Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

SEMINARUL 4.

Cap. II_Serii de numere reale (continuare)

1. Folosind **criteriul de condensare**, să se determine natura seriilor:
$a)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$, $b)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$, $c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$, $p\in\mathbb{R}$ (seria armonică generalizată), $d)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$.

Rezolvare:

Aplicăm *Teorema: Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *o serie cu termeni pozitivi (adică* $u_n\geq 0$*). Presupunem că şirul* $(u_n)_n$ *este descrescător.*
Atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}2^n u_{2^n}$$

(cele două serii au aceeaşi natura)

$a)\ u_n=\dfrac{\ln n}{n}$ şi evident $u_n>0$. Deci $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ este o serie cu termeni pozitivi. Pe de altă parte şirul $u_n=\dfrac{\ln n}{n}$ este descrescător (vezi Seminarul 3, exerciţiul 4).
Studiem seria

$$\sum_{n=2}^{\infty}2^n u_{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}2^n\tfrac{\ln 2^n}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}2^n\tfrac{n\ln 2}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}n\ln 2$$

Dar $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n$ este divergentă deoarece termenul general $a_n=n\to\infty$ (adică nu tinde la 0, vezi Seminarul 3., exerciţiul 2) iar

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\ln 2=\ln 2\sum_{n=2}^{\infty}n$$

Deci seria $\ln 2\sum\limits_{n=2}^{\infty}n$ este divergentă şi prin urmare $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ este divergentă.

$b)\ u_n=\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ şi evident $u_n>0$. Deci $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ este o serie cu termeni pozitivi. Pe de altă parte şirul $u_n=\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ este descrescător deoarece

$$u_n=\tfrac{1}{n\ln^2 n}>\tfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}=u_{n+1}$$

Studiem seria

$$\sum_{n=2}^{\infty}2^n u_{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}2^n\tfrac{1}{2^n(\ln 2^n)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\tfrac{1}{(n\ln 2)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\tfrac{1}{n^2\ln^2 2}$$

Dar $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă deoarece este seria armonică generalizată cu $p = 2$, iar

$$\sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{1}{n^2 \ln^2 2} = \tfrac{1}{\ln^2 2} \sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{1}{n^2}$$

Deci seria $\dfrac{1}{\ln^2 2} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă şi prin urmare $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ este convergentă.

$c)$ $u_n = \dfrac{1}{n^p}$. Considerăm cazurile:

1) Cazul $p > 0$ şi atunci $(n^p)_n$ este crescător deci şirul $(u_n)_n$ descreşte deci putem aplica *Criteriul condensării*.

Studiem seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \tfrac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

Acum dacă $p > 1 \Leftrightarrow p - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^{p-1} > 2^0 = 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{2^{p-1}} < 1$ deci seria geometrică de mai sus este cu raţia $q = \dfrac{1}{2^{p-1}} \in (0, 1)$ adică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ este convergentă deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Dacă $p < 1 \Leftrightarrow p - 1 < 0 \Leftrightarrow 2^{p-1} < 2^0 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^{p-1}} > 1$ deci seria geometrică de mai sus este cu raţia $q = \dfrac{1}{2^{p-1}} \in (1, \infty)$ adică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ este divergentă deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

2) Cazul $p < 0$. Atunci $u_n = \dfrac{1}{n^p} = n^{-p} \to \infty^{-p} = \infty$ deoarece $-p > 0$ deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă (nefiind satisfăcută condiţia necesară de convergenţă).

3) Cazul $p = 0$. Atunci $u_n = \dfrac{1}{n^p} = \dfrac{1}{n^0} = 1 \to 1 \neq 0$ deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă (nefiind satisfăcută condiţia necesară de convergenţă).

Observaţie: Am folosit următoarele:

1)

$$\begin{aligned} \ln x &> 0\,,\ \forall x \in (1, \infty) \\ \ln x &< 0\,,\ \forall x \in (0, 1) \\ \ln 1 &= 0 \end{aligned}$$

2) Funcţia $\ln x$ este crescătoare pentru $x \in (0, \infty)$

3) Are loc egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\, u_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$$

(constatele ies în faţa seriei)

4) **Seria geometrică**

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{convergentă}\,,\ \text{dacă}\ |q| < 1 \\ \text{divergentă}\,,\ \ \text{dacă}\ |q| \geq 1 \end{cases}$$

2. Folosind **criteriul rădăcinii al lui Cauchy**, să se determine natura seriilor:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^{2n+1}$, $b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+5}-n\right)^{n^2}$,

$c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+5}\right)^{n^2}$.

Rezolvare:

Aplicăm *Teorema: Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi (adică* $u_n \geq 0$*). Presupunem că există*

$$\lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{u_n}=k$$

Atunci

a) Dacă $k<1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă;*

b) Dacă $k>1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă;*

c) *Dacă* $k=1$ *atunci nu putem preciza nimic.*

$a)$ Evident $u_n=\left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^{2n+1}>0$. Calculăm limita pentru

$$\lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{\left(\tfrac{2n+3}{n+1}\right)^{2n+1}}=\lim_{n\mapsto\infty}\left[\left(\tfrac{2n+3}{n+1}\right)^{2n+1}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\mapsto\infty}\left(\tfrac{2n+3}{n+1}\right)^{\frac{2n+1}{n}}=2^2=4>1$$

deoarece $\dfrac{2n+3}{n+1}\to 2$, $\dfrac{2n+1}{n}\to 2$. Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

$b)$ $u_n=\left(\sqrt{n^2+2n+5}-n\right)^{n^2}>0$ evident. Calculăm

$$\lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{\left(\sqrt{n^2+2n+5}-n\right)^{n^2}}=\lim_{n\mapsto\infty}\left[\left(\sqrt{n^2+2n+5}-n\right)^{n^2}\right]^{\dfrac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\mapsto\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+5}-n\right)^{\dfrac{n^2}{n}}=\lim_{n\mapsto\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+5}-n\right)^{n}$$

Raţionalizând obţinem

$$\sqrt{n^2+2n+5}-n=\tfrac{\left(n^2+2n+5\right)-n^2}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}=\tfrac{2n+5}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}$$

$$=\tfrac{n(2+5/n)}{n\left(\sqrt{1+2/n+5/n^2}+1\right)}=\tfrac{2+5/n}{\sqrt{1+2/n+5/n^2}+1}\to\tfrac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=1$$

Deci $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{u_n}$ =nedeterminarea 1^∞.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\mapsto\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+5}-n\right)^n=\lim_{n\mapsto\infty}\left(\tfrac{2n+5}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}\right)^n\\
&=\lim_{n\mapsto\infty}\left(1+\tfrac{2n+5}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}-1\right)^n\\
&=\lim_{n\mapsto\infty}\left(1+\tfrac{2n+5-\sqrt{n^2+2n+5}-n}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}\right)^n\\
&=\lim_{n\mapsto\infty}\left[\left(1+\tfrac{n+5-\sqrt{n^2+2n+5}}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}\right)^{\frac{\sqrt{n^2+2n+5}+n}{n+5-\sqrt{n^2+2n+5}}}\right]^{\frac{n+5-\sqrt{n^2+2n+5}}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}n}\\
&=e^{\lim\limits_{n\mapsto\infty}\frac{n+5-\sqrt{n^2+2n+5}}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}n}
\end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\mapsto\infty}\tfrac{n+5-\sqrt{n^2+2n+5}}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}n=\lim_{n\mapsto\infty}\tfrac{(n+5)^2-\left(n^2+2n+5\right)}{n+5+\sqrt{n^2+2n+5}}\tfrac{1}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}n\\
&=\lim_{n\mapsto\infty}\tfrac{n^2+10n+25-n^2-2n-5}{n+5+\sqrt{n^2+2n+5}}\tfrac{n}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}=\lim_{n\mapsto\infty}\tfrac{8n^2+20n}{n+5+\sqrt{n^2+2n+5}}\tfrac{1}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}\\
&=\lim_{n\mapsto\infty}\tfrac{n^2(8+20/n)}{n\left(1+5/n+\sqrt{1+2/n+5/n^2}\right)}\tfrac{1}{n\left(\sqrt{1+2/n+5/n^2}+1\right)}\\
&=\lim_{n\mapsto\infty}\tfrac{8+20/n}{1+5/n+\sqrt{1+2/n+5/n^2}}\tfrac{1}{\sqrt{1+2/n+5/n^2}+1}=\tfrac{8+0}{1+0+\sqrt{1+0+0}}\tfrac{1}{\sqrt{1+0+0}+1}=\tfrac{8}{2\cdot 2}=2
\end{aligned}$$

Deci $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{u_n}=e^2>1$ adică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ este divergentă.

$c)$ Avem $u_n=\left(\dfrac{n}{n+5}\right)^{n^2}>0$. Temă (de calculat $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{u_n}$ folosind limita fundamentală cu e).

3. Folosind **criteriul raportului al lui D'Alembert**, să se determine natura seriilor:

   $a)$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}3^n tg\dfrac{\pi}{2^n}$, $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^p}$, $a>0,\ p\in\mathbb{R}$,

   $c)$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\cdots(2-\sqrt[n]{e})\,4^n$, $d)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(an)^n}{n!}$, $a>0$.

   Rezolvare:

   Aplicăm *Teorema: Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *o serie cu termeni pozitivi cu* $u_n>0$. *Presupunem că există*

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=k$$

   Atunci

   a) Dacă $k<1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *este convergentă;*

   b) Dacă $k>1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *este divergentă;*

   c) *Dacă* $k=1$ *atunci nu putem preciza nimic.*

a) $u_n = 3^n tg\dfrac{\pi}{2^n} > 0$. Calculăm limita pentru

$$\begin{aligned}
\lim_{n\mapsto\infty}\tfrac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\mapsto\infty}\frac{3^{n+1}tg\frac{\pi}{2^{n+1}}}{3^n tg\frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\mapsto\infty}3\frac{tg\frac{\pi}{2^{n+1}}}{tg\frac{\pi}{2^n}}\\
&= \lim_{n\mapsto\infty}3\frac{tg\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{tg\frac{\pi}{2^n}}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n\mapsto\infty}3\frac{tg\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{tg\frac{\pi}{2^n}}2\\
&= 3\cdot 1\cdot 1\cdot 2 = 6 > 1
\end{aligned}$$

deoarece $\dfrac{\pi}{2^n}, \dfrac{\pi}{2^{n+1}} \to 0$, deci $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ este divergentă.

b) $u_n = \dfrac{a^n}{n^p}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\mapsto\infty}\tfrac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\mapsto\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^p}}{\frac{a^n}{n^p}} = \lim_{n\mapsto\infty}\tfrac{a^{n+1}}{(n+1)^p}\tfrac{n^p}{a^n}\\
&= \lim_{n\mapsto\infty}a\tfrac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\mapsto\infty}a\left(\tfrac{n}{n+1}\right)^p = a\cdot 1^p = a
\end{aligned}$$

Acum dacă $a > 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, iar dacă $0 < a < 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Dacă $a = 1$ atunci seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ care este seria armonică generalizată (convergentă pentru $p > 1$, divergentă pentru $p \le 1$).

c) $u_n = (2-\sqrt{e})\,(2-\sqrt[3]{e})\cdots(2-\sqrt[n]{e})\,4^n > 0$ deoarece

$$2 < e < 3 \text{ şi deci } \sqrt[n]{e} < 2$$

Iar

$$\begin{aligned}
\lim_{n\mapsto\infty}\tfrac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\mapsto\infty}\frac{(2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\cdots(2-\sqrt[n]{e})(2-\sqrt[n+1]{e})4^{n+1}}{(2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\cdots(2-\sqrt[n]{e})4^n}\\
&= \lim_{n\mapsto\infty}\frac{(2-\sqrt[n+1]{e})4^{n+1}}{4^n} = \lim_{n\mapsto\infty}(2-\sqrt[n+1]{e})\,4 = \lim_{n\mapsto\infty}\left(2-e^{\frac{1}{n+1}}\right)4\\
&= \left(2-e^0\right)4 = (2-1)4 = 4 > 1
\end{aligned}$$

deci seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ este divergentă.

d) $u_n = \dfrac{(an)^n}{n!} > 0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\mapsto\infty}\tfrac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\mapsto\infty}\frac{\frac{(a(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(an)^n}{n!}} = \lim_{n\mapsto\infty}\tfrac{a^{n+1}}{a^n}\tfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\tfrac{n!}{(n+1)!}\\
&= \lim_{n\mapsto\infty}a\tfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\tfrac{1}{(n+1)} = \lim_{n\mapsto\infty}a\tfrac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\mapsto\infty}a\left(\tfrac{n+1}{n}\right)^n\\
&= \lim_{n\mapsto\infty}a\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = a\cdot e
\end{aligned}$$

Avem că, dacă $a\cdot e > 1 \Leftrightarrow a > 1/e$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(an)^n}{n!}$ este divergentă.

Dacă $a\cdot e < 1 \Leftrightarrow a < 1/e$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(an)^n}{n!}$ este convergentă.

Dacă $a\cdot e = 1 \Leftrightarrow a = 1/e$ atunci criteriul raportului nu ne spune nimic şi în acest caz seria trebuie tratată altfel (!).

Observaţie: Am folosit următoarele:

1) Funcţia tangentă este crescătoare pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cu

$$tg0 = 0$$

Deci

$$\begin{array}{l} tgx > 0 \ , \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ tgx < 0 \ , \ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \end{array}$$

2) Avem limita importantă

$$\lim_{n \mapsto \infty} \frac{tgx_n}{x_n} = 1$$

pentru $x_n \to 0$

3)

$$\begin{aligned} \lim_{n \mapsto \infty} q^n &= 0 \ , \text{ pentru } -1 < q < 1 \\ \lim_{n \mapsto \infty} q^n &= \infty \ , \text{ pentru } q > 1 \end{aligned}$$

4. Folosind **criteriul lui Raabe-Duhamel**, să se determine natura seriilor:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{4^n n!}$, *b)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n+2)} \frac{1}{2n+1}$.

Rezolvare:

Aplicăm *Teorema: Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi cu* $u_n > 0$*. Presupunem că există*

$$\lim_{n \mapsto \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = k$$

Atunci

a) Dacă $k < 1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă;*

b) Dacă $k > 1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă;*

c) *Dacă* $k = 1$ *atunci nu putem preciza nimic.*

Observaţie: *Criteriul lui Raabe-Duhamel se aplica atunci când în criteriul raportului obţinem limita* 1*. (Deci criteriul lui Raabe-Duhamel este mai puternic decât criteriul raportului).*

a) $u_n = \dfrac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{4^n n!} > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Calculăm limita

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{n \mapsto \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)(4(n+1)-3)}{4^{n+1}(n+1)!} \frac{4^n n!}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)} \\ = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \frac{4n+1}{4(n+1)} = 1 \end{array}$$

deci criteriul raportului nu ne poate preciza nimic. Aplic în continuare criteriul lui Raabe-Duhamel adică vom calcula limita

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{n \mapsto \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \text{(vezi calculul de mai sus)} \\ = \lim\limits_{n \mapsto \infty} n \left(\frac{4(n+1)}{4n+1} - 1 \right) = \lim\limits_{n \mapsto \infty} n \frac{4n+4-4n-1}{4n+1} \\ = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \frac{3n}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1. \end{array}$$

Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

$b)$ $u_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n+2)}\frac{1}{2n+1} > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\mapsto\infty}\frac{\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)(3(n+1)+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n+2)(3(n+1)+2)}\frac{1}{2(n+1)+1}}{\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n+2)}\frac{1}{2n+1}}$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty}\frac{\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)(3n+4)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n+2)(3n+5)}\frac{1}{2n+3}}{\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n+2)}\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n\mapsto\infty}\frac{3n+4}{3n+5}\frac{2n+1}{2n+3}$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty}\frac{3n+4}{3n+5}\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{3}{3}\frac{2}{2} = 1$$

deci criteriul raportului nu ne poate preciza nimic. Aplic în continuare criteriul lui Raabe-Duhamel

$$\lim_{n\mapsto\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \text{(vezi calculul de mai sus)}$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty} n\left(\frac{3n+5}{3n+4}\frac{2n+3}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\mapsto\infty} n\left(\frac{6n^2+19n+15}{6n^2+11n+4} - 1\right)$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty} n\frac{6n^2+19n+15-\left(6n^2+11n+4\right)}{6n^2+11n+4}$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty}\frac{8n^2+11n}{6n^2+11n+4} = \frac{8}{6} > 1.$$

Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

5. Să se arate că seriile următoare sunt **absolut convergente**:

$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$, $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$, $c)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ \dfrac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$,

$d)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ \dfrac{a^n+1}{n!}$, $a > 1$.

Rezolvare:

Aplicăm *Definiţia: Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *se numeşte absolut convergentă dacă seria modulelor* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *este convergentă.*

$a)$ Avem că $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$ şi pentru absoluta convergenţă vom studia seria modulelor

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n^2+\sin^2 n|} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sin^2 n}$$

şi în mod evident

$$n^2+\sin^2 n \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2+\sin^2 n} \leq \frac{1}{n^2}$$

iar $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ este convergentă (seria armonică generalizată cu $p = 2$). Deci din criteriul I de comparaţie (vezi Seminarul 3., exerciţiul 6) avem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+\sin^2 n}$ este convergentă adică seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este absoluta convergentă.

$b)$ Avem că $u_n = \dfrac{\sin nx}{n^2}$. Atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^2}$$

şi în mod evident
$$\frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$
iar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă. Deci din criteriul I de comparaţie (vezi Seminarul 3., exerciţiul 6) avem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^2}$ este convergentă adică seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă.

c) $u_n = (-1)^{n+1} \frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$$
Această serie este acum o serie cu termeni pozitivi şi deci se poate studia, de exemplu, cu criteriul raportului. Notăm cu $a_n = \frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$ deci
$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)(2(n+1)+1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)(3(n+1)-1)}}{\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}}\\ &= \frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)(2n+3)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)(3n+2)} \frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{2n+3}{3n+2} \to \frac{2}{3} < 1\end{aligned}$$
şi obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$ este convergentă adică seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este absoluta convergentă.

d) $u_n = (-1)^{n+1} \frac{a^n+1}{n!}$, $a > 1$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{a^n+1}{n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+1}{n!}$$
Această serie este acum o serie cu termeni pozitivi şi deci se poate studia, de exemplu, cu criteriul raportului. Notăm cu $v_n = \frac{a^n+1}{n!}$ deci
$$\begin{aligned}\lim_{n\mapsto\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \lim_{n\mapsto\infty} \frac{\frac{a^{n+1}+1}{(n+1)!}}{\frac{a^n+1}{n!}} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{a^{n+1}+1}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n+1}\\ &= \lim_{n\mapsto\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{a^{n+1}+1}{a^n+1} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots n(n+1)} \frac{a^{n+1}+1}{a^n+1}\\ &= \lim_{n\mapsto\infty} \frac{1}{n+1} \frac{a^{n+1}+1}{a^n+1}\end{aligned}$$
Acum dacă $a > 1$ atunci a^n,$a^{n+1} \to \infty$, $n \to \infty$. Pentru a rezolva nedeterminarea scot factor comun forţat:
$$\begin{aligned}\lim_{n\mapsto\infty} \frac{1}{n+1} \frac{a^{n+1}+1}{a^n+1} &= \lim_{n\mapsto\infty} \frac{1}{n+1} \frac{a^{n+1}(1+1/a^n)}{a^n(1+1/a^n)}\\ &= \lim_{n\mapsto\infty} a \frac{1}{n+1} \frac{1+1/a^n}{1+1/a^n} = a \cdot 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0 < 1\end{aligned}$$
deci în acest caz seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+1}{n!}$ este convergentă adică seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă.

6. Să se studieze convergenţa absolută şi **semiconvergenţa** seriilor:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5^n}$.

Rezolvare:

Aplicăm *Observaţia: Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *se numeşte* ***semiconvergentă*** *dacă este convergentă dar seria modulelor* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *nu este convergentă.*

$a)$ $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ Să studiem absoluta convergenţă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \begin{cases} \text{convergentă}\ , & \text{dacă } p > 1 \\ \text{divergentă}\ , & \text{dacă } p \leq 1 \end{cases}$$

Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă dacă $p > 1$.

Cazul $0 < p \leq 1$: seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ nu este absolut convergentă dar să studiem semiconvergenţa. Din criteriul lui Leibniz, deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$$

şi şirul $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_n$ descreşte pentru $p > 0$, avem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ este convergentă. Dar ea nu este absolut convergentă deci e semiconvergentă.

Cazul $p \leq 0 \Leftrightarrow -p \geq 0$. Seria este divergentă deoarece $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p} = (-1)^{n+1} n^{-p}$ iar acest termen nu are limită deci termenul general nu tinde la 0 adică $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ este divergentă.

$b)$ $u_n = (-1)^{n+1} \dfrac{n}{5^n}$. Seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \dfrac{n}{5^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{5^n}$ o vom studia cu criteriul raportului (e o serie cu termeni pozitivi).

Notăm cu $a_n = \dfrac{n}{5^n}$ deci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} = \frac{n+1}{n} \frac{1}{5} \to \frac{1}{5} < 1$$

Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este convergentă deci $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă.

Temă: de studiat seria de la $b)$ cu criteriul lui Leibniz.