Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului
Analiza Matematică II, Semestrul II
Conf. dr. Lucian MATICIUC

SEMINAR 12 – 13

Capitolul VI. Integrala triplă

Teoria:

1. **Teorema 1. (de reducere a integralei triple)**
   Integrala triplă se notează cu $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$.
   Dacă, V are explicitarea $V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\end{cases}$, atunci are loc reducerea
   $$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_D\left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy$$

2. **Teorema 2. (schimbarea de variabilă în integrala triplă)**
   Presupunem că V este dat de ecuaţiile parametrice $V:\begin{cases}x=x(\rho,\varphi,\theta)\\ y=y(\rho,\varphi,\theta)\\ z=z(\rho,\varphi,\theta)\end{cases}$ unde $(\rho,\varphi,\theta)\in$ Δ. Vom calcula iacobianul $J\overset{not}{=}\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)}\overset{def}{=}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho}&\frac{\partial y}{\partial\rho}&\frac{\partial z}{\partial\rho}\\ \frac{\partial x}{\partial\varphi}&\frac{\partial y}{\partial\varphi}&\frac{\partial z}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\theta}\end{vmatrix}$
   Atunci are loc schimbarea de variabilă în integrala triplă
   $$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_\Delta f(x(\rho,\varphi,\theta),y(\rho,\varphi,\theta),z(\rho,\varphi,\theta))\cdot|J|\cdot d\rho d\varphi d\theta\quad(1)$$

3. **Corolar 1.**
   $a)$ **Coordonate sferice (coordonate polare în spaţiu)**
   Acestea sunt date de $\begin{cases}x=\rho\sin\theta\cos\varphi\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=\rho\cos\theta\end{cases}$, $\rho\in[0,\infty),\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$.
   În funcţie de domeniul V trebuie determinate, mai precis, intervalele de variaţie pentru ρ,φ,θ, adică domeniul Δ.

Jacobianul este în acest caz dat de $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\theta \end{vmatrix}$ =(se pot face calcule dezvoltând după a doua linie) şi se va obţine

$$J = \rho^2 \sin\theta$$

Deci (1) devine

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_\Delta f(x(\rho,\varphi,\theta), y(\rho,\varphi,\theta), z(\rho,\varphi,\theta))\,\rho^2\sin\theta\; d\rho d\varphi d\theta$$

$b)$ **Coordonate sferice generalizate (coordonate polare generalizate în spaţiu)**

Acestea sunt date de $\begin{cases} x = a\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\rho\cos\theta \end{cases}$, $\rho \in [0,\infty), \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi]$.

În funcţie de domeniul V trebuie determinate, mai precis, intervalele de variaţie pentru ρ, φ, θ, adică domeniul Δ.

Iacobianul este în acest caz dat de $J = \begin{vmatrix} a\cos\varphi\sin\theta & b\sin\varphi\sin\theta & c\cos\theta \\ -a\rho\sin\varphi\cos\theta & b\rho\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ a\rho\cos\varphi\cos\theta & b\rho\sin\varphi\cos\theta & -c\rho\sin\theta \end{vmatrix}$ =(se pot face calcule dezvoltând după ultima linie) şi se va obţine

$$J = abc\rho^2\sin\theta.$$

Deci (1) devine

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_\Delta f(x(\rho,\varphi,\theta), y(\rho,\varphi,\theta), z(\rho,\varphi,\theta))\,abc\rho^2\sin\theta\; d\rho d\varphi d\theta$$

4. **Teorema 3.**

   Volumul $\mathcal{V}$ al unui corp V este dat de

$$\mathcal{V} = \iiint_V dxdydz$$

5. **Teorema 4.**

   Fie un corp V de densitate $\mu(x,y,z)$. Atunci masa este dată de

$$m = \iiint_V \mu(x,y,z)\,dxdydz$$

iar coordonatele centrului de greutate $G\left(x_G, y_G, z_G\right)$ sunt date de

$$\left\{\begin{array}{l} x_G=\frac{1}{m} \iiint_V x \mu(x, y, z)\, d x d y d z \\ y_G=\frac{1}{m} \iiint_V y \mu(x, y, z)\, d x d y d z \\ z_G=\frac{1}{m} \iiint_V z \mu(x, y, z)\, d x d y d z \end{array}\right.$$

6. **Teorema 5. (Formula lui Gauss-Ostrogradski)**

   Fie corpul V mărginit de suprafaţa S care este faţa exterioară a lui V, atunci are loc următoarea formulă de legătură dintre intregrala triplă şi integrala de suprafaţă de specia a doua.

$$\iint_S P d y d z+Q d z d x+R d x d y=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) d x d y d z$$

Enunţurile problemelor:

1. Să se calculeze
$$I=\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z)^2}\,,$$
unde $V=[1,3]\times[0,1]\times[0,2]$.
Indicaţie:
$$\begin{aligned} I &= \int_1^3\left(\int_0^1\left(\int_0^2 \frac{1}{(x+y+z)^2}dz\right)dy\right)dx=\int_1^3\left(\int_0^1\left(\int_0^2 (x+y+z)^{-2}\,dz\right)dy\right)dx \\ &= \int_1^3\left(\int_0^1\left(\frac{(x+y+z)^{-1}}{-1}\Big|_{z=0}^{z=2}\right)dy\right)dx=-\int_1^3\left(\int_0^1\left((2+x+y)^{-1}-(x+y)^{-1}\right)dy\right)dx \end{aligned}$$

2. Să se calculeze
$$I=\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}\,,$$
unde V este mărginit de planele $x=0, y=0, z=0$ şi de planul $x+y+z=1$

Indicaţie: Explicitarea lui $V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases}$ unde domeniul D este dat de placa triunghiulară $D:\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le 1-x.\end{cases}$

3. Să se calculeze
$$I=\iiint_V ydxdydz\,,$$
unde V este tetraedrul din primul octant mărginit de planele de coordonate $x=0, y=0, z=0$ şi de planul $x+y+z=2$.
Indicaţie: Explicitarea lui $V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ 0\le z\le 2-x-y\end{cases}$ unde domeniul D este proiecţia volumului V pe planul xOy, deci este placa triunghiulară $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 2-x\end{cases}$.
$$I=\iint_D\left(\int_0^{2-x-y} ydz\right)dxdy=\int_0^2\left(\int_0^{2-y}\left(\int_0^{2-x-y} ydz\right)dy\right)dx$$

4. Să se calculeze
$$I = \iiint_V z dx dy dz\,,$$
unde V este jumătatea superioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Indicaţie: Explicitarea lui $V : \begin{cases} (x, y) \in D \\ 0 \leq z \leq c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \end{cases}$ unde domeniul D este dat de interiorul de elipsă $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

5. Să se calculeze
$$I = \iiint_V z dx dy dz\,,$$
unde V este mărginit de suprafaţa conică $z^2 = \frac{h^2}{R^2}\left(x^2 + y^2\right), 0 \leq z \leq h$

Indicaţie: Explicitarea lui $V : \begin{cases} (x, y) \in D \\ \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h \end{cases}$ unde domeniul D este discul $D : x^2 + y^2 \leq R^2$.

6. Să se calculeze
$$I = \iiint_V (x + y + z)^2 \, dx dy dz\,,$$
unde V este dat de $V : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2az \text{ (paraboloid)} \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2 \text{ (sferă)} \end{cases}$

Indicaţie: Mai întâi determin intersecţia celor două corpuri. Deci $x^2 + y^2 = 2az$ şi introduc în a doua ecuaţie: $2az + z^2 = 3a^2 \Leftrightarrow (z - a)(z + 3a) = 0$ şi deoarece $z \geq 0$ aleg soluţia $z = a$. deci obţin $x^2 + y^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2$ care este ecuaţia cercului în care se întâlneşte paraboloidul cu sfera. Explicitarea lui $V : \begin{cases} (x, y) \in D \\ \frac{x^2+y^2}{2a} \leq z \leq \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$ unde domeniul D este discul $D : x^2 + y^2 \leq \left(a\sqrt{2}\right)^2$.

7. Să se calculeze
$$I = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) z dx dy dz\,,$$
unde V este mărginit de paraboloidul $z = x^2 + y^2$ şi de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ şi conţine o parte din porţiunea nenegativă a axei Oz.

Indicaţie: Explicitarea lui $V : \begin{cases} (x, y) \in D \\ x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2} \end{cases}$ unde domeniul D este proiecţia volumului V pe planul xOy (se determină mai întâi sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ cu paraboloidul $z = x^2 + y^2$), deci este discul $D : x^2 + y^2 \leq 2$.

$$I = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2\right) z dz\right) dx dy.$$

8. Să se determine volumul corpului dat de $\frac{z^2}{h^2} \geq x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq h$.

   Indicaţie: volumul lui V este dat de

$$\mathcal{V} = \iiint_V dxdydz$$

   Explicitarea lui V : $\begin{cases} (x,y) \in D \\ h\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq h \end{cases}$ unde domeniul D este proiecţia volumului V pe planul xOy (se determină mai întâi intersecţia planului $z = h > 0$ cu paraboloidul $\frac{z^2}{h^2} = x^2 + y^2$), deci este discul $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

$$I = \iint_D \left(\int_{h\sqrt{x^2+y^2}}^{h} dz \right) dxdy.$$

   Pentru calculul integralei duble folosim coordonate polare.

9. Să se calculeze

$$I = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz\,,$$

   unde V este bila închisă de rază R cu centrul în origine.

   Indicaţie: Pentru a calcula integrala triplă vom folosi coordonate sferice cu $\rho \in [0, R]\,, \theta \in [0, \pi]\,, \varphi \in [0, 2\pi]$, $J = \rho^2 \sin\theta$. Deci

$$\mathcal{V} = \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left((\rho\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\sin\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2 \right) |J|\, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho.$$

10. Să se calculeze

$$I = \iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,$$

   unde V este situat în semispaţiul superior şi este delimitat de sferele $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ şi de conul $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

   Indicaţie: Pentru a calcula integrala triplă vom folosi coordonate sferice cu $\rho \in [1, 3]\,, \theta \in [0, \pi/4]\,, \varphi \in [0, 2\pi]$, $J = \rho^2 \sin\theta$. Deci

$$\mathcal{V} = \int_1^3 \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\rho\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\sin\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2}} |J|\, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho.$$

11. Să se calculeze

$$I = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$$

unde V este coroana circulară mărginită de cilindrii circulari $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ şi de planele $z = 0$ şi de $z = 1$.

Indicaţie: Pentru a calcula integrala triplă vom folosi coordonatele cilindrice unde $\rho \in [2,3]\,, \theta \in [0, 2\pi]\,, z \in [0,1]$, $J =$.....calcule....$= \rho$. Deci

$$\mathcal{V} = \int_2^3 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left((\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 \right) |J|\, dz \right) d\theta \right) d\rho.$$

12. Să se determine volumul corpului situat în semispaţiul superior $z \geq 0$ şi mărginit de suprafeţele $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, $a < b$.

Indicaţie: Pentru a calcula integrala triplă vom folosi coordonate sferice cu $\rho \in [a, b]\,, \theta \in [0, \pi/4]\,, \varphi \in [0, 2\pi]$, $J = \rho^2 \sin\theta$. Deci

$$\mathcal{V} = \int_a^b \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} |J|\, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho.$$

13. Să se calculeze

$$I = \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz\,,$$

unde V este dată de $1 \leq \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 4$.

Indicaţie: Pentru a calcula integrala vom folosi coordonate sferice generalizate cu $\rho \in [1,2]\,, \theta \in [0,\pi]\,, \varphi \in [0, 2\pi]$, $J = abc\rho^2 \sin\theta$. Deci

$$\mathcal{V} = \int_1^2 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{(a\rho\cos\varphi\sin\theta)^2}{a^2} + \frac{(b\rho\sin\varphi\sin\theta)^2}{b^2} + \frac{(c\rho\cos\theta)^2}{c^2} \right) |J|\, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho.$$

14. Să se transforme cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski următoarea integrală de suprafaţă de specia a doua

$$I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy\,,$$

unde (S) este faţa exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Indicaţie: Observ că $P = x^2, Q = y^2, R = z^2$; pentru a calcula integrala triplă pe interiorul unui elipsoid folosim coordonatele sferice generalizate.

15. Să se calculeze integrală de suprafaţă de specia a doua

$$I = \iint_S x^3y^2dydz + x^2y^3dzdx + 3zdxdy\,,$$

unde S este faţa exterioară a domeniului V mărginit de paraboloizii $z = x^2 + y^2$, $z = 6 - x^2 - y^2$

Indicaţie: Conform formulei lui Gauss-Ostrogradski

$$I = \iiint_V \left(3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3z\right) dxdydz$$

unde $V : \begin{cases} (x, y) \in D \\ x^2 + y^2 \le z \le 6 - x^2 - y^2 \end{cases}$ iar domeniul D este proiecţia volumului V pe planul xOy (se determină mai întâi intersecţia celor doi paraboloizi), deci este discul $D : x^2 + y^2 \le 3$.

$$I = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} \left(3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3z\right) dz\right) dxdy$$

Pentru calculul integralei duble folosim coordonate polare.

16. Să se calculeze volumul unui corp mărginit de suprafaţa

$a)$ $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^3z$, $x, y, z \ge 0$

$b)$ $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2y}{h^3}$, $x, y, z \ge 0$

Indicaţie: $a)$ Pentru a calcula volumul $\mathcal{V} = \iiint_V dxdydz$ aplic Corolarul 1 adică trec la coordonate sferice. Suntem în primul octant ($x, y, z \ge 0$) deci $\theta \in [0, \pi/2]\,, \varphi \in [0, \pi/2]$. Pentru a determina ρ folosim inegalitatea care-l dă pe $V : x^2 + y^2 + z^2 \le a^3z$. Deci

$$\left((\rho\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\sin\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2\right)^2 \le a^3\rho\cos\theta$$
$$\Leftrightarrow \left(\rho^2\right)^2 \le a^3\rho\cos\theta \Leftrightarrow \rho \le a\sqrt[3]{\cos\theta}$$

adică $0 \le \rho \le \rho \le a\sqrt[3]{\cos\theta}$. Deci $\Delta : \begin{cases} 0 \le \rho \le \rho \le a\sqrt[3]{\cos\theta} \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{cases}$ şi evident $J = \rho^2\sin\theta$

$b)$ Pentru a calcula volumul $\mathcal{V} = \iiint_V dxdydz$ aplic Corolarul 1 şi trec la coordonate sferice generalizate. Suntem în primul octant ($x, y, z \ge 0$) deci $\theta \in [0, \pi/2]\,, \varphi \in [0, \pi/2]$. Pentru a determina ρ folosim inegalitatea care-l dă pe $V : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 \le \frac{x^2y}{h^3}$. Deci

$$\left(\frac{(a\rho\cos\varphi\sin\theta)^2}{a^2} + \frac{(b\rho\sin\varphi\sin\theta)^2}{b^2} + \frac{(c\rho\cos\theta)^2}{c^2}\right)^2 \le \frac{(a\rho\cos\varphi\sin\theta)^2(b\rho\sin\varphi\sin\theta)}{h^3}$$
$$\Rightarrow 0 \le \rho^4 \le \frac{a^2b}{h^3}\rho^3\cos^2\varphi\sin^3\theta\sin\varphi$$

Deci $\Delta : \begin{cases} 0 \le \rho \le \frac{a^2 b}{h^3} \sin^3 \theta \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{cases}$ şi evident $J = abc\rho^2 \sin \theta$.

17. Să se determine masa şi centrul de greutate al interiorului de sferă $x^2 + y^2 + z^2 \le 2az$ dacă densitatea este $\mu(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

    Indicaţie: Pentru a calcula integralele triple vom trece la coordonate sferice. Observăm mai întâi că sfera este $x^2+y^2+z^2 = 2az \Leftrightarrow x^2+y^2+z-2az = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+(z-a)^2 = a^2$ deci are centrul în punctul $C(0, 0, a)$ şi raza a deci este situată deasupra planului $z = 0$ (planul $X0Y$). Deci $\theta \in [0, \pi/2], \varphi \in [0, 2\pi]$. Pentru a determina ρ folosim inegalitatea care-l dă pe $V : x^2 + y^2 + z^2 \le 2az$.

    $$(\rho \cos \varphi \sin \theta)^2 + (\rho \sin \varphi \sin \theta)^2 + (\rho \cos \theta)^2 \le 2a\rho \cos \theta$$
    $$\Leftrightarrow \rho^2 \le 2a\rho \cos \theta \Leftrightarrow \rho \le 2a \cos \theta$$

    adică $0 \le \rho \le 2a \cos \varphi$. Deci $\Delta : \begin{cases} 0 \le \rho \le 2a \cos \theta \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$ şi evident $J = \rho^2 \sin \theta$.

18. Să se determine momentul de inerţie în raport cu planul yOz al solidului omogen, de densitate unitate, având configuraţia domeniului V mărginit de planul $z = c > 0$ şi de conul eliptic $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$.

    Indicaţie: Momentul de inerţie în raport cu planul yOz este $I_{yz} = \iiint_V x^2 dxdydz$.

    Aplic Teorema 1. Explicitarea lui $V : \begin{cases} (x, y) \in D \\ c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \le z \le c \end{cases}$ unde domeniul D este proiecţia volumului V pe planul xOy (se determină mai întâi intersecţia planului $z = c > 0$ cu conul eliptic), deci este discul eliptic $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$.

    $$I = \iint_D \left(\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}^{c} x^2 dz \right) dxdy$$

    Pentru calculul integralei duble folosim coordonate polare generalizate.

19. Să se determine coordonatele centrului de greutate al unui solid omogen mărginit de pânza unui con circular drept, având unghiul de la vârf egal cu 2α şi de o sferă de rază R cu centrul în vârful conului.

    Indicaţie: deoarece solidul este omogen centru de greutate se găseşte pe axa Oz, deci $x_G, y_G = 0$. Prin definiţie

    $$z_G = \frac{1}{\mathcal{V}} \iiint_V z dxdydz$$

unde $\mathcal{V}$ este volumul lui V, dat de

$$\mathcal{V} = \iiint_V dxdydz$$

Pentru a calcula cele 2 integrale triple vom folosi coordonate sferice cu $\rho \in [0, R], \theta \in [0, \alpha], \varphi \in [0, 2\pi]$, $J = \rho^2 \sin\theta$. Deci

$$\mathcal{V} = \int_0^R \left(\int_0^\alpha \left(\int_0^{2\pi} |J|\, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho.$$

20. Să se determine momentul de inerţie în raport cu axa Oz a solidului de configuraţie bila de rază a cu centrul în origine, şi densitate $\mu(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Indicaţie: Momentul de inerţie în raport cu Oz este $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\, \mu(x, y, z)\, dxdydz$. Deci

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$$

care se va calcula folosind coordonatele sferice cu $\rho \in [0, a], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$, $J = \rho^2 \sin\theta$. Deci

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \int_0^a \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left((\rho\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\sin\varphi\sin\theta)^2 \right) \cdot \right.\right. \\ \left.\left. \cdot \left((\rho\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\sin\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2 \right) |J|\, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho. \end{aligned}$$