Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

CURS III, IV

Capitolul II: Serii de numere reale

1 Definiţii; proprietăţi; operaţii cu serii

Definiţia 1 *Se numeşte **serie de numere reale** o sumă infinită de numere*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + \cdots .$$

Se va nota prescurtat şi cu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \quad \sum_n a_n \text{ sau cu } \sum a_n \,.$$

Numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, , \ldots$ *se numesc termenii seriei iar şirul format cu sumele*

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \,, \end{aligned}$$

*se numeşte **şirul sumelor parţiale.***

Exemplul 2 *Să considerăm un segment de lungime* 2*. Punctul de la mijloc va împărţi segmentul în două părţi de lungime* 1*. Apoi, pentru segmentul din dreapta, punctul de la mijloc va împărţi segmentul în două părţi de lungime* $1/2$*. Continuând procedeul obţinem că segmentul iniţial este compus dintr-o infinitate de segmente de lungime* $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots$*(vezi desenul).*

Deci lungimea segmentului este suma lungimilor sub-segmentelor obţinute, adică

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n . \end{aligned}$$

Definiţia 3 *Spunem că* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este **serie convergentă** dacă şirul sumelor parţiale* $(S_n)_n$ *este un şir convergent. Dacă* S *este limita şirului* $(S_n)_n$ *atunci* S *se va numi suma seriei şi vom scrie că*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Dacă $(S_n)_n$ *are limită infinită, atunci seria dată se numeşte **divergentă**.*

Exemplul 4 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ *este divergentă deoarece şirul sumelor parţiale asociat nu este convergent.*

Într-adevăr,

$$S_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Exemplul 5 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} n$ *este divergentă deoarece şirul sumelor parţiale asociat nu este convergent.*
Într-adevăr,

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Exemplul 6 *Să avem în vedere Exemplul 2. Avem seria*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

iar

$$\begin{aligned} S_1 &= 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{4}, \ldots \\ S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\ . \end{aligned}$$

Din egalitatea evidentă

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^2 b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n\right)$$

obţinem că

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}\ , \ \forall q \in \mathbb{R},\ q \neq 1.$$

Deci, utilizând că $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$*, deducem că*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1-0}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

adică

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

Exemplul 7 *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ *are şirul sumelor parţiale dat de*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ 1, & n \text{ impar}, \end{cases}$$

adică şirul $(S_n)_n$ *este divergent (nu are limită), deci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ *este divergentă.*

Exemplul 8 *Cele două exemple de mai sus sunt cazuri particulare ale* ***seriei geometrice***

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n\ ,$$

unde q este un număr fixat.
Dacă $q = 1$ *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ *are şirul sumelor parţiale* $S_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n \to \infty$*, deci* $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ *este divergentă.*
Dacă $q \neq 1$ *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *are limta şirului sumelor parţiale dată de*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1-0}{1-q}, & \text{dacă } |q| < 1, \\ +\infty, & \text{dacă } q > 1, \\ \text{nu } \exists, & \text{dacă } q < -1, \end{cases}$$

adică seria geometrică

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{convergentă cu suma } \frac{1}{1-q}, & \text{dacă } |q| < 1 \\ \text{divergentă}, & \text{dacă } |q| \geq 1. \end{cases}$$

Exemplul 9 *Fie seria*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\,n}.$$

Evident

$$\frac{1}{(k-1)\,k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Deci

$$S_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n-1}\right) + \left(\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}\right) =$$

$= \text{(\textit{sumă telescopică})} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

Deci seria este convergentă şi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\,n} = 1$$

Exemplul 10 *Studiaţi natura seriei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

(şirul sumelor parţiale va fi tot o sumă telescopică cu limita $+\infty$).

Remarca 11 *Dacă S este $\pm\infty$ atunci vom putea scrie că*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \text{ (\textit{respectiv} } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty\text{)}.$$

Proposiţia 12 *Dacă la o serie adăugăm sau înlăturăm un număr finit de termeni atunci seria obţinută nu îşi schimbă natura.*

Exemplul 13 *Are loc*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} \textit{convergentă}, & \textit{dacă } |q| < 1 \\ \textit{divergentă}, & \textit{dacă } |q| \geq 1, \end{cases}$$

iar, în particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Proposiţia 14 (Condiţie necesară de convergenţă a seriilor) *Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergenă atunci şirul $(a_n)_n$ al termenilor săi este convergent la 0.*

Demonstraţie. Într-adevăr, din definiţie $S_n - S_{n-1} = a_n$, iar dacă seria este convergentă atunci $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$. Deci există limita şirului $(a_n)_n$ şi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

■

Corolarul 15 *Dacă şirul $(a_n)_n$ nu este convergent la 0 atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.*

Exemplul 16 *Seria $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ este divergentă deoarece şirul termenilor $(1)_n$ nu tinde la 0 ($a_n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{}$ 1).*

Exemplul 17 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} n$ *este divergentă deoarece şirul termenilor* $(n)_n$ *nu tinde la* 0 $(a_n = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty)$.

Exemplul 18 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ *este divergentă deoarece şirul termenilor nu tinde la* 0 :

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}.$$

Remarca 19 *Dacă şirul* $(a_n)_n$ *este convergent la* 0 *atunci nu putem spune nimic despre convergenţa seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Exemplul 20 *Vezi Exemplul 10. Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *diverge dar* $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Exemplul 21 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *este divergentă (vezi Exemplul 49) dar termenul general al seriei* $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, *pe când seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *este convergentă (vezi Exemplul 49) iar termenul general al seriei* $a_n = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Teorema 22 *Dacă seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sunt convergente şi au sumele* S *respectiv* T, *atunci:*
a) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *este convergentă şi are suma* $S + T$.
b) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *este convergentă şi are suma* αS, *unde* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Vom nota şirul sumelor parţiale pentru cele două serii cu $(S_n)_n$ respectiv cu $(T_n)_n$. Atunci seria sumă $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ are şirul sumelor parţiale dat de $(R_n)_n$ unde $R_n := S_n + T_n$. Din convergenţa seriilor date obţin că $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S + T$, adică $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ este convergentă cu suma $S + T$.

Similar, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ are şirul sumelor parţiale dat de $(R_n)_n$ unde $R_n := \alpha S_n$. Din convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ obţin că $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha S$, adică $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ este convergentă cu suma αS. ■

2 Serii cu termeni oarecare

Teorema 23 (Criteriul lui Dirichlet) *Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este o serie care are şirul sumelor parţiale mărginit şi dacă* $(b_n)_n$ *este un şir descrescător şi convergent la* 0 *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *este convergentă.*

(Fără demonstraţie)

Exemplul 24 *Folosind criteriul lui Dirichlet să se determine natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Într-adevăr, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

unde $a_n = \sin nx$, $b_n = \dfrac{1}{n}$.

Evident $b_n = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = b_{n+1}$ *adica* $(b_n)_n$ *şir descrescător şi* $\lim\limits_{n\mapsto\infty} b_n = 0$. *Pe de altă parte avem că* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *are şirul sumelor parţiale asociat ei dat de*

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx$$

Aceasta suma o vom calcula astfel:

$$\begin{aligned}
&S_n\ \sin\frac{x}{2}=\sin x\sin\frac{x}{2}+\sin 2x\sin\frac{x}{2}+\cdots+\sin nx\sin\frac{x}{2}=\\
&=\frac{1}{2}\left[\cos\left(x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(2x+\frac{x}{2}\right)+\right.\\
&\left.+\cdots+\cos\left(nx-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)\right]=\\
&=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+\cdots+\right.\\
&\left.+\cos\frac{(2n-1)\,x}{2}-\cos\frac{(2n+1)\,x}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)\,x}{2}\right]
\end{aligned}$$

Deci

$$S_n=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)\,x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\quad,\ \forall\ \frac{x}{2}\neq k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

Avem

$$\begin{aligned}
|S_n|&=\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leq\frac{\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\left|\cos\frac{(2n+1)x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\\
&\leq\frac{\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\left|\cos\frac{(2n+1)x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leq\frac{1+1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\ ,\forall n\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

deci $(S_n)_n$ mărginit (deoarece marginea $\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ nu depinde de $n\in\mathbb{N}$). Obţinem din criteriului lui Dirichlet că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx\ \frac{1}{n}$ este convergentă.

Exemplul 25 *Folosind criteriul lui Dirichlet să se determine natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$.*

Teorema 26 (Criteriul lui Abel) *Dacă $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ este o serie convergentă şi dacă $(b_n)_n$ este un şir monoton şi mărginit atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ este convergentă.*
Demonstraţie. *Din teorema lui Weierstrass avem că şirul $(b_n)_n$ este convergent, adică $\exists\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. Să presupunem că $(b_n)_n$ este şir crescător (similar se va trata cazul descrescător). Atunci*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(b_n-b\right)+\sum_{n=1}^{\infty}a_nb=-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(b-b_n\right)+b\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ .\qquad(1)$$

Dar seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă, din ipoteză, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(b-b_n\right)$ este convergentă aplicând criteriul lui Dirichlet. Într-adevăr, seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit (deoarece este serie convergentă) şi $(b-b_n)_n$ este un şir descrescător şi convergent la 0.

Deci seriile $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(b-b_n\right)$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sunt convergente şi deci, utilizând Teorema 22 şi relaţia (1), deducem că seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ este convergentă. ■

Exemplul 27 *Folosind criteriul lui Abel să se studieze convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\ln\frac{n+1}{n}$.*

Într-adevăr, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\ln\frac{n+1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$$

unde $a_n=\frac{\cos n}{n}$, $b_n=\ln\frac{n+1}{n}$.

Avem că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ *este convergentă conform criteriului lui Dirichlet. Pe de altă parte, deoarece funcţia* $\ln x$ *este crescătoare,*

$$b_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \ln \frac{n+2}{n+1} = b_{n+1}$$

deci $(b_n)_n$ *este şir descrescător şi* $\lim\limits_{n \mapsto \infty} b_n = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$ *deci, din convergenţă, avem că şirul este şi mărginit. Suntem atunci în condiţiile Criteriului lui Abel deci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \ln \frac{n+1}{n}$ *este convergentă.*

Teorema 28 (Criteriul lui Leibniz) *Fie seria* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *astfel încât* $(a_n)_n$ *este un şir descrescător la* 0 *(deci un şir de termeni pozitivi). Atunci seria alternată* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *este convergentă.*
Demonstraţie. *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ *are şirul sumelor parţiale mărginit.*

Într-adevăr,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ -1, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

Deoarece $(a_n)_n$ *este un şir descrescător la* 0 *avem că putem aplica criteriul lui Dirichlet şi obţinem concluzia: seria* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *este convergentă.* ■

Exemplul 29 *Folosind criteriul lui Leibniz să se studieze convergenţa seriei* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *:*

Avem

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$$

unde $a_n = \frac{1}{n}$*. Este evident că şirul* $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ *descreşte şi* $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \frac{1}{n} = 0$ *deci seria alternată* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *este convergentă.*

Exemplul 30 *Folosind criteriul lui Leibniz să se studieze convergenţa seriei* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ *:*

Avem

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$$

unde $a_n = \frac{\ln n}{n}$.

Se ştie că şirul $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_n$ *descreşte şi* $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ *deci seria alternată* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ *este convergentă.*

3 Serii absolut convergente

Definiţia 31 *Spunem că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este* ***absolut convergentă*** *dacă seria modulelor* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *este convergentă.*

Exemplul 32 *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ *este absolut convergentă, având în vedere că seria modulelor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2^n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

este convergentă (este seria geometrică scrisă pentru $q = 1/2$*).*

Exemplul 33 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *este absolut convergentă, având în vedere că seria modulelor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

este convergentă (este seria armonică generalizată scrisă pentru $p = 2$*).*

Exemplul 34 *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ *este absolut convergentă. Într-adevăr,*

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \ , \ \forall n$$

iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *este convergentă.*

Teorema 35 *Orice serie absolut convergentă este convergentă*
(fără demonstraţie).

Definiţia 36 *O serie care este convergentă dar nu este absolut convergentă se numeşte* ***serie semiconvergentă****.*

Exemplul 37 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *este convergentă (conform criteriului lui Leibniz) dar nu este absolut convergentă. Într-adevăr, seria modulelor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

este divergentă (este seria armonică generalizată scrisă pentru $p = 1$*).*

Exemplul 38 *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n$ *nu este nici convergentă (este seria geometrică scrisă pentru* $q = -3$*) şi nici absolut convergentă (seria modulelor* $\sum_{n=0}^{\infty} |(-3)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n$ *este divergentă; este seria geometrică scrisă pentru* $q = 3$*).*

Remarca 39 *Conform definiţiei absolutei convergenţe a unei serii observăm că trebuie să studiem convergenţa unei serii cu termeni pozitivi (seria modulelor). În acest caz vom folosi criterii speciale prezentate în secţiunea următoare.*

4 Serii cu termeni pozitivi

Teorema 40 *Fie seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *astfel încât* $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$*. Atunci seria ori converge ori are suma infinit.*

Demonstraţie. Fie (S_n) şirul sumelor parţiale asociate seriei. Deoarece seria este cu termeni pozitivi, atunci şirul (S_n) este pozitiv şi monoton crescător

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \ , \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deci $\exists \lim S_n$ care este finită dacă şirul (S_n) este mărginit superior, şi respectiv $+\infty$ dacă şirul (S_n) este nemărginit superior. ■

Teorema 41 (primul citeriu de comparaţie) *Fie seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *astfel încât* $a_n, b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Presupunem că* $\exists N \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$a_n \leq b_n \;, \forall n \geq N.$$

Atunci

(a) *dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *este convergentă atunci şi seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă.*

(b) *dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă atunci şi seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Având în vedere că primii N termeni ai unei serii nu contează (adică nu schimbă natura unei serii) vom studia seriile $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$. Fie (S_n) şi (T_n) şirurile sumelor parţiale asociate celor două serii. Să observ că, deoarece seriile sunt cu termeni pozitivi, atunci şirurile (S_n) şi (T_n) sunt pozitive şi crescătoare. Deci $\exists \lim S_n$ şi $\exists \lim T_n$ care sunt finite dacă şirurile (S_n) şi (T_n) sunt mărginite superior, şi respectiv $+\infty$ dacă şirurile (S_n) şi (T_n) sunt nemărginite superior.

(a) Dacă $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$ este convergentă avem că (T_n) este şir convergent ($\exists \lim T_n$ şi ea este finită); deci şirul este mărginit superior. Dar $S_n \leq T_n$ deci şi (S_n) este mărginit superior, prin urmare $\exists \lim S_n$ finită, adică şirul este convergent.

(b) Dacă $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ este divergentă avem că (S_n) este şir nemărginit superior ($\exists \lim S_n$ şi ea este infinită). Dar $S_n \leq T_n$ deci şi (T_n) este nemărginit superior, prin urmare $\exists \lim T_n = +\infty$, adică şirul este divergent şi deci $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$ este divergentă. ∎

Exemplul 42 *Seria armonică generalizată* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *(scrisă cu* $p = 2$*) este convergentă. Într-adevăr*

$$a_n = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} \leq \frac{1}{n\,(n-1)} = b_n \;,\; \forall n \geq 2.$$

Dar seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ *este convergentă conform Exemplului 9, deci şi seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *este tot convergentă.*

Exemplul 43 *Are loc şi inegalitatea*

$$\frac{1}{n\,(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n\,(n-1)} \;,\; \forall n \geq 2.$$

Deci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *sunt majorate (termen cu termen) de seria* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

(evident, pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ *se poate calcula uşor şirul sumelor parţiale),*

Exemplul 44 *Seria armonică generalizată* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *(scrisă cu* $p = 1$*) este divergentă. Într-adevăr, se poate arăta că*

$$\ln(1+x) \leq x \;,\; \forall x > -1$$

deci avem

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \;,\; \forall n \geq 1.$$

Dar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *este divergentă conform Exemplului 10, deci şi seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *este tot divergentă.*

Teorema 45 (al doilea citeriu de comparaţie) *Fie seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *astfel încât* $a_n, b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Presupunem că*

$$\exists \lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in [0,+\infty]\,.$$

Atunci

(a) *dacă* $\lambda \in (0,\infty)$ *atunci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *(seriile au aceeaşi natură).*

(b) *dacă* $\lambda = 0$ *atunci* (b_1) *dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\ (C) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\ (C)$

(b_2) *dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\ (D) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\ (D)$.

(c) *dacă* $\lambda = +\infty$ *atunci* (c_1) *dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\ (C) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\ (C)$

(c_2) *dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\ (D) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\ (D)$.

Demonstraţie. (a) presupunem că $\lambda \in (0,\infty)$. Menţionăm că deoarece $\lambda > 0$, deducem că $\forall \varepsilon > 0$, suficient de mic, $\lambda - \varepsilon$ rămâne strict pozitiv ($\lambda - \varepsilon > 0$); de asemenea, λ finit ($\lambda < +\infty$) implică faptul că $\lambda + \varepsilon$ rămâne şi el finit ($\lambda + \varepsilon < +\infty$).

Din ipoteză avem că există un rang astfel încât $\dfrac{a_n}{b_n}$ este în vecinătatea lui λ, mai precis $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\lambda - \varepsilon \le \dfrac{a_n}{b_n} \le \lambda + \varepsilon$; deci

$$(\lambda - \varepsilon)\, b_n \le a_n \le (\lambda + \varepsilon)\, b_n\ ,\ \forall n \ge N.$$

Acum aplicăm primul criteriu de comparaţie şi obţin că seriile date au aceeaşi natură.

(b) presupunem că $\lambda = 0$. Din ipoteză avem că există un rang astfel încât $\dfrac{a_n}{b_n}$ este în vecinătatea lui λ, mai precis $\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $-\varepsilon \le \dfrac{a_n}{b_n} \le \varepsilon$; deci

$$0 \le a_n \le \varepsilon b_n\ ,\ \forall n \ge N.$$

Acum aplicăm primul criteriu de comparaţie şi obţin concluzia de la (b).

(c) se obţine imediat din punctul (b) deoarece $\exists \lim\limits_{n\mapsto\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\lambda} = 0.$ ■

Exemplul 46 *Seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2n^2+5}$ *este divergentă. Într-adevăr, luăm* $b_n = \frac{1}{n}$ *şi calculăm*

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+3}{2n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n^2+5} n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{2n^2+5} = \frac{1}{2} \in (0,+\infty)$$

deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *care este seria armonică cu* $p = 1$ *deci divergentă.*

Exemplul 47 *Seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ *este convergentă. Într-adevăr, luăm* $b_n = \frac{1}{n^2}$ *şi calculăm*

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in (0,+\infty)$$

deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *care este seria armonică cu* $p = 2$ *deci convergentă (am folosit limita* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1, \forall x_n \to 0$*).*

Teorema 48 (Criteriul de condensare) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că şirul* $(a_n)_n$ *este descrescător. Atunci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

(fără demonstraţie).

Exemplul 49 ***Seria armonică generalizată*** *este, prin definiţie,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *şi are loc:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \textit{convergentă}, & \textit{dacă } p > 1, \\ \textit{divergentă}, & \textit{dacă } p \leq 1. \end{cases}$$

Într-adevăr, fie $a_n = \dfrac{1}{n^p}$*. Considerăm cazurile:*
1. Cazul $p > 0$ *şi atunci* $(n^p)_n$ *este crescător deci şirul* $(a_n)_n$ *descreşte deci putem aplica Criteriul Condensării. Astfel studiem seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \tfrac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

Acum dacă $p > 1 \Leftrightarrow p - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^{p-1} > 2^0 = 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{2^{p-1}} < 1$ *deci seria geometrică de mai sus este cu raţia* $q = \dfrac{1}{2^{p-1}} \in (0,1)$ *adică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *este convergentă deci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă.*

Dacă $p < 1 \Leftrightarrow p - 1 < 0 \Leftrightarrow 2^{p-1} < 2^0 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^{p-1}} > 1$ *deci seria geometrică de mai sus este cu raţia* $q = \dfrac{1}{2^{p-1}} \in (1,\infty)$ *adică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *este divergentă deci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*
2. Cazul $p < 0$*. Atunci* $a_n = \dfrac{1}{n^p} = n^{-p} \to \infty^{-p} = \infty$ *deoarece* $-p > 0$ *deci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă (nefiind satisfăcută condiţia necesară de convergenţă).*
3. Cazul $p = 0$*. Atunci* $u_n = \dfrac{1}{n^p} = 1 \to 1 \neq 0$ *deci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă (nefiind satisfăcută condiţia necesară de convergenţă).*

Teorema 50 (Criteriul rădăcinii al lui Cauchy) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există*

$$\lim_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{a_n} = k.$$

Atunci
(a) *dacă* $k < 1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă;*
(b) *dacă* $k > 1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă;*
(c) *dacă* $k = 1$ *atunci nu putem preciza nimic.*

Demonstraţie. (a) Să presupunem că $k<1$, deci $\forall\varepsilon>0$ suficient de mic, $k+\varepsilon<1$. Din ipoteză avem că există un rang astfel încât $\sqrt[n]{a_n}$ este în vecinătatea lui k, mai precis $\forall\varepsilon>0$, $\exists\ N\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $k-\varepsilon\le\sqrt[n]{a_n}\le k+\varepsilon<1$; deci

$$k-\varepsilon\le\sqrt[n]{a_n}\le k+\varepsilon\ ,\ \forall n\ge N,$$

şi, prin urmare,

$$0\le a_n\le(k+\varepsilon)^n\ \ ,\ \forall n\ge N.$$

Deoarece seria geometrică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k+\varepsilon)^n$ este convergentă (este seria geometrică cu $q=k+\varepsilon<1$), obţinem conform primului criteriu de comparaţie, că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este tot convergentă.

(b) Să presupunem că $k>1$, deci $\forall\varepsilon>0$ suficient de mic, $k-\varepsilon>1$. Din ipoteză avem că există un rang astfel încât $\sqrt[n]{a_n}$ este în vecinătatea lui k, mai precis $\forall\varepsilon>0$, $\exists\ N\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $1<k-\varepsilon\le\sqrt[n]{a_n}\le k+\varepsilon$; deci

$$k-\varepsilon\le\sqrt[n]{a_n}\le k+\varepsilon\ ,\ \forall n\ge N,$$

şi

$$0\le(k-\varepsilon)^n\le a_n\ ,\ \forall n\ge N.$$

Deoarece seria geometrică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k-\varepsilon)^n$ este divergentă (este seria geometrică cu $q=k-\varepsilon>1$), obţinem conform primului criteriu de comparaţie, că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este tot divergentă. ■

Exemplul 51 *Seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ *este convergentă. Într-adevăr, calculăm*

$$\lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3}=\frac{1}{3}<1$$

deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *este convergentă (am folosit limita* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$*).*

Teorema 52 (Criteriul raportului al lui D'Alembert) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există*

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=k.$$

Atunci

(a) *dacă* $k<1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *este convergentă;*

(b) *dacă* $k>1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *este divergentă;*

(c) *dacă* $k=1$ *atunci nu putem preciza nimic.*

Demonstraţie. (a) Să presupunem că $k<1$, deci $\forall\varepsilon>0$ suficient de mic, $k+\varepsilon<1$. Din ipoteză avem că există un rang astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ este în vecinătatea lui k, mai precis $\forall\varepsilon>0$, $\exists\ N\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $k-\varepsilon\le\frac{a_{n+1}}{a_n}\le k+\varepsilon<1$; deci

$$k-\varepsilon\le\frac{a_{n+1}}{a_n}\le k+\varepsilon\ ,\ \forall n\ge N,$$

şi, prin urmare,

$$a_{N+1}\le(k+\varepsilon)\,a_N,\ a_{N+2}\le(k+\varepsilon)^2\,a_N,\ a_{N+3}\le(k+\varepsilon)^3\,a_N\ \ldots$$

deci
$$0 \leq a_n \leq (k+\varepsilon)^{n-N} a_N \ , \ \forall n \geq N.$$
Deoarece seria geometrică $\sum\limits_{n=N}^{\infty} (k+\varepsilon)^{n-N} a_N = a_N \sum\limits_{n=N}^{\infty} (k+\varepsilon)^{n-N}$ este convergentă (este seria geometrică cu $q = k+\varepsilon < 1$), obţinem conform primului criteriu de comparaţie, că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este tot convergentă.

(b) Să presupunem că $k > 1$, deci $\forall \varepsilon > 0$ suficient de mic, $k - \varepsilon > 1$. Din ipoteză avem că există un rang astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ este în vecinătatea lui k, mai precis $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $1 < k - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k + \varepsilon$; deci
$$k - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k + \varepsilon \ , \ \forall n \geq N,$$
şi, prin urmare,
$$a_{N+1} \geq (k-\varepsilon)\, a_N, \, a_{N+2} \geq (k-\varepsilon)^2 a_N, \, a_{N+3} \geq (k-\varepsilon)^3 a_N \ldots$$
deci
$$0 \leq (k-\varepsilon)^{n-N} a_N \leq a_n \ , \ \forall n \geq N.$$
Deoarece seria geometrică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (k-\varepsilon)^{n-N} a_N = a_N \sum\limits_{n=1}^{\infty} (k-\varepsilon)^{n-N}$ este divergentă (este seria geometrică cu $q = k - \varepsilon > 1$), obţinem conform primului criteriu de comparaţie, că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este tot divergentă. ∎

Exemplul 53 *Seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ *este convergentă. Într-adevăr, calculăm*
$$\lim_{n \mapsto \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$$
deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă.*

Remarca 54 *Să remarcăm că cele două criterii (rădăcinii şi raportului) nu precizează nimic în cazul* $k = 1$*. De exemplu, seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *este divergentă (vezi Exemplul 49) pe când seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *este convergentă (vezi Exemplul 49) dar ambele satisfac condiţiile* $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *şi* $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{b_n}$ *, unde* $a_n = 1/n$ *şi* $b_n = 1/n^2$*.*

Teorema 55 (Criteriul lui Raabe-Duhamel) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există*
$$\lim_{n \mapsto \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = k$$
Atunci

(a) *dacă* $k < 1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă;*

(b) *dacă* $k > 1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă;*

(c) *dacă* $k = 1$ *atunci nu putem preciza nimic*
(fără demonstraţie).

Remarca 56 *Criteriul lui Raabe-Duhamel se aplica atunci când în criteriul raportului obţinem limita* 1. *Deci criteriul lui Raabe-Duhamel este mai puternic decât criteriul raportului.*

Exemplul 57 *Folosind criteriul lui Raabe-Duhamel să se determine natura seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{4^n n!}$.

Avem $a_n = \dfrac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{4^n n!} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Calculăm mai întâi limita raportului*

$$\lim_{n \mapsto \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \mapsto \infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)\,(4\,(n+1)-3)}{4^{n+1}\,(n+1)!} \frac{4^n n!}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)} = \lim_{n \to \infty} \frac{4n+1}{4\,(n+1)} = 1$$

deci criteriul raportului nu ne poate preciza nimic.

Aplic în continuare criteriul lui Raabe-Duhamel adică vom calcula limita

$$\lim_{n \mapsto \infty} n \left(\tfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \text{(vezi calculul de mai sus)} = \lim_{n \to \infty} n \left(\tfrac{4(n+1)}{4n+1} - 1 \right) = \lim_{n \to \infty} n \tfrac{4n+4-4n-1}{4n+1}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \tfrac{3n}{4n+1} = \tfrac{3}{4} < 1.$$

Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*