

Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie și Ingineria Mediului

Analiza Matematică II, Semestrul II

Conf. dr. Lucian MATICIUC

SEMINAR 1 – 3

Capitolul I: Integrala definită. Primitive

1. Să se arate că

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{dacă } f \text{ este funcție pară,} \\ 0, & \text{dacă } f \text{ este funcție impară.} \end{cases}$$

Rezolvare:

Astfel avem conform proprietății de aditivitate că

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Acum dacă f este pară, adică

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in [-a, a],$$

atunci în prima integrală fac schimbarea de variabilă

$$x = -y \Leftrightarrow y = -x$$

De aici obținem că $dx = -dy$ precum și noile limite de integrare: dacă $x = -a$ atunci $y = a$ și dacă $x = 0$ atunci $y = 0$.

Deci integrala devine, conform schimbării de variabilă,

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-y) (-dy) = \int_a^0 f(y) (-dy) = - \int_a^0 f(y) dy$$

Dar, conform unei convenții

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

deci

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(y) dy = \int_0^a f(x) dx$$

de unde obținem că

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Dacă f este impară, adică

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in [-a, a],$$

atunci în prima integrală fac aceeași schimbarea de variabilă

$$x = -y \Leftrightarrow y = -x$$

De aici obținem $dx = -dy$ și limitele de integrare devin: dacă $x = -a$ atunci $y = a$ și dacă $x = 0$ atunci $y = 0$.

Deci integrala devine, conform schimbării de variabilă,

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-y) (-dy) = \int_a^0 -f(y) (-dy) = \int_a^0 f(y) dy = -\int_0^a f(y) dy = -\int_0^a f(x) dx$$

deci

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(y) dy = -\int_0^a f(x) dx.$$

Obținem deci că

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

2. Arătați, folosind paritatea funcției de sub integrală, că

$$a) \int_{-1}^1 \frac{\arctg x}{e^x + e^{-x}} dx = 0, \quad b) \int_{-1/2}^{1/2} (\cos x) \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0,$$

$$c) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin x \cdot \operatorname{tg}^2 x = 0, \quad d) \int_{-1}^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = 0$$

Rezolvare:

Aplic exercițiul anterior. Astfel vom arăta că funcțiile care se integrează sunt impare. Pentru aceasta folosim paritatea funcțiilor trigonometrice:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \arctg(-x) = -\arctg x$$

$$a) \text{ Notăm cu } f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\arctg x}{e^x + e^{-x}}.$$

$$f(-x) = \frac{\arctg(-x)}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{-\arctg x}{e^{-x} + e^x} = -f(x)$$

b), c), d) Temă (se va folosi și faptul că $\ln y^{-1} = -\ln y, \forall y > 0$).

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție continuă și periodică de perioadă $T > 0$. Să se arate că are loc

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \forall a \in \mathbb{R}$$

și apoi să se calculeze:

$$a) \int_0^{2n\pi} |\sin x| dx, n \in \mathbb{N}, \quad b) \int_0^{2n\pi} |\cos x| dx, n \in \mathbb{N}$$

Rezolvare:

Funcția f periodică înseamnă că $f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Avem conform proprietății de aditivitate că

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$$

În ultima integrală fac schimbarea de variabilă

$$x = y + T \Leftrightarrow y = x - T$$

De aici obținem $dx = dy$ și limitele de integrare devin: dacă $x = T$ atunci $y = 0$ și dacă $x = a + T$ atunci $y = a$. Deci integrala devine, conform schimbării de variabilă,

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(y + T) dy = \int_0^a f(y) dy = - \int_a^0 f(y) dy$$

deci

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

a) Știm că \sin și \cos sunt periodice de perioadă 2π

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$$

deci evident și funcțiile $|\sin x|, |\cos x|$

Conform celor de mai sus, avem că

$$\begin{aligned} \int_0^{2n\pi} |\sin x| dx &= \int_0^{2\pi} |\sin x| dx + \int_{2\pi}^{4\pi} |\sin x| dx + \dots + \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} |\sin x| dx = \\ &= \int_0^{2\pi} |\sin x| dx + \int_0^{2\pi} |\sin x| dx + \dots + \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = n \int_0^{2\pi} |\sin x| dx \end{aligned}$$

Iar

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx &= \int_0^{\pi} |\sin x| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = \\ &= (-\cos x)|_0^{\pi} - (-\cos x)|_{\pi}^{2\pi} = 4 \end{aligned}$$

deci

$$\int_0^{2n\pi} |\sin x| dx = n \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 4n$$

b) Temă

4. Să se calculeze următoarele integrale (folosind tabelul):

$$\begin{aligned}
 & a) \int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}, \quad b) \int \sqrt{2px} dx, \quad c) \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}, \quad d) \int \frac{dx}{5+x^2}, \quad e) \int \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad f) \int \frac{dx}{x\sqrt{x}}, \\
 & g) \int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}, \quad h) \int \frac{dx}{a-x}, \quad i) \int \frac{dx}{3x^2+5}, \quad j) \int \frac{dx}{7x^2-8}, \quad k) \int \sqrt{2-3x} dx, \quad l) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}, \\
 & m) \int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}, \quad n) \int \frac{3}{5x^2+7} dx.
 \end{aligned}$$

5. Să se calculeze următoarele integrale (folosind metoda de integrare prin părți):

$$\begin{aligned}
 & a) \int (x^2 + 5x) e^{2x} dx, \quad b) \int e^{ax} \sin(bx) dx, \quad c) \int x^2 \sin x dx, \quad d) \int \ln^3 x dx, \quad e) \int x^3 \ln^2 x dx \\
 & f) \int \sqrt{x^2+a} dx, \quad a \in \mathbb{R}, \quad g) \int \sqrt{a^2-x^2} dx, \quad h) \int \frac{\ln x}{x^3} dx = \int x^{-3} \ln x dx = \int \left(\frac{x^{-2}}{-2} \right)' \ln x dx = \dots
 \end{aligned}$$

Rezolvare:

Dacă f și g sunt funcții cu derivatele continue pe domeniul de definiție I atunci are loc formula de integrare prin părți:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

a) Folosim $e^{2x} = \frac{1}{2} (e^{2x})'$:

$$\begin{aligned}
 \int (x^2 + 5x) e^{2x} dx &= \int (x^2 + 5x) \frac{1}{2} (e^{2x})' dx = (x^2 + 5x) \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int (x^2 + 5x)' e^{2x} dx = \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 + 5x) e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x + 5) e^{2x} dx = \text{aplicăm încă o dată} \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 + 5x) e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x + 5) \frac{1}{2} (e^{2x})' dx \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 + 5x) e^{2x} - \frac{1}{2} \left((2x + 5) \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x + 5)' e^{2x} dx \right) = \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 + 5x) e^{2x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (2x + 5) e^{2x} - \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx \right) = \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 + 5x) e^{2x} - \frac{1}{4} (2x + 5) e^{2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C, \quad C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

b) Folosim $e^{ax} = \frac{1}{a} (e^{ax})'$:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin (bx) dx &= \int \frac{1}{a} (e^{ax})' \sin (bx) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin (bx) - \int \frac{1}{a} e^{ax} (\sin (bx))' dx = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin (bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos (bx) dx = \text{aplicăm încă o dată} \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin (bx) - \frac{b}{a} \int \frac{1}{a} (e^{ax})' \cos (bx) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin (bx) - \frac{b}{a^2} \left(e^{ax} \cos (bx) - \int e^{ax} (\cos (bx))' dx \right) = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin (bx) - \frac{b}{a^2} \left(e^{ax} \cos (bx) + \int b e^{ax} \sin (bx) dx \right) = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin (bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos (bx) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin (bx) dx \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin (bx) dx + \frac{b}{a^2} \int e^{ax} \sin (bx) dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin (bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos (bx) + C, \quad C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int e^{ax} \sin (bx) dx &= \frac{a^2}{a^2 + b} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin (bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos (bx) \right) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Observație: putem pleca și de la $\sin (bx) = \frac{-1}{b} (\cos (bx))'$

c) Temă (folosim $\sin x = -(\cos x)'$).

d)

$$\begin{aligned} \int \ln^3 x dx &= \int x' \ln^3 x dx = x \ln^3 x - \int x (\ln^3 x)' dx = \\ &= x \ln^3 x - 3 \int x \ln^2 x \frac{1}{x} dx = x \ln^3 x - 3 \int \ln^2 x dx = \text{aplicăm încă o dată} \\ &= x \ln^3 x - 3 \int x' \ln^2 x dx = x \ln^3 x - 3 \left(x \ln^2 x - \int x (\ln^2 x)' dx \right) = \\ &= x \ln^3 x - 3 \left(x \ln^2 x - 2 \int x \ln x \frac{1}{x} dx \right) = x \ln^3 x - 3 \left(x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx \right) = \\ &= x \ln^3 x - 3 \left(x \ln^2 x - 2 \left(x \ln x - \int x (\ln x)' dx \right) \right) = \\ &= x \ln^3 x - 3 \left(x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) \right) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e) Temă (folosim $x^3 = \frac{1}{4} (x^4)'$)

f)

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x^2 + a} dx = (\text{raționalizare}) = \int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \\ &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx + \int \frac{a}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int x (\sqrt{x^2 + a})' dx + a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| = \\ &= a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + \left(x \sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx \right) \\ &= a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + x \sqrt{x^2 + a} - I \end{aligned}$$

Deci

$$I = \int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C, C \in \mathbb{R}$$

g), h), i), j), k) Temă.

6. (Temă) Să se calculeze următoarele integrale folosind metoda de integrare prin părți:

$$a) \int (x^3 + 2x) e^{5x} dx, \quad b) \int e^{ax} \sin(bx) dx, \quad c) \int e^{ax} \cos(bx) dx, \quad d) \int e^{3x} \sin(4x) dx,$$

$$e) \int e^{4x} \cos(3x) dx, \quad f) \int x^3 \cos x dx, \quad g) \int x^3 \sin(5x) dx, \quad h) \int x^3 \cos(5x) dx,$$

$$i) \int \ln x dx, \quad j) \int x^2 \ln^3 x dx, \quad k) \int \sqrt{x^2 + 5} dx, \quad l) \int \sqrt{x^2 - 5} dx, \quad m) \int \sqrt{5 - x^2} dx$$

$$n) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx, \quad o) \int (x^2 + 5x + 6) \cos(2x) dx, \quad p) \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx$$

7. Folosind prima metodă de schimbare de variabilă să se calculeze:

$$a) \int \frac{x + \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad b) \int \frac{1}{x \ln^2 x} dx, \quad c) \int \frac{1}{x \ln^5 x} dx,$$

$$d) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx, \quad e) \int_2^3 \sqrt{6x - x^2 - 5} dx, \quad f) \int \sqrt{x^2 + x + 1} dx$$

Rezolvare:

Aplic prima metodă de schimbare de variabilă:

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C, C \in \mathbb{R},$$

unde F este o primitivă a lui funcției f .

De asemenea are loc și în cazul integralei definite:

$$\int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y) dy = F(y) \Big|_{y=u(a)}^{y=u(b)} = F(u(b)) - F(u(a)).$$

a) Observ că $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\arccos x)'$, deci

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int (\sqrt{1-x^2})' dx + \int \arccos x (-\arccos x)' dx = \\ &= -\sqrt{1-x^2} - \int \arccos x (\arccos x)' dx = -\sqrt{1-x^2} - \int \arccos x d(\arccos x). \end{aligned}$$

Acum dacă notăm

$$y \stackrel{not}{=} \arccos x \Rightarrow dy = (\arccos x)' dx$$

deci integrala devine

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\sqrt{1-x^2} - \int y dy = \\ &= -\sqrt{1-x^2} - \frac{y^2}{2} + C = -\sqrt{1-x^2} - \frac{(\arccos x)^2}{2} + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Observ că $\frac{1}{x} = (\ln x)'$ și voi nota $y \stackrel{\text{not}}{=} \ln x \Rightarrow dy = (\ln x)' dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln^2 x} dx &= \int \frac{1}{\ln^2 x} (\ln x)' dx = \int \frac{1}{y^2} dy = \int y^{-2} dy = \\ &= \frac{y^{-3}}{-3} + C = \frac{(\ln x)^{-3}}{-3} + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c) Temă

d) Observ că $\cos x = (\sin x)'$ și voi nota $y \stackrel{\text{not}}{=} \sin x \Rightarrow dy = (\sin x)' dx$ și limitele de integrare devin: dacă $x = 0$ atunci $y = \sin 0 = 0$ și dacă $x = \pi/2$ atunci $y = \sin \pi/2 = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin^2 x} (\sin x)' dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctg y \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \pi/4 - 0$$

e) Folosim forma canonică a trinomialului de gradul 2

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

unde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Deci

$$\begin{aligned} 6x - x^2 - 5 &= -x^2 + 6x - 5 = - \left(x + \frac{6}{-2} \right)^2 + \frac{-(36-20)}{-4} \\ &= -(x-3)^2 + 4 = 4 - (x-3)^2 \end{aligned}$$

și

$$\int_2^3 \sqrt{6x - x^2 - 5} dx = \int_2^3 \sqrt{4 - (x-3)^2} dx = \int_2^3 \sqrt{4 - (x-3)^2} (x-3)' dx =$$

Notez $y \stackrel{\text{not}}{=} x - 3 \Rightarrow dy = (x-3)' dx$ și limitele de integrare devin: dacă $x = 2$ atunci $y = -1$ și dacă $x = 3$ atunci $y = 0$.

$$\int_2^3 \sqrt{6x - x^2 - 5} dx = \int_{-1}^0 \sqrt{4 - y^2} dy$$

Pentru a calcula ultima integrală vezi exercițiile precedente.

f) Temă.

8. (Temă) Folosind prima metodă de schimbare de variabilă să se calculeze:

$$a) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx, \quad b) \int \frac{\sin x}{\cos x} dx, \quad c) \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx, \quad d) \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$e) \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad f) \int x^2 e^{x^3} dx, \quad g) \int \frac{3-2x}{5x^2+7} dx.$$

9. (Temă)

(i) Aduceți la forma canonică următoarele trinoame de gradul al doilea:

$$a) f(x) = 4x - x^2 + 5, \quad b) f(x) = x^2 + 3x - 5, \quad c) f(x) = x^2 + 2x + 3, \quad d) f(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

$$e) f(x) = 2x^2 - 5x + 3, \quad f) f(x) = x^2 - x - 1, \quad g) f(x) = 2 + 3x - 2x^2, \quad h) f(x) = x^2 + 2x + 2,$$

$$i) f(x) = x^2 + 2x + 5, \quad j) f(x) = 3x^2 - x + 1, \quad k) f(x) = 2 + 3x - 2x^2, \quad l) f(x) = x^2 - 4x + 5$$

(ii) Calculați diferențialele $df(x)$ ale următoarelor funcții de o variabilă:

$$a) f(x) = \sin^2 x, \quad b) f(x) = \ln x, \quad c) f(x) = \ln^2 x, \quad d) f(x) = x^3, \quad e) f(x) = \sqrt{x},$$

$$f) f(x) = \cos x, \quad g) f(x) = e^{3x}, \quad h) f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad i) f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad j) f(x) = \operatorname{tg} x.$$

10. Folosind a doua metodă de schimbare de variabilă să se calculeze integralele:

$$a) \int \cos^2 \sqrt{x} dx, \quad b) \int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx, \quad c) \int \sqrt{a^2-x^2} dx, \quad d) \int \sqrt{x^2+a^2} dx$$

Rezolvare:

Aplic a doua metodă de schimbare de variabilă: Dacă facem schimbarea de variabilă

$$x = u(y)$$

atunci

$$dx = u'(y) dy, \quad y = u^{-1}(x)$$

unde u^{-1} este inversa funcției u , și integrala devine

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(y)) u'(y) dy$$

a) Vom nota $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$ deci $dx = 2y dy$ și integrala devine

$$\int \cos^2 \sqrt{x} dx = \int \cos^2 y 2y dy = 2 \int y \cos^2 y dy$$

Pentru calculul acestei integrale vezi metoda de integrare prin părți. La sfârșit se va înlocui $y = \sqrt{x}$.

b) Avem **substituțiile trigonometrice:**

1. Dacă integrala conține termenul $\sqrt{a^2 - x^2}$ atunci este utilă substituția $x = a \sin y$ sau $x = a \cos y$

2. Dacă integrala conține termenul $\sqrt{x^2 - a^2}$ atunci este utilă substituția $x = a \operatorname{ch} y$

3. Dacă integrala conține termenul $\sqrt{x^2 + a^2}$ atunci este utilă substituția $x = a \operatorname{sh} y$

unde

$$\operatorname{sh}x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch}x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

și evident avem

$$\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1, \quad (\operatorname{sh}x)' = \operatorname{ch}x, \quad (\operatorname{ch}x)' = \operatorname{sh}x.$$

În cazul nostru este utilă substituția $x = 2 \sin y$ (de asemenea e utilă și substituția $x = 2 \cos y$). Deci

$$dx = (2 \sin y)' dy = 2 \cos y dy$$

și

$$x = 2 \sin y \Leftrightarrow y = \arcsin x/2.$$

Limitele de integrare devin: dacă $x = 0$ atunci $y = \arcsin 0 = 0$ și dacă $x = 1$ atunci $y = \arcsin 1/2 = \pi/6$. Atunci integrala devine

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\pi/6} 4 \sin^2 y \sqrt{4-4 \sin^2 y} 2 \cos y dy = \\ &= 16 \int_0^{\pi/6} \sin^2 y \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y dy = 16 \int_0^{\pi/6} \sin^2 y \cos^2 y dy \end{aligned}$$

Avem formulele

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$\sin(2y) = 2 \sin y \cos y \Rightarrow \sin y \cos y = \frac{\sin 2y}{2}$$

$$\cos(2y) = 2 \cos^2 y - 1 \Rightarrow \cos^2 y = \frac{1+\cos 2y}{2}$$

$$\cos(2y) = 1 - 2 \sin^2 y \Rightarrow \sin^2 y = \frac{1-\cos 2y}{2}$$

Deci

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx &= 16 \int_0^{\pi/6} (\sin y \cos y)^2 dy = 4 \int_0^{\pi/6} \sin^2 2y dy = \\ &= 4 \int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos 4y}{2} dy = 2 \int_0^{\pi/6} dy - 2 \int_0^{\pi/6} \cos 4y dy = \left(2y - 2 \frac{\sin 4y}{4} \right) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

c) Temă.

d) În acest caz este utilă substituția $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Deci

$$dx = \left(a \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)' dy = a \frac{e^y + e^{-y}}{2} dy$$

și

$$x^2 + a^2 = \left(a \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2 + a^2 = a^2 \left(\frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4} + 1 \right) = a^2 \frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4} = \left(a \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)^2.$$

Deci

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \int a \frac{e^y + e^{-y}}{2} a \frac{e^y + e^{-y}}{2} dy = \frac{a^2}{4} \int (e^y + e^{-y})^2 dy = \frac{a^2}{4} \int (e^{2y} + e^{-2y} + 2) dy \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\frac{e^{2y}}{2} + \frac{e^{-2y}}{-2} + 2y \right) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

11. Să se calculeze următoarele integrale din funcții ce conțin un trinom de gradul al doilea:

$$\begin{aligned} a) \int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7}, \quad b) \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}, \quad c) \int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx, \quad d) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \\ e) \int \sqrt{a + x^2} dx, \quad f) \int \sqrt{1 - 2x - x^2} dx, \quad g) \int \frac{dx}{3x^2 - x + 1}, \quad h) \int \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 5} dx. \end{aligned}$$

12. (Temă) Să se calculeze următoarele integrale din funcții raționale:

$$\begin{aligned} a) \int \frac{1}{x - a} dx, \quad b) \int \frac{1}{(x - a)^\alpha} dx, \alpha \neq 1, \quad c) \int \frac{1}{ax - b} dx, \quad d) \int \frac{1}{(ax + b)^\alpha} dx, \\ e) \int \frac{1}{2x^2 - 4x + 8} dx, \quad f) \int \frac{1}{2x^2 - 5x + 3} dx, \quad g) \int \frac{4x - 5}{x^2 - 2x + 10} dx, \\ h) \int \frac{-x + 5}{x^2 + x - 2} dx, \quad i) \int \frac{x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2} \right) dx, \\ j) \int \frac{3x^2 + x - 4}{x^3 + 5x^2 + 9x + 5} dx = \int \left(\frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 + 4x + 5} \right) dx. \end{aligned}$$

13. Să se calculeze următoarele integrale din funcții raționale:

$$a) \int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx, \quad b) \int \frac{1}{x^3 + 1} dx, \quad c) \int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} dx, \quad d) \int \frac{1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} dx$$

Rezolvare:

Dacă integrala este dintr-o funcție rațională atunci:

Pasul I: **dacă gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului atunci mai întâi se împart polinoamele până se ajunge ca gradul numărătorului să fie mai mic strict decât gradul numitorului.**

Pasul II: **apoi se vor căuta divizorii numitorului și se va descompune fracția în fracții simple.**

a)

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{x^4 - 1} &= \frac{x^4 - 1 + 1}{x^4 - 1} = \frac{x^4 - 1}{x^4 - 1} + \frac{1}{x^4 - 1} = 1 + \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \\ &= 1 + \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = 1 + \frac{1}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Descompunerea în fracții simple înseamnă să căutăm constantele a, b, c, d a.î. să aibă loc

$$\frac{1}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

Aducând la același numitor obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} &= \frac{a(x + 1)(x^2 + 1) + b(x - 1)(x^2 + 1) + (cx + d)(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 &= a(x + 1)(x^2 + 1) + b(x - 1)(x^2 + 1) + (cx + d)(x - 1)(x + 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 &= (a + b + c)x^3 + (a - b + d)x^2 + (a + b - c)x + (a - b - d) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + d = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a - b - d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul obținem $a = 1/4, b = -1/4, c = 0, d = -1/2$ deci are loc

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} \right)$$

adică

$$\int \frac{x^4}{x^4-1} dx = \int dx + \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx = x + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= x + \frac{1}{4} (\ln(x-1) - \ln(x+1) - 2\arctg x) + C$$

b)

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = a(x^2-x+1) + (x+1)(bx+c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = (a+b)x^2 + (-a+b+c)x + (a+c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=0 \\ a+c=1 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obținem $a = 1/3, b = -1/3, c = 2/3$ deci are loc

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-1/3x+2/3}{x^2-x+1}$$

adică

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx = \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) dx = \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx$$

Acum avem $\int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \int \frac{x}{x^2-x+1} dx - \int \frac{2}{x^2-x+1} dx$. Pentru acestea două se vor face calcule standard. Mai întâi, pentru prima, se formează la numărător derivata numitorului adică

$$\int \frac{x}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-x+1} dx = \int \frac{1 \cdot 2x - 1 + 1}{2x^2-x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-1/2)^2 + 3/4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}/2} \arctg \frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} + C$$

c) Temă: $\frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ unde a, b, c trebuie determinați...

d) Temă: Rădăcinile întregi ale lui $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ se găsesc printre divizorii termenului liber...

14. (Temă) Să se calculeze următoarele integrale din funcții raționale:

$$a) \int \frac{1}{(x^3 - 1)^2} dx, \quad b) \int \frac{1}{(x - 1)^2 (x + 1)^3} dx, \quad c) \int \frac{x dx}{(x - 1)(x + 1)^2}, \quad d) \int \frac{dx}{x(x + 1)^2},$$

$$e) \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)}, \quad f) \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x - 3)^2 (x + 1)^2} dx, \quad g) \int \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$$

15. Să se calculeze următoarele integrale din funcții iraționale:

$$a) \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx, \quad b) \int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx, \quad c) \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx, \quad d) \int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx$$

Rezolvare:

Fie integralele de forma $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots\right) dx$ unde R este o expresie rațională. Aceste integrale se reduc la integrale raționale cu ajutorul substituției

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$$

unde s este cel mai mic multiplu comun al numitorilor q_1, q_2, \dots

a) Apare termenul $\sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2}$ deci este utilă substituția

$$x+1 = t^2 \Leftrightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt$$

deci integrala devine

$$\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{t+2}{(t^2)^2 - t} 2t dt =$$

$$= 2 \int \frac{t^2 + 2t}{t^4 - t} dt = 2 \int \frac{t+2}{t^3 - 1} dt = 2 \int \frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)} dt$$

și am ajuns la integrala dintr-o funcție rațională. Descompunem în fracții simple

$$\frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1}$$

cu a, b, c determinați aducând la același numitor și identificând coeficienții. Obținem $a = 1, b = -1, c = -1$ și integrala se reduce la integrale simple.

$$I = 2 \int \frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)} dt = 2 \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+t+1} \right) dt =$$

$$= 2 \left(\ln(t-1) - \int \frac{t+1}{t^2+t+1} dt \right)$$

Mai întâi

$$\int \frac{t+1}{t^2+t+1} dt = \int \frac{t}{t^2+t+1} dt + \int \frac{1}{t^2+t+1} dt$$

iar acestea se fac prin calcule standard. La sfârșit se va înlocui $t = (x+1)^{1/2}$.

b) Temă: Apare $\sqrt{x} = x^{1/2}$ și $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ deci se va face substituția $x = t^6$ unde 6 este cel mai mic multiplu comun al numitorilor 2 și 3.

c), d) Temă.

16. Să se calculeze următoarele integrale din funcții iraționale (**integrale binome**):

$$a) \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2 dx, \quad b) \int \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^3}{\sqrt[4]{x^5}} dx, \quad c) \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad d) \int \frac{1}{x \sqrt[3]{1 + x^5}} dx,$$

$$e) \int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}} dx, \quad f) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}, \quad g) \int \frac{dx}{x^2 (2 + x^3)^{5/3}}$$

Rezolvare:

Fie integralele de forma $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ unde $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Aceste integrale se reduc la integrale raționale doar în următoarele trei situații (cu ajutorul substituțiilor respective):

i) Dacă p este număr întreg.

ii) Dacă $\frac{m+1}{n}$ este număr întreg și în acest caz este utilă substituția $a + bx^n = t^s$ unde s este numitorul lui p .

iii) Dacă $\frac{m+1}{n} + p$ este număr întreg și în acest caz este utilă substituția $\frac{a + bx^n}{x^n} = t^s$ unde s este numitorul lui p .

a) $\sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2 = x^{1/2} (1 + x^{1/3})^2$ deci $m = 1/2, n = 1/3, p = 2$ deci suntem în prima situație și, evident, merge substituția $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$ deci integrala devine

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2 dx &= \int (t^6)^{1/2} (1 + (t^6)^{1/3})^2 6t^5 dt = \\ &= \int (t^6)^{1/2} (1 + (t^6)^{1/3})^2 6t^5 dt = \int t^3 (1 + t^2)^2 6t^5 dt = \\ &= \int t^3 (1 + t^2)^2 6t^5 dt \end{aligned}$$

și obținem integrala dintr-o funcție polinomială...

b) Temă: $\frac{(1 + \sqrt[3]{x})^3}{\sqrt[4]{x^5}} = x^{-5/4} (1 + x^{1/3})^3$ deci $m = -5/4, n = 1/3, p = 3$ deci suntem în prima situație și merge substituția $x = \dots \Rightarrow dx = \dots dt$ deci integrala devine...

c) $\frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} (1 + x^{1/4})^{1/3}$ deci $m = -1/2, n = 1/4, p = 1/3$ și

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-1/2 + 1}{1/4} = 2 \in \mathbb{Z}$$

deci suntem în a doua situație și merge substituția

$$1 + x^{1/4} = t^3 \Leftrightarrow x^{1/4} = t^3 - 1 \Leftrightarrow x = (t^3 - 1)^4 \Rightarrow dx = 4(t^3 - 1)^3 3t^2 dt$$

deci integrala devine

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int x^{-1/2} (1+x^{1/4})^{1/3} dx = \\ &= \int ((t^3-1)^4)^{-1/2} (t^3)^{1/3} 12t^2 (t^3-1)^3 dt = \\ &= 12 \int (t^3-1)^{-2} t t^2 (t^3-1)^3 dt = 12 \int (t^3-1) t^3 dt = \\ &= 12 \int (t^6 - t^3) dt = 12 (t^7/7 - t^4/4) + C \end{aligned}$$

și acum se înlocuiește t cu $(1+x^{1/4})^{1/3}$.

d), e) Temă, suntem în situația *ii*).

f), g) Temă, suntem în situația *iii*).

17. Să se calculeze următoarele integrale din funcții trigonometrice:

a) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$, b) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$, c) $\int \frac{1}{\sin x + \operatorname{tg} x} dx$, d) $\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx$,

e) $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$, f) $\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$

Rezolvare:

Fie integralele de forma $\int R(\sin x, \cos x) dx$ unde $R(a, b)$ este o expresie rațională în a și b . Aceste integrale se reduc la integrale raționale cu ajutorul următoarelor substituții:

i) Dacă $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ atunci este utilă substituția $\cos x = t$.

ii) Dacă $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ atunci este utilă substituția $\sin x = t$.

iii) Dacă $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ atunci este utilă substituția $\operatorname{tg} x = t$.

iv) Substituția universală $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

În cazul integralelor din funcții trigonometrice sunt utile următoarele formule trigonometrice

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{unde } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \text{unde } t = \operatorname{tg} x.$$

a) Avem că $R(\sin x, \cos x) = \sin^2 x \cos^3 x$ deci

$$R(\sin x, -\cos x) = \sin^2 x (-\cos x)^3 = -\sin^2 x \cos^3 x = -R(\sin x, \cos x)$$

adică suntem în cazul *ii*). Este utilă substituția $\sin x = t$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \\ &= \int \sin^2 x \cos^2 x (\sin x)' dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) \end{aligned}$$

deci $\sin x = t \Rightarrow dt = d(\sin x) = (\sin x)' dx$ adică

$$I = \int t^2 (1 - t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt = t^3/3 - t^5/5$$

unde t trebuie înlocuit cu $\sin x$

b) Temă: $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$ este impară în $\sin x$, deci cazul i)

c) $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x + \operatorname{tg} x}$. În acest caz vom folosi substituția universală (în cazul integralelor trigonometrice):

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Leftrightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Deci, folosind și formulele trigonometrice respective, are loc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x + \operatorname{tg} x} dx &= \int \frac{1}{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}} \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2t}{1-t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{2t \left(\frac{1-t^2+1+t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} \right)} \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int \frac{1}{t \frac{2}{1-t^2}} dt = \int \frac{1-t^2}{2t} dt = \int \frac{1}{2t} dt - \int \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{4} t^2 + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^2 + C \end{aligned}$$

d) e) Temă: suntem în cazul iii).

f) Temă: suntem în cazul iv).

18. Să se calculeze următoarele integrale folosind metoda de integrare prin părți:

a) $\int \operatorname{arctg} x dx$, b) $\int x \operatorname{arctg} x dx$, c) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$

d) $\int \arcsin x dx$, e) $\int x \arcsin x dx$, f) $\int \arcsin^2 x dx$.

19. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$, b) $\int \frac{xdx}{x^2 + a^2}$, c) $\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^2}$, d) $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$,

e) $\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^3}$, f) $\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^3} dx$, g) $\int \frac{1}{\sin^n x} dx$, $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Rezolvare:

d)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \\
&= \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^2} dx - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx - \frac{1}{a^2} \int x \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \\
&= \frac{1}{a^2} \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \frac{-1}{2} \int x \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right)' dx = \frac{1}{a^3} \arctg \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \left(x \frac{1}{x^2 + a^2} - \int 1 \frac{1}{x^2 + a^2} dx \right) = \\
&= \frac{1}{a^3} \arctg \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \left(x \frac{1}{x^2 + a^2} - \int 1 \frac{1}{x^2 + a^2} dx \right) = \frac{1}{a^3} \arctg \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \left(x \frac{1}{x^2 + a^2} - \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} \right) + C.
\end{aligned}$$

g) Pentru $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{1 - \cos^2 x} (-\cos x)' dx = (\text{subst. } \cos x = t) = \int \frac{1}{t^2 - 1} dt \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C.
\end{aligned}$$

sau, folosind substituția universală

$$\text{tg} \frac{x}{2} = t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \arctg t \Leftrightarrow x = 2 \arctg t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

obținem

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

Pentru $n = 2$, folosind tabelul obținem:

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{ctg} x + C$$

sau, folosind substituția universală, obținem

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2} \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{t^2} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{t} + t \right) + C = \frac{1}{2} \frac{t^2 - 1}{t} + C \\
&= \frac{1}{2} \frac{(\text{tg} \frac{x}{2})^2 - 1}{\text{tg} \frac{x}{2}} + C = \dots = -\text{ctg} x + C.
\end{aligned}$$

Pentru $n = 3$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1}{(1 - \cos^2 x)^2} (-\cos x)' dx = (\text{subst. } \cos x = t) = \int \frac{-1}{(1-t^2)^2} dt \\
&= \dots = - \int \left(\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} + \frac{d}{(1+t)^2} \right) dt = \dots
\end{aligned}$$

sau, folosind substituția universală, obținem

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^3} \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt = \dots$$

20. (Temă) Să se calculeze următoarele integrale:

$$a) \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx, \quad b) \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx, \quad c) \int \frac{1}{x^2+x+1} dx,$$

$$d) \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx, \quad e) \int \frac{x}{(x^2+x+1)^2} dx.$$

21. Calculați aria figurii plane cuprinsă între curbele (date explicit) $y^2 = 2px$ și $x^2 = 2py$.
Particularizați pentru $p = 1/2$.

Rezolvare: Dacă suntem în cazul în care curbele care dau domeniul sunt date explicit iar domeniul este deci $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ atunci aria domeniului D este dată de

$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

22. Calculați volumul sferei. Calculați volumul elipsoidului (acestea se obțin prin rotația unui semicerc și respectiv a unei semielipse în jurul axei Ox).

Rezolvare: Dacă volumul $V \subset \mathbb{R}^3$ este obținut prin rotația mulțimii $F = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ atunci volumul este dat de

$$\mathcal{V}(F) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

În cazul nostru sfera este dată de rotația domeniului (semidiscului)

$$F = \{(x, y) : -r \leq x \leq r, 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$$

respectiv dat de rotația domeniului (semielipsei)

$$F = \{(x, y) : -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\}.$$

23. Determinați volumul corpului de rotație dat de $f : [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arcsin x$

24. Determinați lungimea graficului funcției $f : [3, 8] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

Rezolvare: Dacă suntem în cazul în care curba este dată explicit de $(C) : y = f(x), a \leq x \leq b$ atunci lungimea curbei este dată de

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

25. Determinați lungimea graficului funcției $f : [\pi/3, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\cos x)$.

26. Determinați lungimea curbei dată parametric $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0, \pi/2]$

Rezolvare: Dacă suntem în cazul în care curba este dată curba este în plan și este dată parametric de $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $a \leq t \leq b$ atunci lungimea curbei este dată de

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

27. Determinați lungimea curbei din spațiu dată parametric $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = ct \end{cases}$, $t \in [0, \pi]$.

Rezolvare: În cazul în care $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $a \leq t \leq b$ (adică în cazul în care curba este dată curba este în spațiu și este dată parametric) lungimea curbei este dată de

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

28. Determinați aria discului.

29. Determinați lungimea cercului.