Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

SEMINARUL 1.

Cap. I_Şiruri de numere reale

1. Să se arate că dacă **subşirurile** $(x_{3n})_n$, $(x_{3n+1})_n$, $(x_{3n+2})_n$ sunt convergente la aceeaşi limită x, atunci şirul $(x_n)_n$ este convergent la x.

   Rezolvare:

   Justificarea se bazează pe faptul că subşirurile $(x_{3n})_n = \{x_0, x_3, x_6, ...\}$, $(x_{3n+1})_n = \{x_1, x_4, x_7, ...\}$, $(x_{3n+2})_n = \{x_2, x_5, x_8, ...\}$ acoperă în întregime şirul

   $$(x_n)_n = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ...\},$$

   şi pe faptul că subşirurile $(x_{3n})_n$, $(x_{3n+1})_n$, $(x_{3n+2})_n$ sunt convergente la aceeaşi limită x.

2. Să se arate că şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ date de $a)$ $x_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, $b)$ $y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ şi $c)$ $z_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ sunt divergente.

   Rezolvare:

   Aplicăm următoarea *Teorema: Orice subşir al unui şir convergent este convergent la aceeaşi limită.*

   De aici avem următoarele:

   Consecinţa 1*: Daca un subşir este divergent atunci sirul întreg este divergent.*

   Consecinţa 2*: Daca două subşiruri ale unui şir sunt convergente dar la valori diferite atunci sirul întreg este divergent.*

   $a)$ În cazul nostru studiem subşirurile

   $$x_{4n} = \cos\left(4n\frac{\pi}{2}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \to 1, n\to\infty,$$

   $$x_{4n+1} = \cos\left[(4n+1)\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \to 0, n\to\infty,$$

   $$x_{4n+2} = \cos\left[(4n+2)\frac{\pi}{2}\right] = \cos(2n\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1 \to -1, n\to\infty,$$

   $$x_{4n+3} = \cos\left[(4n+3)\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \to 0, n\to\infty.$$

   Deci avem subşirurile, de exemplu, $(x_{4n})_n$, $(x_{4n+1})_n$ care sunt convergente la 1 respectiv -1 deci şirul întreg $(x_n)_n$ este obligatoriu divergent.

   Observaţie: Am folosit următoarele definiţii, proprietăţi

   1) $\cos(2n\pi) = 1$, $\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos((2n+1)\pi) = -1$, $n \in \mathbb{Z}$

   2) $\sin(n\pi) = 0$, $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{Z}$

   3) funcţiile $\sin$ şi $\cos$ sunt periodice, adică: $\sin(2n\pi + x) = \sin(x)$, $\cos(2n\pi + x) = \cos(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

   $b)$ Temă. ■

3. Să se calculeze limitele şirurilor date de (vezi şi limitele fundamentale (**??**), (**??**) şi (**??**)):
$a)\ x_n = \dfrac{2n^3+n+1}{n^3-n+2}$, $b)\ x_n = \dfrac{2n^3-n}{n^3+n^2+1}$, $c)\ x_n = \dfrac{n^2-2}{n^3+n+1}$ şi $y_n = \dfrac{n^3-n}{n^2+n+1}$,

$d)\ x_n = 2^n$ şi $y_n = \frac{1}{3^n}$, $e)\ x_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$, $y_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$, $f)\ x_n = \left(\frac{-2}{3}\right)^n$, $y_n = (-4)^n$ şi $z_n = \left(\frac{-5}{2}\right)^n$,

$g)\ x_n = \dfrac{5\cdot 4^n}{4^n+7}$, $h)\ x_n = \dfrac{2\cdot 3^n+4^n}{5^n+7^n}$, $i)\ x_n = \dfrac{2\cdot 3^n+(-5)^n}{4^n+(-3)^n}$.

4. Să se calculeze limitele şirurilor date de:
$a)\ x_n = \sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}$, $b)\ x_n = \sqrt{n+1}+2\sqrt{n+2}-3\sqrt{n+3}$, $c)\ x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$,

$d)\ x_n = n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$.

5. Să se studieze **monotonia**, **mărginirea**, convergenţa şi să se afle limita şirurilor date de:
$a)\ x_n = \dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$, $b)\ x_n = \dfrac{(-1)^n n+1}{(-1)^n n}$, $c)\ x_n = \dfrac{5\,7\,9\cdots[5+2(n-1)]}{4\,7\,10\cdots[4+3(n-1)]}$, $d)\ x_n = \dfrac{n+5}{n+3}$, $e)\ x_n>0,\ x_0=1,\ x_{n+1}\le \dfrac{x_n}{x_n+1},\ n\in\mathbb{N}$

Rezolvare:

Aplicăm *Definiţia: Un şir* (x_n) *este mărginit dacă* $\exists\ \alpha,\beta\in R$, *a. î.* $\alpha\le x_n\le\beta, \forall n\in N$
sau echivalent

Un şir (x_n) *este mărginit dacă* $\exists\ M>0$ *a.î.* $|x_n|\le M$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Aplicăm şi *Definiţia: Un şir* (x_n) *este crescător dacă*

$$x_{n+1}-x_n\ge 0,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

şi *Definiţia: dacă* (x_n) este format din numere strict pozitive atunci el este crescator dacă şi numai dacă

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge 1,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

şi *Teorema lui Weierstrass: a) Orice* şir monoton crescător şi mărginit superior este convergent b) *Orice* şir monoton descrescător şi mărginit inferior este convergent.

$a)$ Calculăm

$$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} - \left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}>0$$

Deci evident (x_n) este crescător. Pe de altă parte

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},\quad k=\overline{1,n}.$$

Obţinem

$$x_n<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 2-\frac{1}{n}<2$$

Deci $0<x_n<2$ deci e mărginit. Se obţine că şirul este convergent (deoarece e monoton şi mărginit). Problema aflării limitei este eludată.

$b)$ Deoarece şirul x_n conţine termenul $(-1)^n$ vom studia subşirurile (x_{2n}) şi (x_{2n+1}).

$$x_{2n} = \frac{(-1)^{2n} 2n + 1}{(-1)^{2n} 2n} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$$

iar acest subşir este descrescător deoarece $x_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \leq 1 + \frac{1}{2(n-1)} = x_{2(n-1)}$ iar, evident, $x_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1 + \frac{1}{\infty} = 1$, pentru $n \to \infty$.

Pe de altă parte

$$x_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}(2n+1) + 1}{(-1)^{2n+1}(2n+1)} = \frac{-2n-1+1}{-2n-1} = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

iar acest subşir este crescător deoarece $x_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1} \leq 1 - \frac{1}{2(n+1)+1} = x_{2(n+1)+1}$ iar, evident, $x_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1} \to 1 - \frac{1}{\infty} = 1$, pentru $n \to \infty$.

Deci $x_{2n} \to 1$, $x_{2n+1} \to 1$, pentru $n \to \infty$ adică şirul întreg (acoperit de cele 2 subşiruri) este convergent şi el la valoarea 1. Să observăm că şirul nu este monoton dar este mărginit deoarece subşirurile lui sunt convergente deci mărginite.

$c)$ Calculăm

$$x_{n+1} = \frac{5\ 7\ 9 \cdots [5 + 2(n-1)]\,[5 + 2(n+1-1)]}{4\ 7\ 10 \cdots [4 + 3(n-1)]\,[4 + 3(n+1-1)]} = x_n \frac{5+2n}{4+3n}$$

Deci avem că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{5+2n}{4+3n} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dar având în vedere că (x_n) este format din numere pozitive avem că este descrescător. Pe de altă parte el e mărginit inferior de 0 deci el este convergent. Să presupunem că $x_n \to l \neq 0$ deci dacă trecem la limită în egalitatea de mai sus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+2n}{4+3n} \Leftrightarrow \frac{l}{l} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{3}$$

contradicţie. Deci limita $l = 0$.

$d)$ Temă (se va arăta că $x_{n+1} - x_n = \frac{-2}{(n+4)(n+3)} < 0$, deci descrescător, şi mărginit inferior, $x_n > 0$ adică e convergent. Limita este 1. Vezi şi exerciţiul 4, limita fundamentală (6)).

$e)$ Temă (se va arăta că $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{1+x_n} < 1$ adică (x_n) descreşte şi e şi mărginit inferior $x_n > 0$, deci e convergent la $l = 0$).

6. Folosind **criteriul majorării** să se calculeze limitele şirurilor date de $x_n = \sqrt[n]{n}$ şi $y_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$

Rezolvare:

Aplicăm *Teorema: Fie şirul $(\alpha_n)_n$ a.î. $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$. Presupunem că avem inegalitatea $|x_n - x| \leq \alpha_n$, $\forall\, n \in N$. Atunci $x_n \to x$, pentru $n \to \infty$.*

Vom arăta că

$$\sqrt[n]{n} \to 1\ ,\ n \to \infty.$$

Notăm cu $y_n = \sqrt[n]{n} - 1$, şi vom arăta că $y_n \to 0$. Avem deci

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n} = 1 + y_n \Leftrightarrow n = (1+y_n)^n &= 1 + C_n^1 y_n + C_n^2 y_n^2 + C_n^3 y_n^3 + \cdots\cdots \\ &\geq (\text{imediat deoarece } y_n \geq 0\ ) \geq C_n^2 y_n^2 = \tfrac{n(n-1)}{2} y_n^2. \end{aligned}$$

Deci $y_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \Leftrightarrow |y_n| \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \alpha_n$ iar α_n converge la 0 deci $y_n \to 0 \Leftrightarrow x_n \to 1$.

Vom arăta că $y_n \to 0$. Avem inegalităţile imediate

$$\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1},\ \frac{1}{n^2+2} \leq \frac{1}{n^2+1}, \cdots\cdots, \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1}.$$

Deci $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1}$. Adică $|x_n| \leq \alpha_n = \frac{n}{n^2+1}$ iar α_n este, evident, convergent la 0.