

Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie și Ingineria Mediului

Analiza Matematică II, Semestrul II

Conf. dr. Lucian MATICIUC

SEMINAR 6 – 7

Capitolul III. Integrale curbilinii

1. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$I = \int_{(C)} xy ds,$$

unde (C) este sfertul din primul cadran al elipsei dată parametric $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$

2. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$I = \int_{(C)} y ds,$$

unde (C) este segmentul parabolei $y^2 = 2px$ de la originea coordonatelor până la $A(a, b)$, $a > 0$.

3. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$I = \int_{(C)} xyz ds,$$

unde (C) este curba din spațiu $\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, \\ z = \frac{1}{2}t^2, \end{cases} t \in [0, 1].$

4. **(Temă)** Să se calculeze următoarea integrală curbilinie de primul tip

$$I = \int_{(C)} ye^{-x} ds$$

unde $(C) : x(t) = \ln(1 + t^2), y(t) = 2 \arctg t - t + 3, t \in [0, 1].$

5. **(Temă)** Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$I = \int_{(C)} xy ds,$$

unde (C) este sfertul din primul cadran al elipsei dată explicit $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

6. **(Temă)** Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$I = \int_{(C)} xy ds,$$

unde $(C) : y = x^2, x \in [-1, 1]$.

7. **(Temă)** Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$I = \int_{(C)} y^5 ds,$$

unde $(C) : x = \frac{y^4}{4}, y \in [0, 2]$.

8. **(Temă)** Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$I = \int_{(C)} (x + y + z) ds,$$

unde $(C) : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}, t \in [0, \pi/2]$.

9. **(Temă)** Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$I = \int_{(C)} (x^2 + y^2) \ln z ds,$$

unde $(C) : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}, t \in [0, 1]$.

10. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$I = \int_{(\widehat{OA})} (x^2 - y^2) dx,$$

unde (\widehat{OA}) este segmentul parabolei $y = x^2$ cuprins între $x = 0$ și $x = 2$.

11. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$I = \int_{(\widehat{OA})} 2xydx + x^2dy,$$

unde (\widehat{OA}) este

- a) parabola $y^2 = x$ care unește $O(0, 0)$ cu $A(1, 1)$;
- b) (Temă) dreapta $y = x$ care unește $O(0, 0)$ cu $A(1, 1)$;
- c) (Temă) curba $y = x^3$ care unește $O(0, 0)$ cu $A(1, 1)$.

12. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$I = \int_{(\widehat{AB})} x^2dx + 2xydy,$$

unde (\widehat{AB}) este jumătatea superioară a elipsei parcursă în sens trigonometric (se vor folosi ecuațiile parametrice ale elipsei).

13. (Temă) Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$I = \int_{(\widehat{AB})} \sqrt{1-x^2}dx + xdy,$$

unde (\widehat{AB}) este curba $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ parcursă în sens trigonometric (se vor folosi ecuațiile parametrice ale elipsei).

14. (Temă) Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$I = \int_{(\widehat{AB})} xdx + xydy + xyzdz,$$

$$\text{unde } (\widehat{AB}) \text{ este curba } \begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t}, \\ z = \sqrt{2}t, \end{cases}, t \in [0, 1].$$

15. Calculați următoarea integrală curbilinie constatând în prealabil că este independentă de drum:

$$I = \int_{(\widehat{AB})} \frac{xdy - ydx}{(x - y)^2},$$

unde (\widehat{AB}) este arcul de curbă ce unește punctul $A(0, -1)$ cu $B(1, 0)$.

Indicație:

În cazul nostru $P(x, y) = \frac{-y}{(x-y)^2}$ și $Q(x, y) = \frac{x}{(x-y)^2}$. Se verifică mai întâi condițiile suficiente și apoi se rezolvă sistemul care definește primitiva F (integrându-se una din ecuații). După ce s-a determinat primitiva F se aplică formula lui Leibniz-Newton și obțin că $I = F(1, 0) - F(0, -1)$.

16. **(Temă)** Calculați următoarea integrală curbilinie constatând în prealabil că este independentă de drum:

$$I = \int_{(\widehat{AB})} \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

unde (\widehat{AB}) este arcul de curbă ce unește punctul $A(1, 2)$ cu $B(2, 1)$.

Indicație:

În cazul nostru $P(x, y) = \frac{1}{y}$ și $Q(x, y) = \frac{-x}{y^2}$. Se verifică mai întâi condițiile suficiente și apoi se rezolvă sistemul care definește primitiva F (integrându-se una din ecuații). După ce s-a determinat primitiva F se aplică formula lui Leibniz-Newton și obțin că $I = F(2, 1) - F(1, 2)$.

17. Calculați următoarea integrală curbilinie constatând în prealabil că este independentă de drum:

$$I = \int_{(\widehat{AB})} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

unde (\widehat{AB}) este arcul de curbă ce unește punctul $A(1, 1, 1)$ cu $B(3, 4, 5)$

Indicație:

În cazul nostru $P(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $Q(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $R(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Se verifică mai întâi condițiile suficiente și apoi se rezolvă sistemul care definește primitiva F (integrându-se una din ecuații). După ce s-a determinat primitiva F se aplică formula lui Leibniz-Newton și obțin că $I = F(3, 4, 5) - F(1, 1, 1)$.

18. Să se studieze dacă următoarele forme diferențiale sunt exacte și în caz afirmativ să se calculeze o primitivă a lor:

a) $(4x^3y^3 - 3y^2 + 5) dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4) dy$ (făcut la curs).

b) $z \left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x^2+z^2} \right) dx + \frac{z}{xy^2} dy + \left(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy} \right) dz$

19. Să se determine constanta ciclică a următoarei integrale curbilinii în raport cu punctul singular $(0, 0)$

$$I = \int \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

20. Determinați aria domeniului mărginit de curba

$$(C) : \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(aria $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{(C)} xdy - ydx$).

21. (Temă) Să se calculeze aria elipsei $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$.