Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului
Analiza Matematică II, Semestrul II
Conf. dr. Lucian MATICIUC

SEMINAR 8 – 9

Capitolul IV. Integrala dublă

1. Să se calculeze următoarea integrală dublă pe un domeniu dreptunghiular
$$I = \iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy$$
unde D este dreptunghiul $D = [2,5] \times [0,1]$

2. (Temă) Să se calculeze următoarea integrală dublă pe un domeniu dreptunghiular
$$I = \iint\limits_D \left(5xy^2 - 2x^3\right) dxdy$$
unde D este dreptunghiul $D = [1,3] \times [2,5]$

3. Să se calculeze următoarea integrală dublă
$$I = \iint\limits_D y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dxdy$$
unde D este discul $x^2 + y^2 \leq R^2$

4. (*făcută la curs*) Să se calculeze următoarea integrală dublă
$$I = \iint\limits_D \left(x^2 + y\right) dxdy$$
unde D este domeniul mărginit de parabolele $y = x^2$ şi $y^2 = x$

5. (Temă) Să se calculeze următoarea integrală dublă
$$I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$$
unde D este domeniul mărginit de curbele $x = 2, y = x$ şi $xy = 1$

6. Transformaţi următoarea integrală curbilinie (pe o curbă închisă) folosind fomula lui Green
$$I = \oint_{(C)} \sqrt{x^2 + y^2}dx + y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right)dy$$

   Indicaţie:

   Formula lui Green: dacă curba închisă (C) mărgineşte domeniul D atunci are loc
$$I = \int_{(C)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

7. (Temă/*desenul a fost făcut la curs*) Aplicaţi formula lui Green pentru calculul integralei curbilinii
$$I = \oint_{(C)} 2\left(x^2 + y^2\right)dx + (x+y)^2\,dy$$
   unde (C) este triunghiul dat de intersecţia dreptelor $x = 1, y = x$ şi $y = 4 - x$

8. Calculaţi următoarea integrală dublă schimbând convenabil ordinea de integrare
$$I = \iint\limits_D \frac{y}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^{3/2}}dxdy$$
   unde D este dreptunghiul $D = [0,1] \times [0,1]$

9. Calculaţi următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă
$$I = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy$$
   unde D este domeniul din primul cadran limitat de $x^2 + y^2 = a^2, y = x\sqrt{3}$ şi $x = y\sqrt{3}$

10. Calculaţi următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă
$$I = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2}dxdy$$
   unde D este domeniul dat de $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4\pi^2 \\ x^2 + y^2 \ge \pi^2 \end{cases}$

11. Calculaţi aria domeniului D din primul cadran mărginit de curbele $\begin{cases} xy = p \\ xy = q \end{cases}$ şi $\begin{cases} y = ax \\ y = bx \end{cases}$, cu $0 < p < q$, $0 < a < b$.

12. Calculaţi aria domeniului D mărginit de curbele $\begin{cases} y^2 = px \\ y^2 = qx \end{cases}$ şi $\begin{cases} x^2 = ay \\ x^2 = by \end{cases}$, cu $0 < p < q$, $0 < a < b$.

13. Să se găsească volumul unui corp mărginit de planul XOY şi de planele $x = 0, x = a$ şi $y = 0, y = b$ şi superior de suprafaţa $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$

14. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze integrala

$$I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}$$

unde D este domeniul: $x^2 + y^2 \leq 2y$

Indicaţie: Observ mai întâi că D este interiorul cercului

$$x^2 + \left(y - 1\right)^2 = 1.$$

Se trece la coordonate polare (ρ, θ) şi, din inegalitatea care dă pe D, vom obţine noul domeniu $\Delta : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 2\sin\theta \end{cases}$. Conform schimbării de variabilă şi a reducerii vom obţine că

$$I = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + 4\sin^2\theta} d\theta$$

care se va rezolva cu substituţia

$$\text{tg}\theta = t$$

şi cu formulele trigonometrice

$$\sin\theta = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\ , \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$

15. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze integrala

$$I = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

unde D este domeniul: $x^2 + y^2 \geq x$ şi $x^2 + y^2 \leq 2x$

Indicaţie: Observ mai întâi că D este dat de exteriorul cercului

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

şi de interiorul cercului $(x-1)^2+y^2=1$. Se trece la coordonate polare (r,θ) şi, din inegalitatea care dă pe D, vom obţine noul domeniu $\Delta : \begin{cases} -\pi/2 \le \theta \le \pi/2 \\ \cos\theta \le \rho \le 2\cos\theta \end{cases}$. Conform schimbării de variabilă şi a reducerii vom obţine că

$$I = \frac{15}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta$$

care se va rezolva cu formula trigonometrică

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

16. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze integrala

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\left(1+b^2x^2+a^2y^2\right)^2}$$

unde D este domeniul: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$

Indicaţie: Observ mai întâi că D este dat de interiorul elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Se trece la coordonate polare generalizate (r,θ) date de ecuaţiile $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$ şi, din inegalitatea care dă pe D, vom obţine noul domeniu $\Delta : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$. Conform schimbării de variabilă şi a reducerii vom obţine că

$$I = 2\pi\int_0^1 \frac{ab\rho}{\left(1+a^2b^2\rho^2\right)^2} d\rho$$

17. (Temă) Calculaţi

$$I = \iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dxdy$$

unde D este sfertul din primul cadran al discului $x^2+y^2 \le 1$

18. (Temă) Calculaţi

$$I = \iint\limits_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

unde D este sfertul din primul cadran al interiorului elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$

19. Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate ale plăcii $D = \{x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ dacă densitatea este $\mu(x, y) = xy$

    Indicaţie: Masa m a plăcii D este dată de

$$m = \iint_D \mu(x, y)\, dxdy$$

    iar coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G)$ sunt date de

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m}\iint_D x\mu(x, y)\, dxdy \\ y_G = \frac{1}{m}\iint_D y\mu(x, y)\, dxdy \end{cases}.$$

20. Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate ale plăcii $D = \left\{x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \geq ax, y \geq 0\right\}$ dacă densitatea este $\mu(x, y) = 1$

    Indicaţie: Observ că D este dat de interiorul cercului $x^2 + y^2 = a^2$ şi de exteriorul cercului $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Se trece la coordonate polare (ρ, θ) şi, din inegalitatea care dă pe D, vom obţine noul domeniu $\Delta : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ a\cos\theta \leq \rho \leq a \end{cases}$.

21. Să se calculeze volumul corpului mărginit de planele $x = 0, y = 0, z = 0$, de cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$ şi superior de către paraboloidul hiperbolic $5z = xy$

    Indicaţie: Volumul

$$\mathcal{V} = \iint_D f(x, y)\, dxdy$$

    unde $z = f(x, y)$ este ecuaţia suprafeţei ce mărgineşte superior volumul, iar $(x, y) \in D$ unde D este proiecţia suprafeţei pe planul XOY. În cazul nostru D este sfertul de disc $x^2 + y^2 \leq R^2, x, y \geq 0$

22. Să se calculeze următoarea integrală dublă pe un domeniu dreptunghiular

$$I = \iint_D \cos(x + y)\, dxdy,$$

    unde D este dreptunghiul $D = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

23. Să se calculeze următoarea integrală dublă pe un domeniu dreptunghiular

$$I = \iint_D x\cos(xy)\,dxdy,$$

unde D este dreptunghiul $D = [1,2]\times[0,\pi]$.

24. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$I = \iint_D (x+2y)\,dxdy,$$

unde D este domeniul mărginit de curbele $y = 2x$, $y = 3 - x^2$ şi $x = 0$.

25. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$I = \iint_D (2x+5y)\,dxdy,$$

unde D este domeniul mărginit de curbele $y = 0$, $y = 4$, $x = 4$ şi $y = x^2$.

26. Să se calculeze volumul cilindroidului

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 25,\ y\le \frac{3}{4}x,\ z\le xy\right\}$$

(este corpul mărginit superior de către paraboloidul hiperbolic $z = xy$ şi cu proiecţia pe planul $x0y$ dată de porţiunea de disc $x^2+y^2\le 25,\ y\le\frac{3}{4}x$).

27. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$I = \iint_D (1+x)\,dxdy,$$

unde

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge |x|\,,\ y\le \frac{1}{2}x+2\right\}.$$

28. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$I = \iint_D \frac{y}{1+x}\,dxdy,$$

unde D este domeniul mărginit de curbele $x^2+y^2 = 25$ şi $x^2+y^2-\frac{25}{4}x = 0$.

29. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy,$$

unde

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{3}x,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4 \right\}.$$