Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

SEMINAR 9.

Cap. V_Şiruri şi serii de funcţii

1. Să se afle mulţimea de convergenţă a **seriilor de puteri**:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n\ ,\ b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\,\alpha^{n-1}}{\beta^n}x^n\ ,\ \alpha,\beta>0\ ,$

$c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}{3\cdot7\cdot11\cdots(4n-1)}x^n\ ,\ d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$

Rezolvare:

Aplicăm *Definiţia: Numim* ***serie de puteri*** *o serie de forma* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *unde* $(a_n)_n$ *este un şir de numere reale.*

Teorema lui Abel: Pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *există* R *a.î.* $0\le R\le\infty$ *şi:*
1) Seria este absolut convergentă pentru orice x *a.î.* $|x|<R$ *(echivalent* $x\in(-R,R)$*).*
2) Seria este divergentă pentru orice x *a.î.* $|x|>R$*.*
De asemenea avem că pentru orice ρ *a.î.* $0<\rho<R$*, seria este uniform convergentă pentru orice* x *a.î.* $|x|\le\rho$ *(echivalent* $x\in[-\rho,\rho]$*)*
Numărul R *se numeşte* ***raza de convergenţă*** *a seriei de puteri.*

Teorema lui Cauchy-Hadamard: Fie seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *şi* R *raza sa de convergenţă. Atunci* R *se poate calcula după formulele:*

$$a)\ R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\ ,\ \ b)\ R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

$a)$ Avem seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ unde $a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. Este convenabil să calculăm raza de convergenţă folosind prima formulă.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Deci $R=\frac{1}{e}$ adică seria este este absolut convergentă pentru orice x a.î. $|x|<1/e$, echivalent $x\in(-1/e,1/e)$, seria este divergentă pentru orice x a.î. $|x|>1/e$ şi seria este uniform convergentă pentru orice x a.î. $|x|\le\rho$, echivalent $x\in[-\rho,\rho]$ unde $\rho\in(0,1/e)$

În capetele $x=-R$ şi $x=R$ convergenţa trebuie studiată separat. Astfel pentru $x=-1/e$ obţinem seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{-1}{e}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$$

unde $b_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$ iar pentru $x=1/e$ obţinem seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

Se poate arăta (!) că $b_n \nrightarrow 0$ deci seriile de mai sus sunt divergente (deoarece termenii generali ai celor două serii nu tind la 0). Deci mulţimea de convergenţă este $(-1/e,1/e)$.

Indicaţie: $b_n \nrightarrow 0$ deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n\overset{(1^\infty)}{=}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e}{e}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e}{e}\right)^{\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e}}\right]^{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e}{e}n}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e}{e}n}=e^{\frac{1}{e}\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right]}$$

Pentru a găsi această limită este suficient să calculăm limita următoare, aplicând L'Hospital de două ori

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\cdots\cdots$$

$b)$ În acest caz $a_n=\dfrac{(n+1)\,\alpha^{n-1}}{\beta^n}$. Putem calcula raza după ambele formule. Astfel

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(n+1)\,\alpha^{n-1}}{\beta^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n+1}\,\sqrt[n]{\alpha^{n-1}}}{\sqrt[n]{\beta^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n+1}\,\alpha^{\frac{n-1}{n}}}{\beta}$$

Avem imediat că $\sqrt[n]{n+1}\to 1$, $n\to\infty$ (se poate arăta aceasta prin două metode
1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}=1$ sau
2) se arată mai întâi cu L'Hospital că $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}}=...=1$ vezi Seminarul 8. Deci şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$).

Deci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ adică raza $R = \dfrac{\beta}{\alpha}$ şi avem că seria este este absolut convergentă pentru orice x a.î. $|x| < \beta/\alpha$, echivalent $x \in (-\beta/\alpha, \beta/\alpha)$, seria este divergentă pentru orice x a.î. $|x| > \beta/\alpha$ şi seria este uniform convergentă pentru orice x a.î. $|x| \le \rho$, echivalent $x \in [-\rho, \rho]$ unde $\rho \in (0, \beta/\alpha)$

În capetele $x = -\beta/\alpha$ şi $x = \beta/\alpha$ convergenţa trebuie studiată separat. Astfel pentru $x = -\beta/\alpha$ obţinem seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,\alpha^{n-1}}{\beta^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,\alpha^{n-1}}{\beta^n} \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\alpha} (-1)^n$$

iar termenul general al acestei serii este $\dfrac{(n+1)}{\alpha}(-1)^n$ care evident nu tinde la 0 ci, pe subşiruri, tinde la $-\infty$ şi ∞. Deci seria de mai sus este divergentă.

Pentru $x = \beta/\alpha$ obţinem seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,\alpha^{n-1}}{\beta^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,\alpha^{n-1}}{\beta^n} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\alpha}$$

iar termenul general al acestei serii este $\dfrac{(n+1)}{\alpha}$ care evident nu tinde la 0 ci la ∞. Deci seria de mai sus este divergentă.

Deci mulţimea de convergentă rămâne $(-\beta/\alpha, \beta/\alpha)$

Temă: să se calculeze raza R folosind cel de al doilea mod de calcul.

$c)$ Avem $a_n = \dfrac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)}$ şi este avantajos să calculăm folosind al doilea mod de calcul

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)\,(4n+1)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)\,(4n+3)} \cdot \frac{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{4n+3} = 1$$

deci $R = 1$ adică avem că seria este este absolut convergentă pentru orice x a.î. $|x| < 1$, echivalent $x \in (-1, 1)$, seria este divergentă pentru orice x a.î. $|x| > 1$ şi seria este uniform convergentă pentru orice x a.î. $|x| \le \rho$, echivalent $x \in [-\rho, \rho]$ unde $\rho \in (0, 1)$.

În capetele $x = -1$ şi $x = 1$ convergenţa trebuie studiată separat. Astfel pentru $x = -1$ obţinem seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)} (-1)^n$$

Se poate arăta (!) că

$$a_n = \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)} \to 0$$

şi avem imediat că

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n+1}{4n+3} < 1$$

adică şirul $(a_n)_n$ descreşte. Deci din criteriul lui Leibniz obţinem că seria de mai sus este convergentă.

Pe de altă parte pentru $x = 1$ obţinem seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)}$$

Avem că
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n+1}{4n+3} \to 1$$
deci criteriul raportului nu ne spune nimic. Aplicăm în continuare criteriul lui Raabe-Duhamel.
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n+3}{4n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n+1} = \frac{1}{2} < 1$$
deci seria de mai sus este divergentă.

Mulţimea de convergenţă este $[-1,1)$.

$d)$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$
deci $R = e$ şi avem că seria este este absolut convergentă pentru orice x a.î. $|x| < e$, echivalent $x \in (-e, e)$, seria este divergentă pentru orice x a.î. $|x| > e$ şi seria este uniform convergentă pentru orice x a.î. $|x| \le \rho$, echivalent $x \in [-\rho, \rho]$ unde $\rho \in (0, e)$.

În capetele $x = -e$, $x = e$ studiem separat. Astfel pentru $x = -e$ seria devine
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$$
unde $b_n = \frac{n!}{n^n}e^n$. Avem că
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!e^n} = \frac{(n+1)\,n^n e}{(n+1)^{n+1}} =$$
$$= \frac{n^n e}{(n+1)^n} = \frac{e}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$$
deoarece se ştie că
$$\text{şirul } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ tinde crescător la } e$$
Deci şirul (b_n) este crescător şi are termeni pozitivi, deci avem că $b_n \nrightarrow 0$ şi deci $(-1)^n b_n \nrightarrow 0$ adică seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ este divergentă. Pentru $x = e$ seria devine
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
unde $b_n = \frac{n!}{n^n}e^n$. Avem ca mai sus că
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$$
Deci şirul (b_n) este crescător şi are termeni pozitivi, deci avem că $b_n \nrightarrow 0$ adică seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă. Deci mulţimea de convergenţă a seriei este $(-e, e)$.

2. **Să se dezvolte în serie de puteri** funcţiile:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, *b)* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, *c)* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, *d)* $f(x) =$arctg$x$

   Rezolvare:

   Aplicăm *Definiţia: Fie I un interval şi $a \in I$. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă în punctul a. Se **numeşte serie Taylor a funcţiei** f **în punctul** a seria*

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Teorema: Seria Taylor a funcţiei f în punctul a este convergentă într-un punct $x \in I$ către valoarea $f(x)$ dacă şi numai dacă resturile $R_n(x)$ ale formulei lui Taylor formează un şir convergent la 0.

*În particular pentru $a = 0$ obţinem **seria Mac-Laurin*** asociată unei funcţii f.

*Definiţia (**Formula lui Taylor**): Fie I un interval deschis. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de $(n+1)$ ori derivabilă pe I atunci pentru oricare două puncte $x, a \in I$ cu $x \neq a$ are loc*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

*se numeşte **polinomul Taylor de grad n**, ataşat funcţiei f în punctul a.*

*Cantitatea $R_n(x)$ este **restul** din formula Taylor şi are diverse forme de exprimare*

$$\begin{aligned} &a) \quad R_n(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{restul lui Cauchy} \\ &b) \quad R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{restul lui Lagrange} \end{aligned}$$

unde ξ este un punct între a şi x.

*În particular pentru $a = 0$ obţinem **Formula lui Mac-Laurin**: Fie $I \subset R$ un interval deschis ce conţine pe 0. Dacă $f : I \to R$ este o funcţie de $(n+1)$ ori derivabilă pe I atunci pentru orice punct $x \in I$ are loc*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

a) Trebuie calculate derivatele de ordin n ale funcţiei. Astfel

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = \left((1+x)^{-1}\right)' = (-1)(1+x)^{-2}$$

$$f''(x) = \left((-1)(1+x)^{-2}\right)' = (-1)(-2)(1+x)^{-3} = (-1)^2 2!(1+x)^{-3}$$

$$f'''(x) = \left((-1)^2 2!(1+x)^{-3}\right)' = (-1)^2 2!(-3)(1+x)^{-4} = (-1)^3 3!(1+x)^{-4}$$

deci inductiv deducem că

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! (1+x)^{-(n+1)}$$

deci

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$$

Obţinem că seria Taylor asociată funcţiei f în punctul $a = 0$ (adică seria Mac-Laurin) este

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1!}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 - \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!}x^n + \cdots = \\ & = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \end{aligned} \tag{1}$$

Mai întâi trebuie determinată raza de convergenţă a acestei serii. Avem că $a_n = (-1)^n$ deci

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \right| = 1$$

adică $R = 1$ şi seria este absolut convergentă pentru $\forall\, x$ cu $|x| < 1$.
Temă: de studiat convergenţa în punctele $x = -1, x = 1$ (seriile obţinute sunt divergente deoarece termenul lor general nu tinde la 0)
Pentru a demonstra că această serie are suma $f(x)$ trebuie sa aplicăm Teorema 155. Formula lui Taylor asociată acestei funcţii în punctul $a = 0$ este

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

adică

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots + R_n(x)$$

unde $R_n(x)$ este dat de anumite formulele.
Se poate arăta (!) că $R_n(x) \to 0$, $n \to \infty$. Deci, conform unei Teoreme avem că seria (1) are suma dată de $f(x) = \frac{1}{1+x}$, adică are loc următoarea dezvoltare importantă

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\ , \ \forall\, x \text{ cu } |x| < 1 \end{aligned}$$

b) În dezvoltarea de mai sus trecem x în $-x$, deci are loc altă dezvoltare importantă

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 - (-x) + (-x)^2 - (-x)^3 + \cdots + (-1)^n (-x)^n + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n\ , \ \forall\, x \text{ cu } |x| < 1 \end{aligned}$$

c) În dezvoltarea lui $\frac{1}{1+x}$ trecem pe x în x^2 şi obţinem

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + \left(x^2\right)^2 - \left(x^2\right)^3 + \cdots + (-1)^n \left(x^2\right)^n + \cdots \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\ , \ \forall\, x \text{ cu } |x| < 1 \end{aligned}$$

$d)$ Rescriu dezvoltarea de mai sus în y:

$$\frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - y^6 + \cdots + (-1)^n y^{2n} + \cdots , \quad \forall\, y \text{ cu } |y| < 1$$

şi integrez termen cu termen:

$$\int_0^x \frac{1}{1+y^2} dy = \int_0^x 1 dy - \int_0^x y^2 dy + \int_0^x y^4 dy - \int_0^x y^6 dy + \cdots + \int_0^x (-1)^n y^{2n} dy + \cdots$$

deci obţinem dezvoltarea

$$\text{arctgx} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots , \quad \forall\, x \text{ cu } |x| < 1$$

3. Să se dezvolte în serie de puteri funcţia $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

Rezolvare:
Avem $f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, deci prin inducţie

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

deci $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$ adică

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$$

Seria Taylor asociată funcţiei f în punctul $a = 0$ este

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \tag{2}$$

Pentru a calcula raza de convergenţă a acestei serii să notăm cu $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ şi să calculăm

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}}{\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1$$

deci raza este $R = 1$ adică seria este convergentă pentru orice $x \in (-1, 1)$.
Observaţie: în capetele $x = -1$, $x = 1$ convergenţa trebuie studiată separat...
Pe de altă parte formula lui Taylor asociată acestei funcţii în punctul $a = 0$ este

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

Se poate arăta (!) că $R_n(x) \to 0$, $n \to \infty$. Deci, conform unei Teoreme avem că seria (2) asociată funcţiei $f(x) = (1+x)^\alpha$ are suma dată de chiar $f(x) = (1+x)^\alpha$, adică are loc următoarea dezvoltare importantă numită **dezvoltarea binomială**

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots , \quad \forall\, x \text{ cu } |x| < 1$$

4. Să se dezvolte în serie de puteri, determinând mulţimea de convergenţă, următoarele funcţii:
$a)\ \dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$, $b)\ \dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)}$

Rezolvare:

$a)$ Mai intâi descompunem fracţiile în fracţii simple. Pentru aceasta găsim divizorii numitorului. Astfel ştim că în general are loc scrierea

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$.
Deci în cazul nostru

$$6-5x-x^2=-x^2-5x+6=-(x-1)(x+6)=(1-x)(x+6)$$

deoarece $\Delta=49$, $x_1=1$, $x_2=-6$. Va avea loc descompunerea

$$\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{x+6}$$

unde a, b trebuie determinaţi a.î. să aibă loc egalitatea

$$\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\frac{a(x+6)+b(1-x)}{(1-x)(x+6)}\Leftrightarrow$$
$$\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\frac{x(a-b)+(6a+b)}{(1-x)(x+6)}$$

deci $\begin{cases} a-b=-5 \\ 6a+b=12 \end{cases}$ adică $a=1, b=6$

$$\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{6}{x+6}$$

Acum pentru fiecare fracţie simplă în parte folosim descompunerile fundamentale (vezi exerciţiul 2.). Deci

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\quad ,\ \forall\, x \text{ cu } |x|<1$$
$$\frac{6}{x+6}=\frac{6}{6\left(\frac{x}{6}+1\right)}=\frac{1}{1+\frac{x}{6}}=1-\frac{x}{6}+\left(\frac{x}{6}\right)^2-\left(\frac{x}{6}\right)^3+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x}{6}\right)^n+\cdots$$
$$=1+\frac{-1}{6}x+\left(\frac{-1}{6}\right)^2x^2+\left(\frac{-1}{6}\right)^3x^3+\cdots+\left(\frac{-1}{6}\right)^nx^n+\cdots$$
$$\forall\, x \text{ cu } \left|\frac{x}{6}\right|<1\Leftrightarrow|x|<6$$

Vom obţine dezvoltarea

$$\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$$
$$+1+\frac{-1}{6}x+\left(\frac{-1}{6}\right)^2x^2+\left(\frac{-1}{6}\right)^3x^3+\cdots+\left(\frac{-1}{6}\right)^nx^n+\cdots$$
$$=\left[1+\left(\frac{-1}{6}\right)^n\right]x^n\ ,\quad\forall\, x \text{ cu } |x|<1$$

$b)$ Determin $a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î.are loc

$$\frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1+x}$$

aducând la acelaşi numitor obţin

$$\frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{a(1-x)(1+x) + b(1+x) + c(1-x)^2}{1-x}$$

deci $\begin{cases} -a+c=0 \\ b-2c=1 \\ a+b+c=0 \end{cases}$ adică $a=-1/4, b=1/2, c=-1/4$

$$\frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{-1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{-1}{4}\frac{1}{1+x}$$

Pentru termenii $\frac{1}{1-x}$ şi $\frac{1}{1+x}$ ştim dezvoltările (vezi exerciţiul 2.).

Să determinăm în continuare dezvoltarea lui $\frac{1}{(1-x)^2}$. Plecăm de la

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

şi derivez termen cu termen şi vom obţine

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \cdots\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Dar

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Deci

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1-x)^2(1+x)} &= \frac{-1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{-1}{4}\frac{1}{1+x} \\ &= \frac{-1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \frac{-1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-1}{4} + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{-1}{4}(-1)^n\right]x^n \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n \end{aligned}$$