Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

SEMINARUL 2.

Cap. I_Şiruri de numere reale (continuare)

1. Folosind lema lui Stolz să se calculeze limitele şirurilor date de:

   $a)\ x_n = \dfrac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}^*$,

   $b)\ x_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}}$.

   Rezolvare:

   Aplicăm *Lema lui Stolz-Cezaro: Fie* $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ *două şiruri a.î. şirul* $(b_n)_n$ *este strict monoton şi nemărginit. Dacă există* $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A$ *atunci există şi* $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ *şi este egală tot cu* A.

   $a)$ Notăm $a_n = 1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p$, $b_n = n^{p+1}$ şi observăm că şirul $b_n = n^{p+1}$ pentru $p \in \mathbb{N}^*$, este crescător la infinit (deci nemărginit). Studiem limita $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. Pentru aceasta scriem

   $$a_{n+1} = 1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p + (2n+1)^p$$
   $$b_{n+1} = (n+1)^p$$

   Deci

   $$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}$$
   $$= \frac{(2n+1)^p}{\left[n^{p+1} + C_{p+1}^1\ n^p + C_{p+1}^2\ n^{p-1} + \cdots + C_{p+1}^{p-1}\ n^2 + C_{p+1}^p\ n + 1\right] - n^{p+1}}$$
   $$= \frac{(2n)^p + C_p^1\ (2n)^{p-1} + C_p^2\ (2n)^{p-2} + \cdots + C_p^{p-1}\ (2n)^1 + 1}{C_{p+1}^1\ n^p + C_{p+1}^2\ n^{p-1} + \cdots + C_{p+1}^{p-1}\ n^2 + C_{p+1}^p\ n + 1}$$

   Dar, din limita fundamentală 6), din Seminarul 1., exerciţiul 4 (gradul numărătorului egal cu gradul numitorului), obţinem că

   $$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{2^p}{C_{p+1}^1} = \frac{2^p}{p+1}$$

   Deci $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2^p}{p+1}$

   $b)$ Notăm $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}}$, $b_n = n$ şi observăm că şirul $b_n = n$ este crescător la infinit (deci nemărginit). Avem că

   $$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}}$$

deci

$$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}}$$
$$=\frac{n+1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}}$$

iar $b_{n+1}=n+1$. Deci

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{\frac{n+1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}}}{(n+1)-n}$$
$$=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{n+1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}}$$

Pentru a calcula această limită mai aplicăm o dată *Lema lui Stolz* cu notaţiile $\bar{a}_n=n+1$, $\bar{b}_n=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}$. Avem că, evident $\left(\bar{b}_n\right)$ este crescător, iar $\bar{b}_n\geq\sqrt{n+1}$ deci $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\bar{b}_n=\infty$. Acum

$$\frac{\bar{a}_{n+1}-\bar{a}_n}{\bar{b}_{n+1}-\bar{b}_n}=$$
$$=\frac{(n+2)-(n+1)}{\left[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right]-\left[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}\right]}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Deci există

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{\bar{a}_{n+1}-\bar{a}_n}{\bar{b}_{n+1}-\bar{b}_n}=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}=\frac{1}{\infty}=0$$

adică există şi

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n}=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{n+1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}}=0$$

Iar acum dacă există

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{n+1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}}=0$$

avem că există şi

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}}}{n}=0.$$

Observaţie: Am folosit următoarele:

Binomul lui Newton

$$\boxed{(a+1)^p=a^p+C_p^1\,a^{p-1}+C_p^2\,a^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}\,a+1\text{ , unde }p\in\mathbb{N}^*}$$

şi faptul că

$$\boxed{C_{p+1}^1=p+1}$$

2. Se consideră şirul $(a_n)_n$, $a_0 > 0$, $a_{n+1} = a_n 2^{-a_n}$. Să se arate că şirul $(a_n)_n$ este convergent şi să se calculeze limita sa şi limita şirului $(na_n)_n$.

Rezolvare:

Avem, din $a_0 > 0$, că $a_1 = a_0 2^{-a_0} > 0$, $a_2 = a_1 2^{-a_1} > 0$ ş.a.m.d. deci prin inducţie avem că

$$a_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dar $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-a_n} = \dfrac{1}{2^{a_n}} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Deci şirul este descrescător dar şi mărginit inferior de 0 deci el este convergent. Fie $\lim\limits_{n\mapsto\infty} a_n = l$. Dacă trecem la limită în relaţia de recurenţă atunci obţinem $l = l\, 2^{-l}$. Acum dacă $l \neq 0$ atunci

$$l = l\, 2^{-l} \Leftrightarrow 1 = 2^{-l} \Leftrightarrow 2^l = 1 \Leftrightarrow l = 0,$$

contradicţie. Deci $l = 0$.

Acum $\lim\limits_{n\mapsto\infty} na_n = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \dfrac{n}{\frac{1}{a_n}}$. Aplic *Lema lui Stolz*, având în vedere că $a_n \to 0$ şi că (a_n) este descrescător implică faptul că $(1/a_n)_n$ este nemărginit şi crescător. Deci

$$\lim_{n\mapsto\infty} na_n = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_{n+1}a_n}{a_n - a_{n+1}}$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_n 2^{-a_n} a_n}{a_n - a_n 2^{-a_n}} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_n^2 2^{-a_n}}{a_n\left(1 - 2^{-a_n}\right)} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_n 2^{-a_n}}{1 - 2^{-a_n}}$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_n}{2^{a_n}\left(1 - 1/2^{a_n}\right)} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_n}{2^{a_n} - 1} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{1}{\frac{2^{a_n}-1}{a_n}} = \frac{1}{\ln 2}$$

Observaţie: Am folosit limita

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a, \ \text{pentru şirul } x_n \to 0$$

3. Folosind criteriul raportului al lui Cauchy-D'Alembert să se calculeze limita şirurilor date de:

$a)$ $x_n = \sqrt[n]{n! \prod\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{\pi}{k}}$, $b)$ $x_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+2n)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat

Rezolvare:

Aplicăm *Teorema: Fie şirul (a_n) cu termeni $a_n > 0, \forall n \in N$. Presupunem că există $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Atunci există şi $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{a_n}$ şi este egală tot cu l.*

$a)$ Notăm cu $a_n = n! \prod\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{\pi}{k}$ deci $x_n = \sqrt[n]{a_n}$. Vom studia limita pentru cantitatea

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \prod\limits_{k=1}^{n+1} \sin\frac{\pi}{k}}{n! \prod\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi}{k}} = \frac{(n+1)! \sin\frac{\pi}{1} \sin\frac{\pi}{2} \cdots \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{\pi}{n+1}}{n! \sin\frac{\pi}{1} \sin\frac{\pi}{2} \cdots \sin\frac{\pi}{n}}$$
$$= (n+1)\sin\frac{\pi}{n+1}$$

Deci

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\mapsto\infty}(n+1)\sin\frac{\pi}{n+1}=$$
$$=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}=\pi\lim_{n\mapsto\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}}=\pi,$$

deoarece $\frac{\pi}{n+1}\to 0$. Concluzia este că

$$\lim_{n\mapsto\infty}x_n=\lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\pi.$$

$b)$ Avem că $x_n=\sqrt[n]{\dfrac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+2n)}{n^n}}$ deci să notăm cu

$$a_n=\frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+2n)}{n^n}$$

Avem

$$a_{n+1}=\frac{[\alpha+(n+1)][\alpha+(n+1)+1]\cdots[\alpha+2(n+1)]}{(n+1)^{n+1}}$$

Deci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)\cdots(\alpha+2n+2)}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+2n)}$$
$$=\frac{n^n}{(n+1)^n}\frac{(\alpha+2n+1)(\alpha+2n+2)}{(n+1)(\alpha+n)}=\frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}}\frac{4n^2+\dots}{n^2+\dots}$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\frac{4n^2+\dots}{n^2+\dots}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{4n^2+\dots}{n^2+\dots}$$

Deci $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\mapsto\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\dfrac{4n^2+\dots}{n^2+\dots}=\dfrac{4}{e}$ de unde obţinem că

$$\lim_{n\mapsto\infty}x_n=\lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4}{e}$$

Observaţie: Am folosit următoarele limite importante

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1,\ \text{pentru şirul } x_n\to 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e,\ \text{pentru şirul } x_n\to 0$$

4. Să se calculeze limitele şirurilor date de:

$a)$ $x_n=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}\right]^n$, $b)$ $x_n=\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n+2}\right)^{n^2+1}$, $c)$ $x_n=\left(1+\dfrac{2^n}{3^n+4^n}\right)^{-2^n}$.

Rezolvare:

$a)$ Avem că

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

deci

$$\begin{aligned} x_n &= \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right]^n \\ &= \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]^n = \left[1-\frac{1}{n+1}\right]^n \end{aligned}$$

Observăm că suntem în nedeterminarea 1^∞ deci

$$x_n = \left\{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right\}^{n\frac{-1}{n+1}}.$$

Vom avea, folosind limita fundamentală cu e (vezi exerciţiul anterior), că

$$\lim_{n\mapsto\infty} x_n = e^{\lim\limits_{n\mapsto\infty}\frac{-n}{n+1}} = e^{-1}.$$

$b)$ Suntem în nedeterminarea 1^∞.

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+2}\right)^{n^2+1} \\ &= \left(1+\frac{n^2+n+1}{n^2+n+2}-1\right)^{n^2+1} = \left\{\left(1+\frac{-1}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{-1}}\right\}^{\left(n^2+1\right)\frac{-1}{n^2+n+2}} \end{aligned}$$

deci

$$\lim_{n\mapsto\infty} x_n = e^{\lim\limits_{n\mapsto\infty}\dfrac{-n^2-1}{n^2+n+2}} = e^{-1}.$$

$c)$ Avem, având în vedere că $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, dacă $|q| < 1$, că

$$\frac{2^n}{3^n+4^n} = \frac{2^n}{4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right)} = \left(\frac{2}{4}\right)^n\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1} \to 0\frac{1}{0+1} = 1$$

Deci suntem în nedeterminarea 1^∞. Facem atunci transformările

$$x_n = \left(1+\frac{2^n}{3^n+4^n}\right)^{-2^n} = \left\{\left(1+\frac{2^n}{3^n+4^n}\right)^{\frac{3^n+4^n}{2^n}}\right\}^{\frac{2^n}{3^n+4^n}\left(-2^n\right)}$$

deci

$$\begin{aligned} \lim_{n\mapsto\infty} x_n &= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n+4^n}\left(-2^n\right)} = e^{\lim\limits_{n\mapsto\infty}\frac{-4^n}{3^n+4^n}} = e^{-\lim\limits_{n\mapsto\infty}\frac{4^n}{4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right)}} \\ &= e^{-\lim\limits_{n\mapsto\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}} = e^{-\frac{1}{0+1}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

5. Să se determine parametrii a, b, c a.î.:

$a)$ $\lim\limits_{n\mapsto\infty} n\left(an-\sqrt{-2+bn+cn^2}\right) = 1$,

$b)$ $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^3}-an^2-bn-c\right) = 0$.

Rezolvare:

$a)$

$$
\begin{aligned}
&n\left(an-\sqrt{-2+bn+cn^2}\right)=n\left(\sqrt{a^2n^2}-\sqrt{-2+bn+cn^2}\right)\\
&=(\text{raţionalizare})=n\frac{a^2n^2-\left(-2+bn+cn^2\right)}{\sqrt{a^2n^2}+\sqrt{-2+bn+cn^2}}=n\frac{a^2n^2+2-bn-cn^2}{an+\sqrt{-2+bn+cn^2}}\\
&=\frac{\left(a^2-c\right)n^3-bn^2+2n}{an+\sqrt{-2+bn+cn^2}}.
\end{aligned}
$$

Acum dacă $a^2-c\neq 0$ atunci avem

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(a^2-c\right)n^3-bn^2+2n}{an+\sqrt{-2+bn+cn^2}}&=\frac{n^3\left(\left(a^2-c\right)-b/n+2/n^2\right)}{n\left(a+\sqrt{-2/n^2+b/n+c}\right)}\\
&=n^2\frac{\left(a^2-c\right)-b/n+2/n^2}{a+\sqrt{-2/n^2+b/n+c}}\to\infty\frac{\left(a^2-c\right)-0+0}{a+\sqrt{-0+0+c}}=\infty
\end{aligned}
$$

Deci dacă cerem ca limita să fie 1 (finită) atunci avem

$$a^2-c=0$$

Atunci

$$n\left(an-\sqrt{-2+bn+cn^2}\right)=\frac{-bn^2+2n}{an+\sqrt{-2+bn+cn^2}}$$

Acum dacă $b\neq 0$ atunci

$$
\begin{aligned}
\frac{-bn^2+2n}{an+\sqrt{-2+bn+cn^2}}&=\frac{n^2\left(-b+2/n\right)}{n\left(a+\sqrt{-2/n^2+b/n+c}\right)}\\
&=n\frac{-b+2/n}{a+\sqrt{-2/n^2+b/n+c}}\to\infty\frac{-b}{a+\sqrt{-0+0+c}}=\infty
\end{aligned}
$$

Deci dacă cerem ca limita să fie 1 (finită) atunci avem

$$b=0$$

Deci

$$
\begin{aligned}
&n\left(an-\sqrt{-2+bn+cn^2}\right)=\frac{2n}{an+\sqrt{-2+cn^2}}\\
&=\frac{2n}{n\left(a+\sqrt{-2/n^2+c}\right)}=\frac{2}{a+\sqrt{-2/n^2+c}}\to\frac{2}{a+\sqrt{-0+c}}=\frac{2}{a+\sqrt{c}}.
\end{aligned}
$$

Vom impune

$$\frac{2}{a+\sqrt{c}}=1$$

adică

$$c=a^2,\ b=0,\ a+\sqrt{c}=2$$

deci

$$a+\sqrt{a^2}=2\Leftrightarrow a+|a|=2\Leftrightarrow a=1$$

şi atunci

$$a=1,b=0,c=1$$

b)

$$\sqrt{n^4+2n^3}-an^2-bn-c=\sqrt{n^4+2n^3}-\left(an^2+bn+c\right)$$
$$=\frac{\left(n^4+2n^3\right)-\left(an^2+bn+c\right)^2}{\sqrt{n^4+2n^3}+\left(an^2+bn+c\right)}$$
$$=\frac{\left(1-a^2\right)n^4+\left(2-2ab\right)n^3-\left(b^2+2ac\right)n^2-2bcn-c^2}{\sqrt{n^4+2n^3}+\left(an^2+bn+c\right)}.$$

Acum ca în a) trebuie să luăm (deoarece gradul numărătorului este 4 iar puterea maximă a lui n de la numitor este 2)

$$1-a^2=0,\ 2-2ab=0$$

Apoi

$$\sqrt{n^4+2n^3}-an^2-bn-c=\frac{-\left(b^2+2ac\right)n^2-2bcn-c^2}{\sqrt{n^4+2n^3}+\left(an^2+bn+c\right)}$$
$$=\frac{n^2\left(-\left(b^2+2ac\right)-2bc/n-c^2/n^2\right)}{n^2\left(\sqrt{1+2/n}+a+b/n+c/n^2\right)}$$
$$=\frac{-\left(b^2+2ac\right)-2bc/n-c^2/n^2}{\sqrt{1+2/n}+a+b/n+c/n^2}\to\frac{-\left(b^2+2ac\right)-0-0}{\sqrt{1+0}+a+0+0}$$

Deci dacă cerem ca limita să fie 0 atunci

$$\frac{-\left(b^2+2ac\right)}{1+a}=0\Leftrightarrow b^2+2ac=0$$

Rezolvând sistemul găsim soluţia

$$a=1,b=-1,c=-1/2$$

şi

$$a=-1,b=1,c=1/2$$

6. Să se determine limita superioară şi limita inferioară a şirurilor date de:

a) $a_n=\left(n-\sqrt{n^2-2n+3}\right)^n$, *b)* $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$, *c)* $a_n=\sin\frac{n\pi}{3}$,

d) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cos n\pi}$, *e)* $a_n=\cos\frac{n\pi}{2}$, *f)* $a_n=\left(1-\frac{1}{3n^3}\right)^{n^3}$, *g)* $a_n=\left(-1/2\right)^n+\left(-1\right)^n$.

Rezolvare:

Pentru a determina limita superioară şi inferioară trebuie să calculăm limitele pentru subşiruri alese convenabil (astfel încât să acopere întregul şir), şi apoi cea mai mică dintre ele este limita inferioară, iar cea mai mare este limita superioară a şirului.

a) Avem că $a_n=x_n+y_n$, unde $x_n=\left(n-\sqrt{n^2-2n+3}\right)^n$, $y_n=\sin\frac{n\pi}{2}$. Pentru (y_n) avem

$$y_{4n}=\sin\frac{4n\pi}{2}=\sin 2n\pi=0\to 0,$$
$$y_{4n+1}=\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1\to 1,$$
$$y_{4n+2}=\sin\frac{(4n+2)\pi}{2}=\sin\left(2n\pi+\pi\right)=\sin\pi=0\to 0,$$
$$y_{4n+3}=\sin\frac{(4n+3)\pi}{2}=\sin\left(2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1\to -1.$$

Pentru (x_n) avem

$$
\begin{aligned}
& n-\sqrt{n^2-2n+3}=\frac{n^2-n^2+2n-3}{n+\sqrt{n^2-2n+3}}=\frac{2n-3}{n+\sqrt{n^2-2n+3}} \\
& =\frac{n\,(2-3/n)}{n\left(1+\sqrt{1-2/n+3/n^2}\right)}=\frac{2-3/n}{1+\sqrt{1-2/n+3/n^2}} \\
& \to \frac{2-0}{1+\sqrt{1-0+0}}=1\to 1\ ,\ n\to\infty
\end{aligned}
$$

adică avem nedeterminarea 1^{∞}. Deci

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(n-\sqrt{n^2-2n+3}\right)^n=\left(1+n-\sqrt{n^2-2n+3}-1\right)^n \\
&= \left\{\left(1+n-\sqrt{n^2-2n+3}-1\right)^{\frac{1}{n-\sqrt{n^2-2n+3}-1}}\right\}^{n\left(n-\sqrt{n^2-2n+3}-1\right)}
\end{aligned}
$$

şi

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\mapsto\infty} x_n &= e^{\lim\limits_{n\mapsto\infty} n\left(n-\sqrt{n^2-2n+3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{n\mapsto\infty} n\frac{(n-1)^2-\left(n^2-2n+3\right)}{n-1+\sqrt{n^2-2n+3}}} \\
&= e^{\lim\limits_{n\mapsto\infty} n\frac{-2}{n-1+\sqrt{n^2-2n+3}}}=e^{\lim\limits_{n\mapsto\infty}\frac{-2n}{n-1+\sqrt{n^2-2n+3}}}=e^{\lim\limits_{n\mapsto\infty}\frac{-2n}{n\left(1-1/n+\sqrt{1-2/n+3/n^2}\right)}} \\
&= e^{\lim\limits_{n\mapsto\infty}\frac{-2}{1-1/n+\sqrt{1-2/n+3/n^2}}}=e^{\frac{-2}{1-0+\sqrt{1-0+0}}}=e^{-1}
\end{aligned}
$$

deci, evident, orice subşir al lui converge la aceeaşi valoare

$$x_{4n}\to e^{-1},\ x_{4n+1}\to e^{-1},\ x_{4n+2}\to e^{-1},\ x_{4n+3}\to e^{-1},\ n\to\infty$$

Deci $a_{4n}=x_{4n}+y_{4n}\to e^{-1}+0$, $a_{4n+1}=x_{4n+1}+y_{4n+1}\to e^{-1}+1$, $a_{4n+2}=x_{4n+2}+y_{4n+2}\to e^{-1}+0$, $a_{4n+3}=x_{4n+3}+y_{4n+3}\to e^{-1}-1$, pentru $n\to\infty$. Avem că mulţimea punctelor limită este $\left\{e^{-1}-1,e^{-1},e^{-1}+1\right\}$ deci $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n=e^{-1}-1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n=e^{-1}+1$.

$b)$ Temă (din cauza termenului $\sin\dfrac{n\pi}{3}$ trebuie să calculăm a_{6n}, a_{6n+1}, a_{6n+2}, a_{6n+3}, a_{6n+4}, a_{6n+5} iar pentru $y_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n\cos n\pi}$ folosim limita cu e).

7. Calculaţi limita şirului $(a_n)_n$, unde:

$a)$ $a_n=\frac{n}{q^n}$ cu $q>1$, $b)$ $a_n=\frac{q^n}{n!}$ cu $q\in\mathbb{R}$, $c)$ $a_n=nq^n$ cu $|q|<1$,

$d)$ $a_n=\left(\dfrac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$ cu $a,b>0$, $e)$ $x_n=\dfrac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$ cu $a,b\in\mathbb{R}$,

$f)$ $a_n=\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n+1}}$, $g)$ $a_n=\left(\dfrac{1}{5^n+1}\right)^{\frac{n+1}{n+5}}$, $h)$ $a_n=\left(\dfrac{2^n+1}{3^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$.