Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

CURS I, II

Capitolul I: Şiruri de numere reale

1 Definiţia unui şir. Şiruri mărginite. Şiruri monotone

Definiţia 1 *Se numeşte **şir de numere reale** o funcţie*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

definită pe mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale şi cu valori în $\mathbb{R}$.

Se va nota

$$a_n := f(n)$$

*iar a_n se va numi **termenul de ordin n al şirului.***

Şirul întreg se va nota cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

*Valorile $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ale funcţiei f se numesc **termenii şirului**, adică $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sunt termenii şirului.*

Remarca 2 *Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se poate scrie şi sub forma*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Definiţia 3 *Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **minorat (sau mărginit inferior)** dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$a_n \geq \alpha, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **majorat (sau mărginit superior)** dacă există $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$a_n \leq \beta, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **mărginit** dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\alpha \leq a_n \leq \beta, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este mărginit atunci spunem ca şirul dat este **nemărginit**.*

Exemplul 4 1. *Şirul $((-1)^n)_n$ este mărginit.*
2. *Şirul $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_n$ este mărginit.*
3. *Şirul $\left(\frac{n}{n+1}\right)_n$ este mărginit.*
4. *Şirul $(n^2)_n$ este nemărginit superior.*

Remarca 5 *Se poate demonstra uşor că un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit dacă şi numai dacă există un număr real $M > 0$ astfel încât*

$$|a_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarca 6 *Este evident că dacă există un număr real $M > 0$ şi un prag $N \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$|a_n| \leq M, \ \forall n \geq N$$

atunci şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este tot mărginit.

Definiţia 7 *Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **crescător** dacă are loc*

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \quad , \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

*Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **descrescător** dacă are loc*

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots \quad , \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Definiţia 8 *Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **monoton** dacă este crescător sau descrescător.*

Remarca 9 *Spunem că un şir este **strict crescător** dacă are loc (1) cu "$\leq$" înlocuit cu "$<$". Analog se definesc noţiunile de **strict descrescător** şi **strict monoton**.*

Remarca 10 *Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este astfel încât $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător dacă şi numai dacă*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarca 11 *Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este astfel încât $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător dacă şi numai dacă*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplul 12 1. *Şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ este monoton descrescător.*
2. *Şirul $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_n$ nu este monoton.*
3. *Şirul $\left(\frac{n}{n+1}\right)_n$ este strict monoton (strict crescător).*

Definiţia 13 *Fie $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir astfel încât*

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots \quad , \ k \in \mathbb{N}.$$

Atunci şirul definit de

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, a_{n_{k+1}}, \ldots\}$$

se numeşte subşir al şirului iniţial $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplul 14 *Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Atunci subşirurile $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt date de*

$$\begin{aligned} (a_{2n})_{n\in\mathbb{N}} &= \{a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n}, a_{2n+2}, \ldots\} \\ (a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} &= \{a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n+1}, a_{2n+3}, \ldots\}. \end{aligned}$$

Exemplul 15 *Fie şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Atunci subşirurile $(b_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt date de*

$$\begin{aligned} (b_{3n})_{n\in\mathbb{N}} &= \{b_0, b_3, b_6, \ldots, b_{3n-3}, b_{3n}, b_{3n+3}, \ldots\} \\ (b_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}} &= \{b_1, b_4, b_7, \ldots, b_{3n-2}, b_{3n+1}, b_{3n+4}, \ldots\} \\ (b_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}} &= \{b_2, b_5, b_8, \ldots, b_{3n-1}, b_{3n+2}, b_{3n+5}, \ldots\}. \end{aligned}$$

Exemplul 16 *Fie şirurile cu termenii generali* $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$, $b_n = \cos \frac{n\pi}{2}$, $c_n = (-1)^n$ *şi* $d_n = \frac{(-1)^n}{n}$. *Scrieţi subşirurile*

$$\begin{aligned} &(a_{4k}), \ (a_{4k+1}), \ (a_{4k+2}), \ (a_{4k+3}), \\ &(b_{4k}), \ (b_{4k+1}), \ (b_{4k+2}), \ (b_{4k+3}), \\ &(c_{2k}), \ (c_{2k+1}), \ (c_{3k}), \ (c_{3k+1}), \ (c_{3k+2}), \\ &(d_{2k}), \ (d_{2k+1}). \end{aligned}$$

Folosim $\sin(0) = 0 = \sin(\pi)$, $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin(3\pi/2) = -1$ *şi* $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 1 = \cos(3\pi/2)$, $\cos(\pi) = -1$ *precum şi periodicitatea*

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x \quad \text{şi} \quad \cos(x + 2n\pi) = \cos x, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2 Şiruri convergente

Definiţia 17 *Se numeşte* ***vecinătate*** *a lui* $a \in \mathbb{R}$, *orice mulţime* $V \subset \mathbb{R}$ *pentru care există* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *astfel încât intervalul* (α, β) *conţine pe* a *şi intervalul* (α, β) *este inclus în* V, *adică*

$$a \in (\alpha, \beta) \subset V$$

(vezi şi desenul).

Definiţia 18 *Spunem că numărul* a *este* ***limita şirului*** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dacă orice vecinătate a lui* a *conţine toţi termenii şirului, cu excepţia eventuală a unui număr finit de termeni. Spunem în acest caz ca şirul dat este* ***convergent*** *la* a *şi scriem astfel*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{sau} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a.$$

Definiţia 19 *Spunem că şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este* ***divergent*** *dacă nu este convergent.*

Remarca 20 ***Deci un şir este convergent dacă există limita lui şi aceasta este finită.***
Iar un şir este divergent dacă acesta fie nu are limită fie are dar această limită este infinită.

Exemplul 21 *Şirurile date de* $a_n = \frac{n}{n+1}$ *şi* $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *au următoarele valori estimate:*

n	a_n	n	b_n
0	0.0000	1	2.0000
1	0.5000	2	2.2500
2	0.6666	3	2.3703
3	0.7500	4	2.4414
4	0.8000	5	2.4883
5	0.8333	6	2.5216
6	0.8571	7	2.5464
7	0.8750	8	2.5657
8	0.8888	9	2.5811
9	0.9000	10	2.5937
10	0.9090	100	2.7048
100	0.9900	1000	2.7169
1000	0.9990	10000	2.7181
10000	0.9999	100000	2.7182

Teorema 22 (Caracterizarea cu ε **a convergenţei)** *Numărul* a *este limita şirului* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există pragul (număr natural)* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încât oricare ar fi* $n \geq N(\varepsilon)$, *are loc*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. "$\Rightarrow$"

Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar ales. Are loc $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Conform definiţiei avem că în vecinătatea $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ avem toţi termenii şirului, cu excepţia eventuală a unui număr finit de termeni. Vom nota cu N indicele cel mai mare dintre termenii şirului care nu se află în vecinătatea $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Atunci, luând $N(\varepsilon) := N+1$ obţinem că are loc

$$\forall n \geq N(\varepsilon),\ a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

"$\Leftarrow$"

Fie o vecinătate a lui a de tipul $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$. Conform presupunerii avem că există $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\forall n \geq N(\varepsilon),\ a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

Deci are loc afirmaţia $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, având în vedere că în afara vecinăţii se află primii $N(\varepsilon) - 1$ termeni, adică un număr finit de termeni. ■

Exemplul 23 *Are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ *arbitrar ales. Vom lua* $N(\varepsilon) := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ *(partea întreagă*[1] *a lui* $1/\varepsilon$*). Atunci are loc evident*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,\ \forall n \geq N(\varepsilon) + 1$$

Avem următorul tabel de valori

ε	*Pragul* $N(\varepsilon)$
0.3	$N(\varepsilon) = [3.33] = 3$
0.2	$N(\varepsilon) = [5.00] = 5$
0.1	$N(\varepsilon) = [10.00] = 10$
0.09	$N(\varepsilon) = [11.11] = 11$
0.08	$N(\varepsilon) = [12.50] = 12$
0.07	$N(\varepsilon) = [14.28] = 14$
0.01	$N(\varepsilon) = [100.00] = 100$
0.001	$N(\varepsilon) = [1000.00] = 1000$

Exemplul 24 *Are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ *arbitrar ales. Vom lua* $N(\varepsilon) := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. *Atunci are loc evident*

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon,\ \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Exemplul 25 *Are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1.$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ *arbitrar ales. Vom lua* $N(\varepsilon) := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. *Atunci are loc evident*

$$\left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,\ \forall n \geq N(\varepsilon) + 1$$

[1] Partea întreagă a numărului real x este notat cu $[x]$ şi este cel mai mare număr întreg din stânga lui x, adică este acel unic număr întreg care verifică inegalitatea $[x] \leq x < [x] + 1$.

Exemplul 26 *Are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ *arbitrar ales. Vom lua* $N(\varepsilon) := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. *Atunci are loc evident*

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,\ \forall n \geq N(\varepsilon) + 1$$

Exemplul 27 *Are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0,\ \forall\, |q| > 1.$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ *arbitrar ales. Vom lua* $N(\varepsilon) := \left[\frac{-\ln \varepsilon}{\ln|q|}\right]$. *Atunci are loc evident*

$$\left|\frac{1}{q^n} - 0\right| = \frac{1}{|q|^n} < \varepsilon,\ \forall n \geq N(\varepsilon) + 1$$

Remarca 28 *Vom scrie pe scurt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon),\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Teorema 29 (Criteriul majorării) *Fie şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Dacă există* $a \in \mathbb{R}$ *şi şirul* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent la* 0, *astfel încât*

$$|a_n - a| \leq \alpha_n,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

atunci

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a.$$

Exemplul 30 *Are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Într-adevăr,

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exemplul 31 *Are loc*

$$\sqrt[n]{n} \to 1\ ,\ n \to \infty.$$

Într-adevăr, să notăm cu $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, *şi vom arăta că* $a_n \to 0$. *Avem că*

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \Leftrightarrow n &= (1 + a_n)^n = 1 + C_n^1 a_n + C_n^2 a_n^2 + C_n^3 a_n^3 + \cdots\cdots \\ &\geq (\text{imediat deoarece } a_n \geq 0\ ) \geq C_n^2 a_n^2 = \tfrac{n(n-1)}{2} a_n^2.\end{aligned}$$

Deci $a_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \Leftrightarrow |a_n| \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \alpha_n$ *iar* α_n *converge la* 0 *deci* $a_n \to 0$.

Remarca 32 *Se poate demonstra uşor că dacă un şir este convergent atunci limita sa este unică.*

Teorema 33 *Orice şir convergent este şi mărginit*

Demonstraţie. Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la $a \in \mathbb{R}$. Fie numărul real $M > 0$ ales astfel încât $(-M, M)$ să fie o vecinătate a lui a (de exemplu se poate lua $M := |a| + 1$). Atunci în vecinătatea $(-M, M)$ se află un număr finit de termeni, cu excepţia eventuală a unui număr finit de termeni. Vom nota cu N indicele cel mai mare dintre termenii şirului care nu se află în vecinătatea $(-M, M)$, deci are loc că

$$a_n \in (-M, M)\ ,\ \forall n \geq N + 1 \Leftrightarrow |a_n| < M,\ \forall n \geq N + 1,$$

adică şirul dat este mărginit. ■

Remarca 34 *Orice şir nemărginit este deci divergent.*

Teorema 35 *Orice subşir al unui şir convergent este tot convergent.*

Demonstraţie. Imediată (se bazează pe Definiţia 18). ■

Corolarul 36 *Dacă un subşir al unui şir este divergent atunci şirul întreg este divergent.*

Corolarul 37 *Dacă două subşiruri ale unui şir sunt convergente dar la limite diferite, atunci şirul întreg este divergent.*

Exemplul 38 *Şirul dat de termenul general $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, este divergent.*
Într-adevăr, subşirul $a_{2n} = +1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +1$ iar $a_{2n} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$ şi $+1 \neq -1$.

Teorema 39 (Teorema lui Weierstrass de convergenţă a şirurilor monotone)
Orice şir monoton şi mărginit este convergent.
(Fără demonstraţie).

Exemplul 40 *Are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0,\ \forall q > 1.$$

Într-adevăr: să notăm cu $a_n := \frac{n}{q^n}$. Avem că

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{q^{n+1}}}{\frac{n}{q^n}} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{q} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{q} \xrightarrow[n\to\infty]{} (1+0)\,\frac{1}{q} = \frac{1}{q} < 1. \tag{3}$$

Deci există un rang $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $\forall n \geq N$. Pe de altă parte şirul este cu termeni pozitivi deci este mărginit inferior.

Deci şirul dat este convergent, adică

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell.$$

Dacă $\ell \neq 0$ atunci putem trece la limită în raport

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{\ell}{\ell} = 1.$$

Pe de altă parte putem trece la limită în relaţia (3) şi obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{q} < 1,$$

adică

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{1}{q} = \frac{1}{q} < 1$$

ceea ce reprezintă o contradicţie. Deci ℓ trebuie sa fie 0.

Exemplul 41 (Consecinţă) *(vezi şi Exemplul 31) Are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Într-adevăr, s-a arătat în exemplul precedent că, dat un $\varepsilon > 0$ arbitrar ales, există un prag $N \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq N$,

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1,\ pentru\ q := 1+\varepsilon.$$

Deci

$$1 \le n \le (1+\varepsilon)^n \ , \ \forall n \ge N \Leftrightarrow 1 \le \sqrt[n]{n} \le 1+\varepsilon \ , \ \forall n \ge N.$$

Trecând la limită obţinem că $\forall \varepsilon > 0$

$$1 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \le 1+\varepsilon.$$

Având în vedere că $\varepsilon > 0$ *este arbitrar ales (oricât de mic), deducem că* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Exemplul 42 *Are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0, \ \forall q \ge 0 \ .$$

Într-adevăr: să considerăm mai întâi $q = 0$. *Atunci afirmaţia este imediată.*

Să considerăm acum cazul $q > 0$. *Vom nota cu* $a_n := \frac{q^n}{n!}$. *Avem că*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{q^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{q^n}{n!}} = \frac{1}{n+1}q \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{q}{\infty} = 0.$$

Deci există un rang $N \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \ \forall n \ge N$. *Pe de altă parte şirul este cu termeni pozitivi deci mărginit inferior.*

Deci şirul dat este convergent, adică

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell.$$

Dacă $\ell \ne 0$ *atunci putem trece la limită în relaţia de mai sus şi obţinem*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}q = 0$$

care este o contradicţie cu faptul că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{\ell}{\ell} = 1.$$

Deci ℓ *trebuie sa fie* 0.

Teorema 43 (Lema lui Stolz–Cesàro) *Fie două şiruri* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *astfel încât* $(b_n)_n$ *este strict monoton şi nemărginit. Dacă există limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A,$$

cu A finit sau infinit, atunci există şi limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *şi ea este egală tot cu* A, *adică*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$

(Fără demonstraţie).

Exemplul 44 *Are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Într-adevăr, vom lua $a_n := \ln n$ *şi* $b_n := n$ *care evident este strict monoton şi nemărginit* ($n \to \infty$). *Calculăm mai întâi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

Deci

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Exemplul 45 *Fie şirul $(x_n)_n$ pentru care există limita sa notată cu a. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

Într-adevăr, vom lua $a_n:=x_1+x_2+\cdots+x_n$ şi $b_n:=n$ care evident este strict monoton şi nemărginit ($n\to\infty$). Calculăm mai întâi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\text{(evident)}=\lim_{n\to\infty}x_n=a\,.$$

Deci obţinem conlcuzia.

Exemplul 46 *Fie şirul cu termeni pozitivi $(x_n)_n$ pentru care există limita sa notată cu a. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a.$$

Într-adevăr, să logaritmăm $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ şi să aplicăm exemplul precedent:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} &= \lim_{n\to\infty}\ln(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x_1x_2\cdots x_n)}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x_1)+\ln(x_2)+\cdots+\ln(x_n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln(x_n)=\ln a.\end{aligned}$$

3 Operaţii cu şiruri convergente

Propoziţia 47 (Operaţii cu şiruri convergente) *Fie două şiruri convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Atunci şirurile*

$$(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\quad(\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\quad(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sunt de asemenea convergente şi au loc relaţiile

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)&=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n\\ \lim_{n\to\infty}(\alpha a_n)&=\alpha\lim_{n\to\infty}a_n\\ \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)&=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.\end{aligned}$$

Propoziţia 48 *Fie două şiruri $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit. Atunci*

$$a_nb_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Exemplul 49 *Este uşor de arătat că*

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0,\ \forall q\in(0,1)\,,$$

deci rezultă (luând $r=-q$) că are loc şi

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}(-q)^n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\,q^n=0,\ \forall r\in(-1,0)\,,$$

Obţinem atunci că

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0,\ \forall\,|q|<1\Leftrightarrow q\in(-1,1)\,,$$

Exemplul 50 (vezi Exemplul 42) *Deoarece*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n!}=0,\ \forall q\geq 0$$

rezultă (luând $r=-q$) că are loc şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n!}=0,\ \forall r<0$$

Exemplul 51 *Are loc*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0.$$

Propoziţia 52 *Fie două şiruri convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\neq 0$. Atunci şirul $\frac{a_n}{b_n}$ este tot convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Remarca 53 *Dacă şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$ şi $b_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, atunci şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit.*

Propoziţia 54 *Fie două şiruri convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât*

$$a_n\leq b_n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Atunci putem trece la limită în inegalitatea de mai sus, adică are loc

$$\lim_{n\to\infty} a_n\leq\lim_{n\to\infty} b_n\ .$$

Propoziţia 55 (Criteriul cleştelui) *Fie trei şiruri $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât*

$$a_n\leq x_n\leq b_n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Dacă şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente la aceaşi limită, atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi are aceeşi limită ca celelalte două şiruri.

Exemplul 56 *Aplicăm criteriul pentru şirul dat de*

$$x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\ .$$

Avem inegalităţile imediate

$$\begin{aligned}&n^2+1\leq n^2+1\leq n^2+n\ ,\\&n^2+1\leq n^2+2\leq n^2+n\ ,\\&n^2+1\leq n^2+3\leq n^2+n\ ,\\&\ldots\ldots\\&n^2+1\leq n^2+n\leq n^2+n.\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^2+n}\leq\frac{1}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2+1},\ \frac{2}{n^2+n}\leq\frac{2}{n^2+2}\leq\frac{2}{n^2+1},\\&\frac{3}{n^2+n}\leq\frac{3}{n^2+3}\leq\frac{3}{n^2+1},\ldots\ldots,\frac{n}{n^2+n}\leq\frac{n}{n^2+n}\leq\frac{n}{n^2+1},\end{aligned}$$

adică avem încadrarea

$$\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leq x_n\leq\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}$$

deci

$$\frac{1}{n^2+n}\left(1+2+3+\cdots+n\right)\leq x_n\leq\frac{1}{n^2+1}\left(1+2+3+\cdots+n\right)$$

sau

$$\frac{1}{n^2+n}\frac{n\left(n+1\right)}{2}\leq x_n\leq\frac{1}{n^2+1}\frac{n\left(n+1\right)}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{n^2+1}{2n^2+2n}\leq x_n\leq\frac{n^2+1}{2n^2+2}$$

Avem că $a_n=\dfrac{n^2+1}{2n^2+2n}\to\dfrac{1}{2}$, $b_n=\dfrac{n^2+1}{2n^2+2}\to\dfrac{1}{2}$ *deci* $x_n\to\dfrac{1}{2}$.

4 Şiruri cu limită infinită şi operaţii cu şiruri cu limită (finită sau nu)

Definiţia 57 *Se numeşte* ***vecinătate*** *a lui* $+\infty$ *orice mulţime* $V\subset\mathbb{R}$ *pentru care există* $\alpha\in\mathbb{R}$ *astfel încât*

$$(\alpha,\infty)\subset V.$$

Se numeşte ***vecinătate*** *a lui* $-\infty$ *orice mulţime* $V\subset\mathbb{R}$ *pentru care există* $\alpha\in\mathbb{R}$ *astfel încât*

$$(-\infty,\alpha)\subset V$$

(vezi şi desenul).

Definiţia 58 *Spunem că* $+\infty$ *este limita şirului* $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *dacă orice vecinătate a lui* $+\infty$ *conţine toţi termenii şirului, cu excepţia eventuală a unui număr finit de termeni. Scriem în acest caz că*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty\quad\textit{sau}\quad a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty.$$

Exemplul 59 *Şirul dat de* $a_n=n^2$ *are următoarele valori:*

n	a_n
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
10	100
100	10000
1000	1000000

Teorema 60 (Caracterizarea cu ε a limitei infinite) *Şirul* $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limita* $+\infty$ *dacă şi numai dacă pentru orice* $\alpha>0$, *există numărul natural* $N\left(\alpha\right)\in\mathbb{N}$ *astfel încât oricare ar fi* $n\geq N\left(\alpha\right)$, *are loc*

$$a_n>\alpha\ .$$

Remarca 61 *Similar se poate defini că* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

Remarca 62 *Şirurile care au limită infinită ($\pm\infty$) sunt nemărginite deci divergente.*

Propoziţia 63 *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *şi* $a_n \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *şi* $b_n \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$

Exemplul 64 1. *Şirul dat de* $a_n = 1 + 2 + \cdots + n$ *este divergent. Se va calcula* $a_n = \frac{n(n+1)}{2} > \frac{n^2}{2}$ *şi se va găsi* $N(\alpha)$.

Propoziţia 65 *Orice şir crescător şi nemărginit (superior) are limita* $+\infty$.
Orice şir descrescător şi nemărginit (inferior) are limita $-\infty$.
Orice şir monoton are limită. Aceasta este finită dacă şirul este nemărginit şi infinită dacă şirul este nemărginit.

Propoziţia 66 *Dacă un şir are limita* $+\infty$ *atunci orice subşir al său are tot limita* $+\infty$.

Utilizând acum Teorema 35 se poate deci arăta că

Propoziţia 67 *Dacă un şir are limită atunci orice subşir al sau are aceeaşi limită.*

Corolarul 68 *Dacă un subşir al unui şir nu are limită atunci şirul întreg nu are limită.*

Corolarul 69 *Dacă două subşiruri ale unui şir au limită dar ele sunt diferite între ele atunci şirul întreg nu are limită.*

Exemplul 70 *Şirul dat de termenul general* $a_n = n^{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ *nu are limită.*
Într-adevăr, subşirul

$$a_{2k} = (2k)^{(-1)^{2k}} = 2k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$

iar

$$a_{2k+1} = (2k+1)^{(-1)^{2k+1}} = (2k+1)^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

şi $+\infty \neq 0$.

Propoziţia 71 (Operaţii cu şiruri cu limită) *Fie două şiruri* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

cu a *şi* b *finite sau nu. Fie şi* $\alpha \in \mathbb{R}$.
1. *Dacă suma* $a + b$ *are sens atunci şirul sumă are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

2. *Dacă produsul* $\alpha\, a$ *are sens atunci*

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

3. *Dacă produsul* $a \cdot b$ *are sens atunci şirul produs are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

4. *Dacă raportul* $\frac{a}{b}$ *are sens atunci şirul cât are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\,.$$

5. *Dacă puterea* a^b *are sens atunci*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\,.$$

Remarca 72 *Suma limitelor nu are sens în cazul* $\infty-\infty$.

Produsul limitelor nu are sens în cazul $0\cdot\infty$.

Raportul limitelor nu are sens în cazul $\frac{\infty}{\infty}$ *şi* $\frac{0}{0}$.

Puterea limitelor nu are sens în cazul 1^∞, ∞^0 *şi* 0^0.

Expresiile de mai sus sunt nedeterminări; Aceasta înseamnă, de exemplu în cazul $\frac{0}{0}$, *că există două şiruri* $(x_n)_n$ *şi* $(y_n)_n$ *astfel încât* $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ *şi şirul* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_n$ *fie nu are limită fie limita sa există dar poate fi orice element* $\ell\in\bar{\mathbb{R}}$.

5 Limite fundamentale

1.

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, & \text{dacă } |q|<1\Leftrightarrow q\in(-1,1)\,,\\ 1, & \text{dacă } q=1,\\ \infty, & \text{dacă } q>1,\\ \text{nu există, dacă } q\leq -1.\end{cases}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n\right)=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=\frac{1}{1-q}\,,\ \forall\,|q|<1.$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1n^p+a_2n^{p-1}+a_3n^{p-2}+\cdots a_pn+a_{p+1}\right)=a_1\cdot\infty=\begin{cases}\infty\,, & \text{dacă } a_1>0,\\ -\infty\,, & \text{dacă } a_1<0\end{cases}\,,\ p\in\mathbb{N}^*.$$

(limită dintr-un polinom de grad p în variabila n).

4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1n^p+a_2n^{p-1}+a_3n^{p-2}+\cdots a_pn+a_{p+1}}{b_1n^q+b_2n^{q-1}+b_3n^{q-2}+\cdots b_qn+b_{q+1}}=\begin{cases}\infty\,\frac{a_1}{b_1}\,, & \text{dacă } p>q,\\ \frac{a_1}{b_1}\,, & \text{dacă } p=q,\\ 0\,, & \text{dacă } p<q\end{cases}\,,\ p,q\in\mathbb{N}$$

(limită dintr-o fracţie de polinoame în variabila n).

5.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

unde e este un numărul iraţional, $e\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, numit **constanta lui Euler** iar $e\simeq 2.71828182845905$.

Propoziţia 73 *Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit de $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este un şir strict crescător şi mărginit, cu $a_n \in (2,3)$.*

6.
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e,\ \text{unde } x_n \to \infty$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e,\ \text{unde } x_n \to 0.$$

7.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1,\ \text{unde } x_n \to 0$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{tg} x_n}{x_n} = 1,\ \text{unde } x_n \to 0.$$

8.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a,\ \text{unde } x_n \to 0$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1,\ \text{unde } x_n \to 0.$$

9.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^p} = \infty\ ,\ \ p\in\mathbb{N}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^p} = 0\ ,\ p\in\mathbb{N}^*.$$

10.
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

Propoziţia 74 *Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit de $a_n := \sqrt[n]{n}$ este un şir descrescător şi mărginit.*

Teorema 75 (Criteriul lui Cauchy-D'Alembert pentru şiruri) *Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu termenii $a_n > 0, \forall n\in\mathbb{N}$. Presupunem că există limita*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell\ .$$

Atunci există şi limita $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ şi este egală tot cu ℓ.

Exemplul 76 *Are loc*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

6 Puncte limită ale unui şir

Definiţia 77 *Fie $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Spunem că a este* ***punct limită*** *al unui şir dacă orice vecinătate a lui a conţine o infinitate de termeni ai şirului.*

Teorema 78 (Teorema de caracterizare a unui punct limită) *Valoarea a este punct limită a unui şir dacă şi numai dacă există un subşir al acestuia care tinde către a.*

Demonstraţie. Vom demonstra doar reciproca: presupunem că există subşirul $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Evident $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, adică subşirul dat reprezintă o infinitate de termeni ai şirului iniţial. Prin definiţie, în orice vecinătate a lui a există o infinitate de valori ale subşirului (cu excepţia eventuală a unui număr finit de termeni), adică o infinitate de termeni ai şirului. Deci a este un punct limită. ■

Definiţia 79 *Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir. Cel mai mic punct limită al şirului se numeşte* ***limită inferioară*** *a şirului şi se notează cu $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Cel mai mare punct limită al şirului se numeşte* ***limită superioară*** *a şirului şi se notează cu $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.*

Teorema 80 *Un şir are limită dacă şi numai dacă limita inferioară este egală cu limita superioară, adică*

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a.$$

Exemplul 81 *a) Fie $a_n = (-1)^n$. Atunci*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1,\ \limsup_{n\to\infty} a_n = +1.$$

b) Fie $a_n = n^{(-1)^n}$. Atunci

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0,\ \limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

c) Fie $a_n = n$. Atunci

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

d) Fie $a_n = -n^2$. Atunci

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

e) Fie $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Atunci

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0 = \limsup_{n\to\infty} a\ .$$

Exemplul 82 (vezi şi Exemplul 16) *Calculaţi limita inferioară şi limita superioară pentru şirurile date de $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ şi $b_n = \cos\frac{n\pi}{2}$.*

Avem că

$$\begin{aligned}
a_{4k} &= \sin\frac{4k\pi}{2} = \sin 2k\pi = \sin 0,\ \forall k \in \mathbb{Z},\\
a_{4k+1} &= \sin\frac{(4k+1)\pi}{2} = \sin(2k\pi + \pi/2) = \sin(\pi/2) = 1,\ \forall k \in \mathbb{Z},\\
a_{4k+2} &= \sin\frac{(4k+2)\pi}{2} = \sin(2k\pi + \pi) = \sin(\pi) = 0,\ \forall k \in \mathbb{Z},\\
a_{4k+3} &= \sin\frac{(4k+3)\pi}{2} = \sin(2k\pi + 3\pi/2) = \sin(3\pi/2) = -1,\ \forall k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Deci mulţimea punctelor limită ale şirului este $\{-1, 0, +1\}$ şi, conform definiţiei, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ şi $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +1$.

Remarca 83 *Se poate demonstra că*

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k, \\ \limsup_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k. \end{aligned}$$

Are loc şi

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} a_n &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k, \\ \limsup_{n\to\infty} a_n &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k. \end{aligned}$$

Exemplul 84 *Fie şirurile date în Exemplul 81. Calculaţi* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ *şi* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ *folosind observaţia de mai sus.*