Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

**SEMINAR 11 - 13**

**Capitolul VI_Funcţii de mai multe variabile**

1. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri cu termenul general dat de:
   $a)\ x_n = \left(\sqrt{n^2 - 3n + 1} - n, n \sin \frac{1}{n}\right),\ b)\ x_n = \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n, \frac{(-4)^n + 7^{n+1}}{5^n + 3 \cdot 7^n}\right).$

2. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi, precum şi diferenţialele de ordinul întâi şi doi pentru următoarele funcţii:
   $a)\ f(x, y) = x^3 y - xy^2 + 5xy,\ \ b)\ f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y},\ \ c)\ f(x, y, z) = \frac{x}{y} - 2\frac{y}{z} + 3\frac{z}{x},\ \ d)\ f(x, y, z) = \ln(xy + yz + xz),\ e)\ f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right),\ f)\ f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$

3. Să se determine **punctele de extrem ale funcţiilor**:
   $a)\ f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$ , $b)\ f(x, y) = 2\left(x^3 + y^3\right) + 24xy + 13\left(x^2 + y^2\right) + 27$

   **Rezolvare:**

   Aplicăm Teorema 180 (pag. 206). Pentru a găsi extremele unei funcţii de 2 variabile procedăm astfel:

   $i)$ găsim mai întâi **punctele staţionare** adică punctele $(a, b)$ soluţie pentru sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \end{cases}$$

   sau echivalent punctele în care diferenţiala funcţiei este 0 adică soluţiile $(a, b)$ pentru

$$df(a, b) = 0$$

   $ii)$ punctele de extrem se găsesc printre cele staţionare de mai sus

   $iii)$ fie $(a, b)$ un punct staţionar. Calculăm cantităţile

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\ ,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\ ,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

   şi citim concluziile Teoremei 180. Astfel avem situaţiile:

   $iii)_1$ dacă $B^2 - AC < 0$ şi $A > 0$ atunci punctul staţionar $(a, b)$ este punct de minim local;
   $iii)_2$ dacă $B^2 - AC < 0$ şi $A < 0$ atunci punctul staţionar $(a, b)$ este punct de maxim local;
   $iii)_3$ dacă $B^2 - AC > 0$ atunci punctul staţionar $(a, b)$ nu este punct de extrem.

   $a)$ Punctele staţionare sunt date de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 0 - 2x - 0 = 0 \\ 0 + 4y^3 - 0 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\left(2x^2 - 1\right) = 0 \\ 2y\left(2y^2 - 1\right) = 0 \end{cases}$$

Deci punctele staţionare sunt $P_1\left(0,0\right)$, $P_2(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, $P_3(0,\dfrac{-1}{\sqrt{2}})$, $P_4(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)$, $P_5(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)$, $P_6(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, $P_7(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, $P_8(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}})$, $P_9(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}})$. Acum vom verifica fiecare punct în parte dacă este de extrem sau nu. Vom face calculul doar pentru câteva puncte. Să calculăm mai întâi derivatele parţiale de ordinul al doilea

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(4x^3-2x\right)_x^{\prime} = 12x^2-2\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(4y^3-2y\right)_y^{\prime} = 12y^2-2\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \left(4x^3-2x\right)_y^{\prime} = 0\end{aligned}$$

Pentru punctul $P_1\left(0,0\right)$ avem deci $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0,0\right)=-2$ , $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(0,0\right)=0$ , $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(0,0\right)=-2$ deci $B^2-AC=0-4=-4<0$ şi $A<0$ deci $P_1\left(0,0\right)$ este punct de maxim local.

Pentru punctul $P_3(0,\dfrac{-1}{\sqrt{2}})$ avem $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\dfrac{-1}{\sqrt{2}})=0-2=-2$ , $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,\dfrac{-1}{\sqrt{2}})=0$ , $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\dfrac{-1}{\sqrt{2}})=12\dfrac{1}{2}-2=4$ deci $B^2-AC=0-(-8)=8>0$ deci $P_3(0,\dfrac{-1}{\sqrt{2}})$ nu este punct de extrem.

Pentru punctul $P_9(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}})$ avem $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}})=12\dfrac{1}{2}-2=4$ , $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}})=0$ , $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}})=12\dfrac{1}{2}-2=4$ deci $B^2-AC=0-16=-16<0$ şi $A>0$ deci $P_9(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}})$ este punct de minim local.

Celelate puncte se studiază în mod similar.

$b)$ temă. Punctele staţionare sunt $\left(0,0\right),\left(-25/3,-25/3\right),\left(1,-4/3\right)$.

4. Să se determine punctele de extrem ale funcţiilor $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definite de:

   $(a)$ $f\left(x,y\right)=2\left(x^3+y^3\right)+24xy+13\left(x^2+y^2\right)+27$ (punctele staţionare sunt $\left(0,0\right),\left(-25/3,-25/3\right),\left(1,-4/3\right)$).

   $(b)$ $f\left(x,y\right)=3x^2y+y^3-12x-15y$.

   $(c)$ $f\left(x,y\right)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

   $(d)$ $f\left(x,y\right)=\left(x^2+y^2\right)e^{3x+2y}$.

   $(e)$ $f\left(x,y\right)=\left(x-1\right)^2+2y^2$.

   $(f)$ $f\left(x,y\right)=\left(x-1\right)^2-2y^2$.

   $(g)$ $f\left(x,y\right)=x^2+xy+y^2-2x-y$.

   $(h)$ $f\left(x,y\right)=2xy-5x^2-2y^2+6x+6y$.

   $(i)$ $f\left(x,y\right)=3x^2y+36x-y^3-15y+9$.

   $(j)$ $f\left(x,y\right)=x^3-3xy+y^3$.

5. Să se determine **punctele de extrem ale funcţiei** $f(x,y,z) = xyz(24 + x + 2y - 3z)$, $x, y, z \neq 0$

Rezolvare:

Aplicăm Teorema 182 (pag. 208). Pentru a găsi extremele unei funcţii de 3 variabile procedăm astfel:

$i)$ găsim mai întâi **punctele staţionare** adică punctele $(a,b,c)$ soluţie pentru sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = 0 \end{cases}$$

sau echivalent punctele în care diferenţiala funcţiei este 0 adică soluţiile $(a,b,c)$ pentru

$$df(a,b,c) = 0$$

$ii)$ punctele de extrem se găsesc printre cele staţionare de mai sus

$iii)$ fie $(a,b,c)$ un punct staţionar. Calculăm cantităţile

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c)\ ,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a,b,c) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a,b,c) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a,b,c) \end{vmatrix}$$

şi citim concluziile Teoremei 182. Astfel avem situaţiile:

$iii)_1$ dacă $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ sunt toate strict pozitive atunci punctul staţionar $(a,b,c)$ este punct de minim local;

$iii)_2$ dacă $-\Delta_1$, $\Delta_2$, $-\Delta_3$ sunt toate strict pozitive atunci punctul staţionar $(a,b,c)$ este punct de maxim local;

În cazul nostru punctele staţionare sunt date de sistemul $\begin{cases} (xyz(24 + x + 2y - 3z))'_x = 0 \\ (xyz(24 + x + 2y - 3z))'_y = 0 \\ (xyz(24 + x + 2y - 3z))'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} yz(x(24 + x + 2y - 3z))'_x = 0 \\ xz(y(24 + x + 2y - 3z))'_y = 0 \\ xy(z(24 + x + 2y - 3z))'_z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yz\left[(24+x+2y-3z)+x(0+1+0-0)\right]=0 \\ xz\left[(24+x+2y-3z)+y(0+0+2-0)\right]=0 \\ xy\left[(24+x+2y-3z)+z(0+0+0-3)\right]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz\left[(24+x+2y-3z)+x\right]=0 \\ xz\left[(24+x+2y-3z)+2y\right]=0 \\ xy\left[(24+x+2y-3z)-3z\right]=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yz\left[24+2x+2y-3z\right]=0 \\ xz\left[24+x+4y-3z\right]=0 \\ xy\left[24+x+2y-6z\right]=0 \end{cases}$$

dar $x,y,z \neq 0$ deci avem echivalent sistemul $\begin{cases} 24+2x+2y-3z=0 \\ 24+x+4y-3z=0 \\ 24+x+2y-6z=0 \end{cases}$ care are soluţie unică $P(-6,-3,2)$ care este deci singurul punct staţionar. Calculăm acum

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(yz\left[24+2x+2y-3z\right]\right)_x^{'}=\cdots\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(xz\left[24+x+4y-3z\right]\right)_y^{'}=\cdots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\left(xy\left[24+x+2y-6z\right]\right)_z^{'}=\cdots\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(yz\left[24+2x+2y-3z\right]\right)_y^{'}=\cdots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\left(yz\left[24+2x+2y-3z\right]\right)_z^{'}=\cdots\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\left(xz\left[24+x+4y-3z\right]\right)_z^{'}=\cdots$$

Apoi vom calcula $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-6,-3,2)=\cdots$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-6,-3,2)=\cdots$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(-6,-3,2)=\cdots$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-6,-3,2)=\cdots$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(-6,-3,2)=\cdots$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(-6,-3,2)=\cdots$ şi vom citi concluziile Teoremei 182.

6. Să se calculeze $y^{'}(x_0)$ şi $y^{''}(x_0)$ pentru funcţia $y(x)$ ce satisface condiţia $y(x_0)=y_0$ şi **este definită implicit de ecuaţia**:

   $a)$ $x^3+y^3+xy-y^2=0$ , $y(0)=1$ , $b)$ $\ln\sqrt{x^2+y^2}=$arctg$\dfrac{y}{x}$

   Rezolvare:

   **Ecuaţia dată este de tipul $F(x,y)=0$ şi defineşte implicit funcţia $y=y(x)$.**

   **Mai întâi vom rescrie ecuaţia dată cu $y(x)$ in loc de $y$ şi apoi vom deriva în raport cu $x$.**

   $a)$ ecuaţia rescrisă este $x^3+y^3(x)+xy(x)-y^2(x)=0$. Singura variabilă în această ecuaţie este $x$. Să derivăm în raport cu această variabilă. Avem

$$\left[x^3+y^3(x)+xy(x)-y^2(x)\right]^{'}=0 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2(x)\,y^{'}(x)+x^{'}y(x)+xy^{'}(x)-2y(x)\,y^{'}(x)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+y(x)+\left[3y^2(x)+x-2y(x)\right]y^{'}(x)=0 \Leftrightarrow y^{'}(x)=-\frac{3x^2+y(x)}{3y^2(x)+x-2y(x)}$$

deci are loc

$$y^{'}(x_0)=-\frac{3x_0^2+y(x_0)}{3y^2(x_0)+x_0-2y(x_0)}$$

şi acum vom înlocui $x_0=0$ şi $y(x_0)=y(0)=1$ deci obţinem

$$y^{'}(0)=-\frac{0+1}{3+0-2}=-1$$

Pentru calculul lui $y^{''}(x)$ derivăm relaţia de mai sus

$$y^{''}(x) \overset{def}{=} \left(y^{'}(x)\right)^{'} = \left(-\frac{3x^2+y(x)}{3y^2(x)+x-2y(x)}\right)^{'} = -\left(\frac{3x^2+y(x)}{3y^2(x)+x-2y(x)}\right)^{'} =$$

$$= -\frac{\left[3x^2+y(x)\right]^{'}\left[3y^2(x)+x-2y(x)\right]-\left[3x^2+y(x)\right]\left[3y^2(x)+x-2y(x)\right]^{'}}{\left[3y^2(x)+x-2y(x)\right]^2} =$$

$$= -\frac{\left[6x+y^{'}(x)\right]\left[3y^2(x)+x-2y(x)\right]-\left[3x^2+y(x)\right]\left[6y(x)\,y^{'}(x)+1-2y^{'}(x)\right]}{\left[3y^2(x)+x-2y(x)\right]^2}$$

iar acum $y^{'}(x)$ se înlocuieşte i vom obţine $y^{''}(x)$ apoi imediat $y^{''}(0) = \cdots$

**Observaţie: cu ajutorul cantităţii $y^{''}(x)$ de poate preciza ceva despre concavitatea funcţiei. Astfel dacă $y^{''}(x) \geq 0$ în vecinătatea lui $x_0$ atunci $y$ este convexă în vecinătatea lui $x_0$. Dacă $y^{''}(x) \leq 0$ in vecinătatea lui $x_0$ atunci $y$ este concavă în vecinătatea lui $x_0$.**

**Observaţie: Cu ajutorul derivatelor de mai sus putem scrie şi diferenţialele înlocuind $y^{'}(x)$ şi $y^{''}(x)$ în**

$$dy(x) \overset{def}{=} y^{'}(x)\,dx$$
$$d^2y(x) \overset{def}{=} y^{''}(x)\,dx^2$$

$b)$ Ecuaţia $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ =arctg$\dfrac{y}{x}$ defineşte pe $y$ ca funcţie de $x$ deci putem scrie

$$\ln\sqrt{x^2+y^2(x)} = \operatorname{arctg}\frac{y(x)}{x}$$

pe care o vom deriva:

$$\left(\ln\sqrt{x^2+y^2(x)}\right)^{'} = \left(\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{x}\right)^{'} \Leftrightarrow \left(\ln\left[x^2+y^2(x)\right]^{1/2}\right)^{'} = \left(\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{x}\right)^{'} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2(x)\right)^{'} = \left(\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{x}\right)^{'} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2(x)}\left(x^2+y^2(x)\right)^{'} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)^2}\left(\frac{y(x)}{x}\right)^{'} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+2y(x)\,y^{'}(x)}{2\left(x^2+y^2(x)\right)} = \frac{x^2}{x^2+y^2(x)}\frac{y^{'}(x)\,x-y(x)}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+y(x)\,y^{'}(x) = y^{'}(x)\,x-y(x) \Leftrightarrow y^{'}(x) = \frac{x+y(x)}{x-y(x)}$$

Imediat se poate obţine şi $y^{''}(x) = \left(y^{'}(x)\right)^{'} = \left(\dfrac{x+y(x)}{x-y(x)}\right)^{'} = \cdots$

7. Să se calculeze $z_x^{'},\ z_y^{'},\ dz,\ d^2z$ , pentru funcţia $z(x,y)$ dată implicit de ecuaţiile:

   $a)$ $(x+y)\,e^z - xy - z = 0$ ,în punctul $(2,2,0)$, $b)$ $z$ =arctg$\dfrac{x}{z+y} - y$

   Rezolvare:

**Ecuaţia dată este de tipul $F(x,y,z)=0$ şi defineşte implicit funcţia $z=z(x,y)$.**

**Mai întâi vom rescrie ecuaţia dată cu $z(x,y)$ in loc de $z$ şi apoi vom deriva parţial în raport cu şi $x$ şi cu $y$.**

$a)$ ecuaţia rescrisă este $(x+y)e^{z(x,y)}-xy-z(x,y)=0$. Variabilele în această ecuaţie sunt $x$ şi $y$. Să derivăm parţial această ecuaţie. Avem $\begin{cases} \left((x+y)e^{z(x,y)}-xy-z(x,y)\right)_x^{'}=0 \\ \left((x+y)e^{z(x,y)}-xy-z(x,y)\right)_y^{'}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x+y)_x^{'}e^{z(x,y)}+(x+y)\left(e^{z(x,y)}\right)_x^{'}-y-z_x^{'}(x,y)=0 \\ (x+y)_y^{'}e^{z(x,y)}+(x+y)\left(e^{z(x,y)}\right)_y^{'}-x-z_y^{'}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^{z(x,y)}+(x+y)e^{z(x,y)}z_x^{'}(x,y)-y-z_x^{'}(x,y)=0 \\ e^{z(x,y)}+(x+y)e^{z(x,y)}z_y^{'}(x,y)-x-z_y^{'}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_x^{'}(x,y)=\dfrac{y-e^{z(x,y)}}{(x+y)e^{z(x,y)}-1} \\ z_y^{'}(x,y)=\dfrac{x-e^{z(x,y)}}{(x+y)e^{z(x,y)}-1} \end{cases}$$

Acum vom înlocui derivatele de mai sus în expresia diferenţialei

$$dz(x,y)=z_x^{'}(x,y)\,dx+z_y^{'}(x,y)\,dy$$

şi respectiv

$$dz(2,2)=z_x^{'}(2,2)\,dx+z_y^{'}(2,2)\,dy$$

Se poate calcula similar

$$\begin{aligned} z_{xx}^{''}(x,y) &= \left(z_x^{'}(x,y)\right)_x^{'}=\left(\frac{y-e^{z(x,y)}}{(x+y)e^{z(x,y)}-1}\right)_x^{'}=\cdots \\ z_{yy}^{''}(x,y) &= \left(z_y^{'}(x,y)\right)_y^{'}=\left(\frac{x-e^{z(x,y)}}{(x+y)e^{z(x,y)}-1}\right)_y^{'}=\cdots \\ z_{xy}^{''}(x,y) &= \left(z_x^{'}(x,y)\right)_y^{'}=\left(\frac{y-e^{z(x,y)}}{(x+y)e^{z(x,y)}-1}\right)_y^{'}=\cdots \end{aligned}$$

şi apoi folosim formula

$$d^2z(x,y)=z_{xx}^{''}(x,y)\,dx^2+z_{yy}^{''}(x,y)\,dy^2+2z_{xy}^{''}(x,y)\,dxdy$$

şi respectiv

$$d^2z(2,2)=z_{xx}^{''}(2,2)\,dx^2+z_{yy}^{''}(2,2)\,dy^2+2z_{xy}^{''}(2,2)\,dxdy$$

8. Să se calculeze derivatele $y^{'}$, $z^{'}$ şi diferenţialele $dy$, $dz$ ale funcţiilor definite implicit de sistemul $\begin{cases} x^3+3y^2-z^2+x-y-8=0 \\ 2x^2-4y-6z-6=0 \end{cases}$ in punctul $A(1,2,-2)$.

Rezolvare:

**Avem un sistem de tipul** $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ **care defineşte implicit funcţiile $y=y(x)$ şi $z=z(x)$.**

**Mai întâi vom rescrie ecuaţia dată cu $y(x)$ in loc de $y$ şi $z(x)$ în loc de $z$ apoi vom deriva în raport cu şi $x$ ambele ecuaţii.**

Să rescriem sistemul $\begin{cases} x^3 + 3y^2(x) - z^2(x) + x - y(x) - 8 = 0 \\ 2x^2 - 4y(x) - 6z(x) - 6 = 0 \end{cases}$ şi vom obţine derivând în raport cu $x$:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y(x)\,y'(x) - 2z(x)\,z'(x) + 1 - y'(x) - 0 = 0 \\ 4x - 4y'(x) - 6z'(x) - 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6y(x)\,y'(x) - 2z(x)\,z'(x) + 1 - y'(x) - 0 = 0 \\ 4x - 4y'(x) - 6z'(x) - 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (6y(x) - 1)\,y'(x) - 2z(x)\,z'(x) = -3x^2 - 1 \\ 4y'(x) + 6z'(x) = 4x \end{cases}$$

care este un sistem liniar în necunoscutele $y'(x)$ şi $z'(x)$