Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului
Analiza Matematică II, Semestrul II
Conf. dr. Lucian MATICIUC

SEMINAR 10 – 11

Capitolul V. Integrale de suprafaţă

Teoria:

1. **Teorema 1. (de reducere a integralei de suprafaţă de specia I)** Integrala de suprafaţă de specia I se notează cu $\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma$, unde $d\sigma$ este **elementul de arie al suprafeţei.**

   A) Dacă suprafaţa S este dată prin ecuaţia explicită $z = z(x,y)$, cu $(x,y) \in D$ unde D este proiecţia suprafeţei S pe planul XOY. Atunci are loc reducerea integralei de suprafaţă:

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy$$

   unde

$$p = z'_x\,, \quad q = z'_y\,.$$

   B) Dacă suprafaţa S este dată prin ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$, $(u,v) \in \Delta$ (domeniu de variaţie pentru u şi v). Atunci are loc reducerea integralei de suprafaţă:

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_D f(x(u,v)\,,y(u,v)\,,z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$$

   unde

$$\begin{cases} E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2\,, \\ G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2\,, \\ F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v\,. \end{cases}$$

2. **Teorema 2. (de reducere a integralei de suprafaţă de specia II)** Integrala de suprafaţă de specia II se notează cu

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy$$

Are loc reducerea integralei de suprafaţă:

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma,$$

unde $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ sunt cosinuşii directori ai normalei (adică unghiurile α, β, γ sunt unghiurile făcute de normala la suprafaţa S cu axele Ox, Oy respectiv Oz).

Dacă suprafaţa este dată parametric atunci avem formulele

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ ,\ \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ ,\ \cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

unde A, B, C sunt determinanţii funcţionali definiţi de

$$A := \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = y'_u z'_v - y'_v z'_u\,, \quad B := \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = z'_u x'_v - z'_v x'_u\,, \quad C := \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = x'_u y'_v - x'_v y'_u\,.$$

Este utilă şi egalitatatea

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$$

Pe de altă parte elementul de suprafaţă are expresia

$$d\sigma = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, dudv = \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

deci are loc formula de calcul pentru integrala de suprafaţă de al doilea tip

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Înlocuind acum formulele de calcul pentru cosinuşii directori obţinem **teorema de reducere a integralei de suprafaţă de al doilea tip:**

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \pm\iint_D [P\cdot A + Q\cdot B + R\cdot C]\, dudv,$$

unde semnul $\pm$ corespunde celor două feţe ale suprafeţei.

3. **Observaţia 1.** La integrala de suprafaţă de specia II contează faţa suprafeţei (ceea ce va da orientarea normalei).

4. **Teorema 3. - Formula lui Stokes**

   Fie S o suprafaţă netedă mărginită de (curba) conturul γ. Fie funcţiile $P(x,y,z)\,, Q(x,y,z)\,, R(x,y,z)$ cu derivatele parţiale continue. Atunci are loc

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx$$

5. **Teorema 4.** Aria unei suprafeţe S este dată de

$$\mathcal{A}_S = \iint_S d\sigma$$

Aplicaţii:

1. Să se calculeze $\iint_S (x^2+y^2)\, d\sigma$, unde (S) este emisfera superioară $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \geq 0$.

   Indicaţie: Pentru a calcula această integrală folosim **ecuaţiile parametrice ale sferei**:

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\theta, \end{cases} \tag{1}$$

   unde $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Deoarece lucrăm pe emisfera superioară vom lua, evident, $\theta \in [0,\pi/2]$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Calculăm coeficienţii

$$\begin{aligned} E &= (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = (R\cos\theta\cos\varphi)^2 + (R\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-R\sin\theta)^2 = R^2 \\ G &= \left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2 + \left(z'_\varphi\right)^2 = (-R\sin\theta\sin\varphi)^2 + (R\sin\theta\cos\varphi)^2 + 0^2 = R^2\sin^2\theta \\ F &= x'_\theta \cdot x'_\varphi + y'_\theta \cdot y'_\varphi + z'_\theta \cdot z'_\varphi = \\ &= (R\cos\theta\cos\varphi)(-R\sin\theta\sin\varphi) + (R\cos\theta\sin\varphi)(R\sin\theta\cos\varphi) + 0\,(-R\sin\theta) = 0 \end{aligned}$$

   deci

$$d\sigma = \sqrt{R^4\sin^2\theta}\, d\theta d\varphi = R^2\sin\theta\; d\theta d\varphi \tag{2}$$

   Deci integrala de suprafaţă este egală cu o integrală dublă calculată pe dreptunghiul $D = [0,\pi/2]\times[0,2\pi]$

$$\begin{aligned} I_z &= \iint\limits_S \left(x^2+y^2\right) d\sigma = \iint\limits_D \left(R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\right) R^2\sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi} R^4\sin^3\theta d\varphi\right) d\theta = 2\pi R^4\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta = \text{calcul temă} \ldots \end{aligned}$$

   (am obţinut integrale de funcţii trigonometrice).

2. (Temă) Să se calculeze $\iint_S (x^2+y^2)\, d\sigma$, unde (S) este sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3. Să se calculeze $\iint_S (x^2+y^2)\, d\sigma$, unde S este emisfera $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ z \geq 0. \end{cases}$

   Indicaţie: Suprafaţa $x^2+y^2+z^2=a^2$ este o sferă cu centrul în origine de rază a. Putem folosi ecuaţiile parametrice ale sferei dar şi ecuaţiile explicite ale emisferei superioare.

   Ecuaţiile explicite ale celor două emisfere sunt

$$z = \pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

   În cazul nostru avem emisfera superioară ($z \geq 0$) care are deci ecuaţia explicită

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

Elementul de suprafaţă este dat în acest caz de

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy\,, \quad p = z'_x,\ q = z'_y$$

deci

$$p = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,, \quad q = \frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

şi

$$d\sigma = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy = \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

Integrala este atunci dată de următoarea integrala dublă calculată de discul D care este proiecţia suprafeţei S pe planul $x0y$, adică

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le a^2\right\}$$

$$I = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy = a\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a \frac{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}}\,\rho d\rho\right)d\theta =$$

$$= a\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^a\frac{\rho^3}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,d\rho = 2a\pi\int_0^a\rho^3\left(a^2-\rho^2\right)^{-1/2}d\rho = \text{calcul temă}\ldots$$

(am obţinut o integrală binomă).

4. Să se calculeze $\iint_S\left(x^2+y^2+z\right)d\sigma$, unde (S) este porţiunea din suprafaţa $z = 4 - x^2-y^2$ situată în semispaţiul superior.

Indicaţie: Suprafaţa $z = 4-x^2-y^2$ este un paraboloid cu axa de simetrie Oz, cu vârful (punct de maxim) în punctul $V(0,0,4)$. Avem deci ecuaţia explicită $z = 4-x^2-y^2$ cu $(x,y)\in D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\right\}$ (deoarece D este proiecţia suprafeţei S pe planul $x0y$, deci D este un disc de rază 2). Elementul de suprafaţă este dat în acest caz de

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy, \quad p = z'_x,\ q = z'_y$$

deci

$$p = -2x,\ q = -2y \Rightarrow d\sigma = \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

Integrala este atunci dată de următoarea integrala dublă calculată de discul D:

$$I = \iint\limits_D\left(x^2+y^2+4-x^2-y^2\right)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = 4\iint\limits_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy =$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\sqrt{1+4\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2\sin^2\theta}\,\rho d\rho\right)d\theta =$$

$$= 4\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^R\rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho\right) = \frac{8\pi}{8}\int_0^R\left(1+4\rho^2\right)^{1/2}\left(1+4\rho^2\right)'d\rho = \ldots\ldots$$

5. Să se calculeze $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$, unde S este dat de $\begin{cases} z^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2+y^2\right), \\ 0 \leq z \leq b. \end{cases}$

   Indicaţie: Suprafaţa $z^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2+y^2\right)$ este un con cu vârful în origine şi cu secţiunile prin plane paralele cu planul xOy, cercuri. Ecuaţia explicită este $z = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ şi tinând cont de $0 \leq z \leq b$ obţinem ecuaţia explicită

$$z = \frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ 0 \leq z \leq b$$

   Intesecţia conului cu planul $z = b$ este dată de

$$\begin{cases} z^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2+y^2\right) \\ z = b \end{cases}$$

   deci $\frac{b^2}{a^2}\left(x^2+y^2\right) = b^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = a^2$, adică un cerc de rază a. Proiecţia pe planul xOy este domeniul $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq a^2\right\}$. Calculăm

$$\begin{aligned} p &= \frac{b}{a}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}},\ q = \frac{b}{a}\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ d\sigma = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{b^2}{a^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}dxdy = \end{aligned}$$

   Integrala este atunci dată de următoarea integrala dublă calculată de discul D:

$$I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a \sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\ \rho d\rho\right)d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^a \rho^2 d\rho\right) = ...$$

6. (vezi Cursul) Să se calculeze aria sferei de rază R.

7. Să se calculeze aria laterală a suprafeţei cilindrice: $\begin{cases} x^2+y^2 = R^2, \\ z \in [0,l] \end{cases}$ (se vor folosi *coordonatele cilindrice* (vezi Curs) pentru a parametriza suprafaţa cilindrică).

8. Să se calculeze $\iint_S (x+y+z)^{-1}d\sigma$, unde S este suprafaţa plană $x+y+z = a$ decupată de planele de coordonate.

   Indicaţie: Suprafaţa este ΔABC unde $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$. Proiecţia pe planul xOy (de ecuaţie $z = 0$) este placa triunghiulară OAB. Ecuaţia explicită a lui (S) este $z = a-x-y$, $(x,y) \in \Delta OAB$.

   Avem

$$d\sigma = \sqrt{3}dxdy$$

   iar

$$I = \cdots = \frac{\sqrt{3}}{a}\int_0^a\left(\int_0^{a-x} dy\right)dx = \cdots = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

9. Să se calculeze $\iint_S yzdydz+xzdzdx+xydxdy$, unde S este suprafaţa plană $x+y+z=a$ decupată de planele de coordonate.

10. (Temă) Să se calculeze $\iint_S yzdydz + xzdzdx + xydxdy$, unde S este tetraedrul limitat de $x=0$, $y=0$, $z=0$ şi $x+y+z=a$.

11. Să se calculeze integrala de suprafaţă de tipul al doilea $I = \iint_S x^2dydz + y^2dxdz + zdxdy$, unde (S) este faţa exterioară a emisferei superioare de rază R cu centrul în origine.

    Suprafaţa (S) este dată de ecuaţiile parametrice (1). Trebuie calculaţi determinanţii funcţionali A, B, C

    $$A := \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = y'_\theta z'_\varphi - y'_\varphi z'_\theta\,, \quad B := \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = z'_\theta x'_\varphi - z'_\varphi x'_\theta\,, \quad C := \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = x'_\theta y'_\varphi - x'_\varphi y'_\theta$$

    Deci

    $$A = \ldots = R^2\sin^2\theta\cos\varphi\,, \quad B = \ldots = R^2\sin^2\theta\sin\varphi\,, \quad C = \ldots = R^2\sin\theta\cos\theta$$

    Integrala devine

    $$\begin{aligned} I &= \iint_S x^2dydz + y^2dxdz + zdxdy = \iint_S [(R\sin\theta\cos\varphi)^2\left(R^2\sin^2\theta\cos\varphi\right) + \\ &\quad + (R\sin\theta\sin\varphi)^2\left(R^2\sin^2\theta\sin\varphi\right) + (R\cos\theta)\left(R^2\sin\theta\cos\theta\right)]d\theta d\varphi \\ &= \ldots \text{Calcul temă} \ldots \end{aligned}$$

    (am obţinut integrale de funcţii trigonometrice).

12. Să se calculeze $I = \iint_S \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}d\sigma$, unde S este porţiunea din paraboloidul hiperbolic $z=xy$ obţinută pentru $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ (suprafaţa tăiată din paraboloidul hiperbolic $z=xy$ de către paralelipipedul $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$).

13. Să se determine aria suprafeţei tăiată din paraboloidul hiperbolic $z=xy$ de către cilindrul circular $x^2+y^2=R^2$.

    Avem $\mathcal{A}_S = \iint_S d\sigma$ iar elementul de suprafaţă este dat în acest caz de

    $$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy,\ p = z'_x,\ q = z'_y$$

    cu $z=xy$, $(x,y)\in D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le R^2\right\}$, deci

    $$p = y,\ q = x \Rightarrow d\sigma = \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

Aria este atunci dată de următoarea integrala dublă calculată de discul D:

$$\mathcal{A}_S = \iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \sqrt{1+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\,\rho d\rho\right)d\theta =$$
$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R \rho\sqrt{1+\rho^2}d\rho\right) = \frac{2\pi}{2}\int_0^R \left(1+\rho^2\right)^{1/2}\left(1+\rho^2\right)' d\rho =$$
$$= \pi\,\frac{\left(1+\rho^2\right)^{1/2+1}}{1/2+1}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R} = \frac{2\pi}{3}\left(\left(1+R^2\right)^{3/2}-1\right)$$

14. Să se determine aria suprafeţei de rotaţie $(S):\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = f(u), \end{cases}$ cu $(u,v)\in[u_1,u_2]\times[0,2\pi]$.

Avem $\mathcal{A}_S = \iint_S d\sigma$ iar elementul de arie al suprafeţei este dat în acest caz de

$$d\sigma = \sqrt{EG-F^2}dudv,$$

Calculăm

$$E = (x_u')^2+(y_u')^2+(z_u')^2 = (\cos v)^2+(\sin v)^2+(f'(u))^2 = 1+(f'(u))^2$$
$$G = (x_v')^2+(y_v')^2+(z_v')^2 = (-u\sin v)^2+(u\cos v)^2+0 = u^2$$
$$F = x_u'\cdot x_v'+y_u'\cdot y_v'+z_u'\cdot z_v' = -u\sin v\cos v+u\cos v\sin v+0\ f'(u) = 0$$

Aria este atunci dată de următoarea integrala dublă calculată de dreptunghiul $D = [u_1,u_2]\times[0,2\pi]$:

$$\mathcal{A}_S = \iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}dudv = \iint\limits_D \sqrt{u^2\left(1+(f'(u))^2\right)}dudv =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_{u_1}^{u_2}|u|\sqrt{1+(f'(u))^2}du\right)dv = 2\pi\int_{u_1}^{u_2}|u|\sqrt{1+(f'(u))^2}du$$

15. Să se calculeze integrala de suprafaţă de primul tip:

$$I = \iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}d\sigma,$$

unde (S) este elipsoidul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Folosim **ecuaţiile parametrice ale elipsoidului**

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi, \\ y = b\sin\theta\sin\varphi, \\ z = c\cos\theta, \end{cases}$$

unde $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Calculăm coeficienţii

$$E = (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = (a\cos\theta\cos\varphi)^2 + (b\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-c\sin\theta)^2$$
$$G = \left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2 + \left(z'_\varphi\right)^2 = (-a\sin\theta\sin\varphi)^2 + (b\sin\theta\cos\varphi)^2 + 0^2$$
$$F = x'_\theta \cdot x'_\varphi + y'_\theta \cdot y'_\varphi + z'_\theta \cdot z'_\varphi =$$
$$= (a\cos\theta\cos\varphi)(-a\sin\theta\sin\varphi) + (b\cos\theta\sin\varphi)(b\sin\theta\cos\varphi) + 0(-c\sin\theta)$$

deci

$$EG - F^2 = ...calcule... = b^2c^2\sin^4\theta\cos^2\varphi + a^2c^2\sin^4\theta\sin^2\varphi + a^2b^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,d\theta d\varphi =$$
$$= abc\sqrt{\tfrac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \tfrac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \tfrac{\cos^2\theta}{c^2}}\sin\theta\, d\theta d\varphi$$

Pe de altă parte

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = ...calcule... = \sqrt{\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}$$

Deci integrala de suprafaţă este egală cu o integrală dublă calculată pe dreptunghiul $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$

$$\iint\limits_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}d\sigma = \iint\limits_D abc\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right)\sin\theta d\theta d\varphi$$
$$= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} abc\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right)\sin\theta d\varphi\right)d\theta = \text{calcul temă....}$$

(am obţinut integrale de funcţii trigonometrice).

16. Să se găsească aria porţiunii de suprafaţă secţionată de cilindrul eliptic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ din paraboloidul eliptic $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$

17. Să se calculeze aria elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (se va folosi parametrizarea elipsoidului)

18. Să se găsească masa şi centrul de greutate al unei emisfere superioare dacă densitatea este $\mu(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

    Aplic formulele de calcul pentru masă şi pentru coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G, z_G)$:

$$m = \iint_S \mu(x, y, z)\, d\sigma$$

respectiv

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m}\iint_S x\mu(x, y, z)\, d\sigma \\ y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\mu(x, y, z)\, d\sigma \\ z_G = \frac{1}{m}\iint_S z\mu(x, y, z)\, d\sigma \end{cases}$$

Folosim ecuaţiile parametrice ale emisferei superioare (vezi şi rezolvarea Exerciţiului 1).

19. Să se determine momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate ale suprafeţei conice omogene $z^2 = \frac{h^2}{R^2}\left(x^2 + y^2\right), 0 \le z \le h$

Aplic formulele de calcul pentru momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iint_S x\mu\left(x, y, z\right) d\sigma \\ y_G = \frac{1}{m} \iint_S y\mu\left(x, y, z\right) d\sigma \\ z_G = \frac{1}{m} \iint_S z\mu\left(x, y, z\right) d\sigma \end{cases}$$

Avem ecuaţia explicită a conului

$$z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}\,,\ 0 \le z \le h$$

Trebuie determinată intersecţia conului cu planul $z = h$, şi apoi D, adică proiecţia suprafeţei pe planul xOy (vezi şi rezolvarea Exerciţiului 5).

20. Să se verifice formula lui Stokes pentru funcţiile $P = x^2y^3, Q = 1, R = z$ dacă conturul (γ) este cercul $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$ iar suprafaţa (S) este emisfera $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z \le 0 \end{cases}$

Indicaţie: Trebuie să verificăm egalitatea

$$\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx$$

sau echivalent

$$\int_\gamma x^2y^3dx + dy + zdz = \iint_S \left(0 - 3x^2y^2\right) dxdy + 0dydz + 0dzdx = -3\iint_S x^2y^2dxdy$$

21. Să se calculeze $\iint_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, unde S este faţa exterioară a sferei $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x, y, z \ge 0 \end{cases}$

22. Să se calculeze $\iint_S zdxdy$, unde S este faţa exteriară a elipsoidului $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z \ge 0 \end{cases}$

Observ că $P = 0, Q = 0, R = z$ deci

$$\iint_S zdxdy = \iint_S \left(0\cos\alpha + 0\cos\beta + z\cos\gamma\right) d\sigma = \iint_S z\cos\gamma d\sigma$$

şi deci nu trebuie să calculăm $\cos\alpha$ şi $\cos\beta$.