Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

SEMINAR 10.

Cap. V_Şiruri şi serii de funcţii (continuare)

1. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul lui $x = a$, $a \in \mathbb{R}$ funcţiile:
   $a)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ $b)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ $c)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$,
   $d)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x)$

   Rezolvare:

   Pentru teorie vezi Seminarul 9.

   $a)$ Avem imediat că $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Deci seria Taylor asociată este

$$e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n + \cdots \tag{1}$$

Dar formula lui Taylor asociată acestei funcţii în punctul a este

$$\begin{aligned} e^x = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + \\ + \cdots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

Se poate arăta (!) că $R_n(x) \to 0$, $n \to \infty$. Deci, conform unei Teoreme avem că seria (1) asociată funcţiei $f(x) = e^x$ are suma dată de chiar $f(x) = e^x$, adică are loc următoarea dezvoltare importantă

$$e^x = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n + \cdots \ , \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Dacă $a = 0$ obţinem dezvoltarea în serie Mac-Laurin asociată funcţiei $f(x) = e^x$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \forall\, x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2}$$

$b)$ Avem $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$

$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(4)}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$

În general are loc

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

deoarece avem formulele

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0\,, & n \text{ impar} \\ (-1)^k\,, & n \text{ par de forma } n = 2k \end{cases}$$

$$\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0\,, & n \text{ par} \\ (-1)^k\,, & n \text{ impar de forma } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\sin(k\pi) = 0\,, \quad \cos(k\pi) = (-1)^k$$

Deci seria Taylor asociată este

$$\begin{aligned} &\sin a + \frac{\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)}{1!}(x-a) + \frac{\sin\left(a+2\frac{\pi}{2}\right)}{2!}(x-a)^2 + \\ &+\frac{\sin\left(a+3\frac{\pi}{2}\right)}{3!}(x-a)^3 + \frac{\sin\left(a+4\frac{\pi}{2}\right)}{4!}(x-a)^4 + \\ &+\frac{\sin\left(a+5\frac{\pi}{2}\right)}{5!}(x-a)^5 + \cdots\cdots + \frac{\sin\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

Pe de altă parte formula lui Taylor asociată funcţiei f este

$$\begin{aligned} \sin x = \sin a &+ \frac{\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)}{1!}(x-a) + \frac{\sin\left(a+2\frac{\pi}{2}\right)}{2!}(x-a)^2 + \frac{\sin\left(a+3\frac{\pi}{2}\right)}{3!}(x-a)^3 \\ &+\frac{\sin\left(a+4\frac{\pi}{2}\right)}{4!}(x-a)^4 + \frac{\sin\left(a+5\frac{\pi}{2}\right)}{5!}(x-a)^5 \\ &+\cdots\cdots + \frac{\sin\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

echivalent

$$\begin{aligned} \sin x = \sin a &+ \frac{\cos a}{1!}(x-a) + \frac{-\sin a}{2!}(x-a)^2 + \frac{-\cos a}{3!}(x-a)^3 \\ &+\frac{\sin a}{4!}(x-a)^4 + \frac{\cos a}{5!}(x-a)^5 + \cdots\cdots + \frac{\sin\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

Se poate arăta (!) că $R_n(x) \to 0$, $n \to \infty$. Deci, conform unei Teoreme avem că seria (3) asociată funcţiei $f(x) = \sin x$ are drept sumă chiar funcţia $f(x) = \sin x$ adică are loc dezvoltarea

$$\begin{aligned} \sin x = \sin a &+ \frac{\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)}{1!}(x-a) + \frac{\sin\left(a+2\frac{\pi}{2}\right)}{2!}(x-a)^2 + \\ &+\frac{\sin\left(a+3\frac{\pi}{2}\right)}{3!}(x-a)^3 + \frac{\sin\left(a+4\frac{\pi}{2}\right)}{4!}(x-a)^4 + \\ &+\frac{\sin\left(a+5\frac{\pi}{2}\right)}{5!}(x-a)^5 + \cdots\cdots + \frac{\sin\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

sau scrisă echivalent,

$$\begin{aligned} \sin x = \sin a &+ \frac{\cos a}{1!}(x-a) + \frac{-\sin a}{2!}(x-a)^2 + \frac{-\cos a}{3!}(x-a)^3 \\ &+\frac{\sin a}{4!}(x-a)^4 + \frac{\cos a}{5!}(x-a)^5 + \cdots\cdots + \frac{\sin\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n + \cdots\cdots\,, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dacă $a=0$ obţinem dezvoltarea în serie Mac-Laurin asociată funcţiei $f(x)=\sin x$

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\cdots\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ,\forall\, x\in\mathbb{R}\end{aligned}\tag{5}$$

c) $f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(x)=-\cos x=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$

$f'''(x)=\sin x=\cos\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(4)}(x)=\cos x=\cos\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)$

În general are loc

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\ ,\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$$

deoarece

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

Deci seria Taylor asociată este

$$\begin{aligned}&\cos a+\frac{\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)}{1!}(x-a)+\frac{\cos\left(a+2\frac{\pi}{2}\right)}{2!}(x-a)^2+\frac{\cos\left(a+3\frac{\pi}{2}\right)}{3!}(x-a)^3\\ &+\frac{\cos\left(a+4\frac{\pi}{2}\right)}{4!}(x-a)^4+\frac{\cos\left(a+5\frac{\pi}{2}\right)}{5!}(x-a)^5+\\ &+\cdots\cdots+\frac{\cos\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n+\cdots\cdots\end{aligned}\tag{6}$$

Pe de altă parte formula Taylor asociată funcţiei $\cos x$ este

$$\begin{aligned}\cos x=\cos a&+\frac{\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)}{1!}(x-a)+\frac{\cos\left(a+2\frac{\pi}{2}\right)}{2!}(x-a)^2+\frac{\cos\left(a+3\frac{\pi}{2}\right)}{3!}(x-a)^3\\ &+\frac{\cos\left(a+4\frac{\pi}{2}\right)}{4!}(x-a)^4+\frac{\cos\left(a+5\frac{\pi}{2}\right)}{5!}(x-a)^5+\cdots\cdots+\frac{\cos\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)\end{aligned}$$

sau, scrisă echivalent,

$$\begin{aligned}\cos x=\cos a&+\frac{-\sin a}{1!}(x-a)+\frac{-\cos a}{2!}(x-a)^2+\frac{\sin a}{3!}(x-a)^3\\ &+\frac{\cos a}{4!}(x-a)^4+\frac{-\sin a}{5!}(x-a)^5+\cdots\cdots+\frac{\cos\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)\end{aligned}$$

Se poate arăta (!) că $R_n(x)\to 0$, $n\to\infty$. Deci, conform unei Teoreme avem că seria (6) asociată funcţiei $f(x)=\cos x$ are drept sumă chiar funcţia $f(x)=\cos x$ adică are loc dezvoltarea

$$\begin{aligned}\cos x=\cos a&+\frac{\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)}{1!}(x-a)+\frac{\cos\left(a+2\frac{\pi}{2}\right)}{2!}(x-a)^2+\frac{\cos\left(a+3\frac{\pi}{2}\right)}{3!}(x-a)^3\\ &+\frac{\cos\left(a+4\frac{\pi}{2}\right)}{4!}(x-a)^4+\frac{\cos\left(a+5\frac{\pi}{2}\right)}{5!}(x-a)^5+\\ &+\cdots\cdots+\frac{\cos\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n+\cdots\cdots\end{aligned}$$

sau, echivalent,

$$\cos x = \cos a + \frac{-\sin a}{1!}(x-a) + \frac{-\cos a}{2!}(x-a)^2 + \frac{\sin a}{3!}(x-a)^3$$
$$+\frac{\cos a}{4!}(x-a)^4 + \frac{-\sin a}{5!}(x-a)^5 + \cdots\cdots + \frac{\cos\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n + \cdots\cdots, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Dacă $a = 0$ obţinem dezvoltarea în serie Mac-Laurin asociată funcţiei $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\cdots\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , \forall\, x \in \mathbb{R}\end{aligned} \tag{7}$$

d) $f'(x) = (\ln(1+x))' = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = \left((1+x)^{-1}\right)' = (-1)(1+x)^{-2}$,

$f'''(x) = \left((-1)(1+x)^{-2}\right)' = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$, deci în general avem

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-n+1)(1+x)^{-n} \ , \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

adică

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n} \ , \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

Deci seria Taylor asociată este

$$\ln(1+a) + \frac{\frac{1}{1+a}}{1!}(x-a) + \frac{\frac{-1}{(1+a)^2}}{2!}(x-a)^2 + \frac{\frac{2!}{(1+a)^3}}{3!}(x-a)^3$$
$$+\frac{\frac{-3!}{(1+a)^4}}{4!}(x-a)^4 + \frac{\frac{4!}{(1+a)^5}}{5!}(x-a)^5 +$$
$$+\cdots\cdots + \frac{\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+a)^n}}{n!}(x-a)^n + \cdots\cdots$$

adică

$$\begin{aligned}&\ln(1+a) + \frac{1}{(1+a)}(x-a) - \frac{1}{(1+a)^2\,2}(x-a)^2 + \frac{1}{(1+a)^3\,3}(x-a)^3 \\ &-\frac{1}{(1+a)^4\,4}(x-a)^4 + \frac{1}{(1+a)^5}(x-a)^5 + \\ &+\cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(1+x)^n\,n}(x-a)^n + \cdots\cdots\end{aligned} \tag{8}$$

Pe de altă parte formula Taylor asociată funcţiei $\ln(1+x)$ este

$$\ln(1+x) = \ln(1+a) + \frac{1}{(1+a)\,1!}(x-a) + \frac{-1}{(1+a)^2\,2}(x-a)^2 + \frac{1}{(1+a)^3\,3}(x-a)^3$$
$$+\frac{-1}{(1+a)^4\,4}(x-a)^4 + \frac{1}{(1+a)^5\,5}(x-a)^5 +$$
$$+\cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(1+a)^n\,n}(x-a)^n + R_n(x)$$

Se poate arăta (!) că $R_n(x) \to 0$, $n \to \infty$. Deci, conform unei Teoreme avem că seria (8) asociată funcţiei $f(x) = \ln(1+x)$ are drept sumă chiar funcţia $f(x) = \ln(1+x)$ adică are loc dezvoltarea

$$\ln(1+x) = \ln(1+a) + \frac{1}{(1+a)}(x-a) - \frac{1}{(1+a)^2 2}(x-a)^2 + \frac{1}{(1+a)^3 3}(x-a)^3$$
$$-\frac{1}{(1+a)^4 4}(x-a)^4 + \frac{1}{(1+a)^5 5}(x-a)^5 +$$
$$+\cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(1+a)^n n}(x-a)^n + \cdots\cdots$$

Dacă $a = 0$ obţinem dezvoltarea în serie Mac-Laurin asociată funcţiei $f(x) = \ln(1+x)$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots\cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\end{aligned} \tag{9}$$

2. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul lui $x = a$ funcţiile:

   $a)$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$, $a = -4$, $b)$ $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$, $a = 6$

   Rezolvare:

   $a)$ Mai intâi descompunem fracţiile în fracţii simple. Pentru aceasta găsim divizorii numitorului. Astfel ştim că în general are loc scrierea $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$. Deci în cazul nostru

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

deoarece $\Delta = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2$. Va avea loc descompunerea

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

unde a, b trebuie determinaţi a.î. să aibă loc egalitatea

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+3x+2} &= \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{x^2+3x+2} &= \frac{x(a+b)+(2a+b)}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

deci $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases}$ adică $a = 1, b = -1$

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

Acum pentru fiecare fracţie simplă în parte folosim, în mod convenabil, descompunerile fundamentale.

Se cere ca dezvoltarea să fie în jurul lui $a = -4$ **deci trebuie să apară puterile** $(x-a)^n$ **adică** $(x+4)^n$ **. Din acest motiv fracţiile trebuie aranjate convenabil.** Astfel

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+4)-4+1} = \frac{1}{(x+4)-3} = \frac{-1}{3-(x+4)} = \frac{-1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{x+4}{3}}$$

şi acum folosesc dezvoltare $\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots + y^n + \cdots\cdots, \forall\ |y| < 1$ adică

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}} &= \frac{-1}{3}\left(1+\frac{x+4}{3}+\left(\frac{x+4}{3}\right)^2+\left(\frac{x+4}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{x+4}{3}\right)^n+\cdots\cdots\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}}(x+4)^n\ ,\forall\ \left|\frac{x+4}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |x+4| < 3 \Leftrightarrow -7 < x < -1
\end{aligned}$$

Avem şi

$$\frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{(x+4)-4+2} = \frac{-1}{(x+4)-2} = \frac{1}{2-(x+4)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x+4}{2}+\left(\frac{x+4}{2}\right)^2+\left(\frac{x+4}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{x+4}{2}\right)^n+\cdots\cdots\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x+4)^n\ ,\forall\ \left|\frac{x+4}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x+4| < 2 \Leftrightarrow -6 < x < -2
\end{aligned}$$

Deci are loc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}}(x+4)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x+4)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n \quad \forall\ -6 < x < -2
\end{aligned}$$

$b)$ Vom folosi dezvoltarea binomială

$$(1+y)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}y+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}y^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}y^n+\cdots,\ \forall\, y \text{ cu } |y| < 1$$

pentru $\alpha = 1/3$ deoarece avem $f(x) = \sqrt[3]{x+2} = (x+2)^{1/3}$. Se cere dezvoltarea în jurul lui $a = 6$, adică trebuie să apară termenii $(x-6)^n$. Pentru a putea aplica exact dezvoltarea de mai sus facem schimbările algebrice

$$(x+2)^{1/3} = ((x-6)+6+2)^{1/3} = (8+(x-6))^{1/3} = 8^{1/3}\left(1+\frac{x-6}{8}\right)^{1/3}$$

deci are loc

$$\sqrt[3]{x+2} = 2\left(1+\frac{x-6}{8}\right)^{1/3}$$

Temă: de scris dezvoltarea binomială pentru $\alpha = 1/3$ şi de înlocuit $y = \frac{x-6}{8}$

3. Să se calculeze, folosind dezvoltările fundamentale cunoscute, suma următoarelor serii numerice:

$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\alpha^n\ \ b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\ \ c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\ \ d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,5^n}$

Rezolvare:

$a)$ Vezi Seminarul 9. Avem deci imediat

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-\alpha)^2} &= 1+2\alpha+3\alpha^2+\cdots+n\alpha^{n-1}+(n+1)\,\alpha^n+\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha^{n-1}= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,\alpha^n\end{aligned}$$

$b)$ Dezoltarea (2) de mai sus este $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ iar în cazul nostru

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

deci avem că suma seriei este $e^{1/2}$ deoarece

$$e^{1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$$

$c)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

deci avem nevoie de suma seriilor $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ şi respectiv $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$.

A doua este imediată

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

Pentru prima urmăm acelaşi procedeu ca în Seminarul 9., exerciţiul 4., pct. $b)$. Dacă derivăm termen cu termen dezvoltarea lui

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$$

obţinem

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+(n+1)\,x^n+\cdots\cdots$$

Înmulţim acum cu x şi obţinem

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)^2} &= x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+(n+1)\,x^{n+1}+\cdots\cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}nx^n\end{aligned}$$

Deci pentru $x=1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1/2}{(1-1/2)^2}=2$$

şi respectiv

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1=\frac{1}{1-1/2}-1=1$$

adică avem
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\cdot 2-1=3$$

d) Observăm că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\,5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1/5)^n}{n}$ deci ne interesează suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ cu $x=1/5$, care este dată de (9), exerciţiul 1., adică
$$\ln(1+1/5)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(1/5)^n\Leftrightarrow\ln(6/5)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,5^n}$$

4. Folosind formula lui Mac-Laurin să se calculeze
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

Rezolvare:
Pentru a calcula asemenea limite folosim formula lui Taylor pentru $a=0$ (adică formula lui Mac-Laurin). Astfel vom obţine formulele (**vezi şi exerciţiul 1. în care iei** $a=0$)
$$\begin{aligned}e^x&=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+R_5(x)\\ \cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+R_7(x)\\ \sin x&=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+R_8(x)\end{aligned}$$
unde $R_5(x),R_7(x),R_8(x)$ sunt nişte cantităţi cate tind la 0 pentru $x\to 0$. Deci obţinem
$$\begin{aligned}e^{-\frac{x^2}{2}}&=1+\frac{-\frac{x^2}{2}}{1!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^4}{4!}+R_5\left(-\frac{x^2}{2}\right)\\ &=1-\frac{x^2}{2\cdot 1!}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\frac{x^8}{2^4\cdot 4!}+R_5\left(-\frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}$$
Deci vom avea
$$\begin{aligned}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}&=\frac{1}{x^4}\Bigg[\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+R_7(x)\right)-\\&\quad\left(1-\frac{x^2}{2\cdot 1!}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\frac{x^8}{2^4\cdot 4!}+R_5\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)\Bigg]\\ &=\frac{1}{x^4}\left[\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+R_7(x)-\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}-\frac{x^8}{2^4\cdot 4!}+R_7(x)-R_5\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]\\ &=\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2^2\cdot 2!}\right)+x^2\left(\frac{1}{2^3\cdot 3!}-\frac{1}{6!}\right)-x^4\frac{1}{2^4\cdot 4!}+\frac{R_7(x)}{x^4}-\frac{R_5\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}\end{aligned}$$
adică
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\frac{1}{4!}-\frac{1}{2^2\cdot 2!}$$
deoarece evident $x^2\left(\frac{1}{2^3\cdot 3!}-\frac{1}{6!}\right)\to 0$, $-x^4\frac{1}{2^4\cdot 4!}\to 0$, $\frac{R_7(x)}{x^4}-\frac{R_5\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}\to 0$, pentru $x\to 0$