)$$

iar suma integrală devine

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*), y(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*), z(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*)) \cdot |J(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)|\ \mathcal{V}(\Delta_i)$$

care este suma integrală corespunzătoare integralei triple

$$\iiint_\Delta f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))\ |J(\xi, \eta, \zeta)|\ d\xi d\eta d\zeta \tag{3}$$

În final vom face ca diametrele domeniilor Δ_i să tindă la zero ceea ce va implica că diametrele domeniilor V_i tinde la zero şi vom obţine egalitatea dintre (2) şi (3). ■

Exerciţiul 19 *Să se calculeze*

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz,$$

unde $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq az.$

Domeniul este dat de $x^2 + y^2 + z^2 \leq az \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - az \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2}{4}$ *deci este interiorul unei sfere centru* $A\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$ *şi de rază* $\frac{a}{2}$. *Vom folosi* ***coordonatele sferice*** *(sau* ***coordonate polare în spaţiu****) date de*

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

Pentru a găsi domeniul Δ de variaţie pentru ρ, θ, φ folosim inegalitatea care dă domeniul

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &\leq az \Rightarrow (\rho\sin\theta\cos\varphi)^2+(\rho\sin\theta\sin\varphi)^2+(\rho\cos\theta)^2 \leq a\rho\cos\theta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin\varphi^2\right)+\rho^2\cos^2\theta \leq a\rho\cos\theta \Leftrightarrow \rho \leq a\cos\theta \end{aligned}$$

deci $\rho \in [0, a\cos\theta]$. *Din desen deduc* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *şi* $\varphi \in [0, 2\pi]$. *Jacobianul transformării este* $J = \rho^2\sin\theta$. *Integrala devine*

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \\ &= \iiint_\Delta \sqrt{(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2+(\rho\sin\theta\sin\varphi)^2+(\rho\cos\theta)^2}\left|\rho^2\sin\theta\right| d\rho d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{a\cos\theta}\rho^3\sin\theta\, d\rho\right)d\varphi\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}\left(\sin\theta\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{\rho=0}^{\rho=a\cos\theta}\right)d\varphi\right)d\theta = \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}a^4\sin\theta\cos^4\theta\, d\theta = \frac{\pi a^4}{2}\int_0^{\pi/2}(-)\cos^4\theta\cdot(\cos\theta)'\, d\theta = -\frac{\pi a^4}{2}\left.\frac{\cos^5\theta}{5}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{10}. \end{aligned}$$

4 Aplicaţii ale integralelor triple

- **Volumul unui corp** V este dată de

$$\mathcal{V}(V) = \iiint_V dxdydz$$

- **Masa şi centrul de greutate ale unui domeniu**.

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \mu(x,y,z)\, dxdydz\,, \quad \text{şi} \\ x_G &= \frac{1}{m}\iiint_V x\mu(x,y,z)\, dxdydz\,, \quad y_G = \frac{1}{m}\iiint_V y\mu(x,y,z)\, dxdydz\,, \\ z_G &= \frac{1}{m}\iiint_V z\mu(x,y,z)\, dxdydz\,, \end{aligned}$$

unde $\mu(x,y,z)$ este densitatea corpului ce ocupă volumul V.