Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

CURS V, VI

Capitolul III: Limite de funcţii. Continuitate

1 Definiţia limitei unei funcţii

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi a un punct de acumulare (finit sau nu) al domeniului de definiţie D. Reamintim următoarea caracterizare a punctelor de acumulare: *Cantitatea a este punct de acumulare al unei mulţimi D dacă şi numai dacă există un şir $(x_n)_n$ cu $x_n \neq a$ şi $x_n \to a$.*

Definiţia 1 *Vom nota cu $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

Definiţia 2 (Definiţia cu vecinătăţi a limitei) *Spunem că $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ este limita funcţiei f în punctul $a \in \bar{\mathbb{R}}$dacă pentru orice vecinătate V a lui ℓ există vecinătatea U a lui a astfel încât $\forall x \in U \cap D$, cu $x \neq a$, să avem $f(x) \in V$.*

Vom nota cu

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x).$$

Definiţia 3 (Caracterizarea cu ε şi δ a limitei) 1. *Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $\ell \in \mathbb{R}$. Atunci funcţia f are limita ℓ în punctul a dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ (care poate depinde de ε) astfel încât $\forall x \in D$ cu $x \neq a$ şi $|x - a| < \delta$, să avem că $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Pe scurt scriem

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in D \text{ cu } x \neq a \text{ şi } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

2. *Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $\ell = +\infty$. Atunci*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in D \text{ cu } x \neq a \text{ şi } |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$$

3. *Fie $a = +\infty$ şi $\ell \in \mathbb{R}$. Atunci*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in D \text{ cu } x > \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

4. *Fie $a = +\infty$ şi $\ell = +\infty$. Atunci*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in D \text{ cu } x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$$

Definiţia 4 *Similar se pot caracteriza limitele şi în celelate cazuri:*
5. *Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $\ell = -\infty$. Atunci*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in D \text{ cu } x \neq a \text{ şi } |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon.$$

6. *Fie $a = -\infty$ şi $\ell \in \mathbb{R}$. Atunci*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in D \text{ cu } x < -\delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

7. *Fie $a = +\infty$ şi $\ell = -\infty$. Atunci*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in D \text{ cu } x > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon.$$

8. *Fie $a = -\infty$ şi $\ell = +\infty$. Atunci*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in D \text{ cu } x < -\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$$

9. *Fie $a = -\infty$ şi $\ell = -\infty$. Atunci*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in D \text{ cu } x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon.$$

Exemplul 5

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Dar

$$\sqrt{x} > \varepsilon \Leftrightarrow x > \varepsilon^2.$$

Luând $\delta = \varepsilon^2$ avem

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \varepsilon^2 \text{ astfel încât } \forall x > \delta = \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{x} > \varepsilon.$$

Exemplul 6

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0.$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Dar

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{1-x} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Luând $\delta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$ avem

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \text{ astfel încât } \forall x < \delta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Definiţia 7 (Caracterizarea cu şiruri a limitei) *Fie $a \in \bar{\mathbb{R}}$ şi $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. Atunci*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \text{ astfel încât } x_n \to a, \text{ cu } x_n \in D \text{ şi } x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \to \ell.$$

Definiţia 8 (Limite laterale) *Fie $a \in \bar{\mathbb{R}}$ şi $\ell_s, \ell_d \in \bar{\mathbb{R}}$.*
1. *Spunem că ℓ_s este* ***limita la stânga*** *a funcţiei f în punctul a dacă pentru orice vecinătate V a lui ℓ (scriem $V \in \mathcal{V}(\ell)$) există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D$ cu $x < a$, să avem că $f(x) \in V$.*

Vom nota cu

$$\ell_s = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a - 0).$$

2. *Spunem că ℓ_d este* ***limita la dreapta*** *a funcţiei f în punctul a dacă pentru orice vecinătate V a lui ℓ (scriem $V \in \mathcal{V}(\ell)$) există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D$ cu $x > a$, să avem că $f(x) \in V$.*

Vom nota cu

$$\ell_d = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a + 0).$$

Remarca 9 *Dacă în caracterizarea cu ε şi δ înlocuim $x \neq a$ cu $x < a$ (sau $x > a$) obţinem caracterizări ale limitei la stânga (respectiv la dreapta).*

Remarca 10 *Fie $a \in \bar{\mathbb{R}}$ şi $\ell_s, \ell_d \in \bar{\mathbb{R}}$. Atunci:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell_s \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \text{ astfel încât } x_n \to a, \text{ cu } x_n \in D \text{ şi } x_n < a \Rightarrow f(x_n) \to \ell_s.$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \text{ astfel încât } x_n \to a, \text{ cu } x_n \in D \text{ şi } x_n > a \Rightarrow f(x_n) \to \ell_d.$$

Teorema 11 (Caracterizarea limitei cu ajutorul limitelor laterale) *Funcţia f are limita ℓ în punctul a dacă şi numai dacă are limite laterale egale în punctul a şi ele sunt egale cu valoarea ℓ. Vom avea deci*

$$\ell = f(a-0) = f(a+0).$$

Demonstraţie. *Necesitatea ("$\Longrightarrow$"):* Fie $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$. Atunci oricare ar fi şirul $(x_n)_n$ astfel încât $x_n \to a$ cu $x_n \in D$ şi $x_n \neq a$, vom avea că $f(x_n) \to \ell$. Alegând în particular şirul astfel încât $x_n < a$ (şi apoi $x_n > a$) vom obţine că $\ell_s = \ell_d = \ell$.

Suficienţa ("$\Longleftarrow$"): Să presupunem că $\ell_s = \ell_d = \ell$. Atunci folosind caracterizarea cu ε a limitelor laterale aavem că

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in D \text{ cu } x < a \text{ şi } |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

şi respectiv, pentru acelaşi $\varepsilon > 0$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_2 > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in D \text{ cu } x > a \text{ şi } |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Acum notez cu $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ şi obţin că

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in D \text{ cu } x \neq a \text{ şi } |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ceea ce înseamnă că $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$. ∎

Teorema 12 *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in \bar{\mathbb{R}}$ un punct de acumulare al domeniului D. Atunci orice funcţie monotonă pe D are limite laterale a.*
(fără demonstraţie)

2 Proprietăţi ale limitelor unei funcţii

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi a un punct de acumulare (finit sau nu) al domeniului de definiţie D.

Propoziţia 13 *Au loc următoarele:*
1. *Dacă* $\exists \lim_{x \to a} f(x) = \ell$ *atunci* ℓ *este unică (rezultă imediat din caracterizarea cu şiruri).*
2. *Dacă* $\exists \lim_{x \to a} f(x) = \ell$ *atunci* $\exists \lim_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$ *(rezultă imediat din caracterizarea cu şiruri).*
3. *Dacă*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),\ \forall x \in D$$

atunci

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x) \leq \lim_{x \to a} h(x)$$

(rezultă imediat din caracterizarea cu şiruri).
4. *Dacă*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),\ \forall x \in D$$

şi dacă

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$$

atunci

$$\exists \lim_{x \to a} g(x) = \ell.$$

Teorema 14 (Criteriul lui Cauchy-Bolzano) *Există limita* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ *dacă şi numai dacă* $\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* $\forall x', x'' \in D \cap V$ *cu* $x', x'' \neq a \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.
(fără demonstraţie)

Teorema 15 *Fie* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $\exists \lim_{x\to a} g(x) = 0$. *Presupunem că există* $\ell \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$|f(x) - \ell| < g(x), \ \forall x \in D.$$

Atunci $\exists \lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Demonstraţie. Fie şirul $(x_n)_n$ astfel încât $x_n \to a$ cu $x_n \neq a$ şi $x_n \in D$. Atunci

$$|f(x_n) - \ell| < g(x_n).$$

Dar $g(x_n) \to 0$, pentru $n \to \infty$. Atunci, folosind rezultatul similar de la şiruri, obţinem că $\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ ceea ce înseamnă că

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

■

Exemplul 16

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Într-adevăr,

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Deci

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Teorema 17 *Fie* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $\exists \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$. *Presupunem că*

$$f(x) \geq g(x), \ \forall x \in D.$$

Atunci $\exists \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.
(rezultă imediat din caracterizarea cu şiruri).

Exemplul 18

$$\lim_{x\to+\infty} (x + \sin x) = +\infty.$$

Într-adevăr,

$$x + \sin x \geq x - 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Deci

$$\lim_{x\to+\infty} (x + \sin x) = +\infty.$$

Teorema 19 *Fie* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $\exists \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$. *Presupunem că*

$$f(x) \leq g(x), \ \forall x \in D.$$

Atunci $\exists \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.
(rezultă imediat din caracterizarea cu şiruri).

Teorema 20 (Operaţii cu limite) *Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ astfel încât există limitele $\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to a} g(x) \in \bar{\mathbb{R}}$. Dacă au sens operaţiile de mai jos (suma, diferenţa, produsul, câtul şi puterea), atunci următoarele limite există şi au loc relaţiile de legătură:*

1.
$$\exists \lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

2.
$$\exists \lim_{x\to a} [\alpha f(x)] = \alpha \lim_{x\to a} f(x).$$

3.
$$\exists \lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

4.
$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

5.
$$\exists \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Remarca 21 *Vom prezenta acum "algebra operaţiilor" cu limite în cazul $\ell = \pm\infty$:*

$$\begin{aligned}
&+\infty + s = +\infty, && \textit{dacă } s \in \mathbb{R} \textit{ sau } s = +\infty\\
&-\infty + s = -\infty, && \textit{dacă } s \in \mathbb{R} \textit{ sau } s = +\infty\\
&\pm\infty \cdot s = \pm\infty, && \textit{dacă } s > 0 \textit{ sau } s = +\infty\\
&\pm\infty \cdot s = \mp\infty, && \textit{dacă } s < 0 \textit{ sau } s = -\infty\\
&\frac{\pm\infty}{s} = \pm\infty, && \textit{dacă } s > 0\\
&\frac{\pm\infty}{s} = \mp\infty, && \textit{dacă } s < 0\\
&\frac{s}{0_\pm} = \pm\infty, && \textit{dacă } s > 0 \textit{ sau } s = +\infty\\
&\frac{s}{0_\pm} = \mp\infty, && \textit{dacă } s < 0 \textit{ sau } s = -\infty\\
&\frac{s}{\pm\infty} = 0, && \textit{dacă } s \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Remarca 22 (Cazuri de nedeterminare)

Suma limitelor nu are sens în cazul $\infty - \infty$.

Produsul limitelor nu are sens în cazul $0 \cdot \infty$.

Raportul limitelor nu are sens în cazul $\frac{\infty}{\infty}$ şi $\frac{0}{0}$.

Puterea limitelor nu are sens în cazul 1^∞, ∞^0 şi 0^0.

Expresiile de mai sus sunt nedeterminări; Aceasta înseamnă, de exemplu în cazul 1^∞, că există două funcţii f şi g astfel încât $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \infty$ şi limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ fie nu există fie există dar poate fi orice element $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

3 Limite de funcţii elementare. Limite fundamentale

1. fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=C$. Atunci, pentru orice a, există $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C$.

2. fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_1x^p+a_2x^{p-1}+\cdots+a_px+a_{p+1}$ (cu $p\in\mathbb{N}^*$). Atunci există $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ şi există şi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a_1\cdot(\pm\infty)$.

3. fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{a_1x^p+a_2x^{p-1}+\cdots+a_px+a_{p+1}}{b_1x^q+b_2x^{q-1}+\cdots+b_qx+b_{q+1}}$ (cu $p,q\in\mathbb{N}^*$). Atunci există $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\forall a\in D$ şi există şi

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1}{b_1}, & \text{dacă } p=q,\\ 0, & \text{dacă } p<q,\\ \dfrac{a_1}{b_1}\cdot(\pm\infty), & \text{dacă } p>q.\end{cases}$$

4. fie $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^\alpha$ cu $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Atunci există $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ şi există şi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)^\alpha=\begin{cases}+\infty, & \text{dacă } \alpha>0,\\ 0, & \text{dacă } \alpha<0.\end{cases}$$

5. fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\alpha^x$ cu $\alpha\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$. Atunci există $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ şi există şi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & \text{dacă } \alpha>1,\\ 0, & \text{dacă } 0<\alpha<1.\end{cases}$$

şi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha^{-\infty}=\begin{cases}0, & \text{dacă } \alpha>1,\\ +\infty, & \text{dacă } 0<\alpha<1.\end{cases}$$

6. fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$. Atunci există $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ şi $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$ şi **nu există limitele la infinit**, adică

$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty}\sin x \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty}\cos x$$

(se va arăta folosind caracterizarea cu şiruri a limitei; se vor lua şirurile $x_k=2k\pi$ şi $y_k=(2k+1)\pi$).

Luăm în continuare funcţia u astfel încât $\exists \lim\limits_{x\to a} u(x)=0$. Atunci

7.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

şi, în general,

$$\lim_{x\to a}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e.$$

8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg} x}{x}=1$$

şi, în general,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$$

şi
$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)}=1.$$

9.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha^x-1}{x}=\ln\alpha,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

şi, în general,
$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1$$

şi
$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln\alpha,\ \text{unde } \alpha>0$$

şi
$$\lim_{x\to a}\frac{(1+u(x))^\alpha-1}{u(x)}=\alpha.$$

10.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^x}{x^n}=+\infty,\ \text{cu } n\in\mathbb{N},\ \alpha>1$$

şi
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0,\ \text{cu } n\in\mathbb{N}^*.$$

Dacă luăm funcţia u astfel încât $\exists\lim\limits_{x\to a}u(x)=+\infty$. Atunci

11.
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

şi, în general,
$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e.$$

Exemplul 23 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^{-2}=+\infty,$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-1/2}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}x^{-1/3}=0$

Exemplul 24 $\lim\limits_{x\to0_+}\frac{1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to0_-}\frac{1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$

Exemplul 25 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+5/x)^x=e^5$

Exemplul 26 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

Exemplul 27 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=\ln(+\infty)=+\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=\ln 0_+=-\infty$

Exemplul 28 $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=e^\infty=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=e^{-\infty}=\frac{1}{e^\infty}=0$

Exemplul 29 *Dacă notăm* $y := \alpha^x - 1 \Rightarrow \alpha^x = y + 1 \Rightarrow x \ln \alpha = \ln(y+1) \Rightarrow x = \frac{\ln(y+1)}{\ln \alpha}$. *Deci*

$$\frac{\alpha^x - 1}{x} = \frac{y}{\frac{\ln(y+1)}{\ln \alpha}} = \frac{\ln \alpha}{\frac{\ln(y+1)}{y}} \xrightarrow[y \to 0]{} \frac{\ln \alpha}{1} = \ln \alpha.$$

Exemplul 30 *Dacă notăm* $y := \ln(1+x)^\alpha \Rightarrow \ln(1+x) = y/\alpha \Rightarrow x = e^{y/\alpha} - 1$. *Deci*

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{e^y - 1}{e^{y/\alpha} - 1} = \frac{e^y - 1}{y} \cdot \frac{1}{\frac{\left(e^{\frac{1}{\alpha}}\right)^y - 1}{y}} \xrightarrow[y \to 0]{} \ln e \cdot \frac{1}{\ln e^{\frac{1}{\alpha}}} = \alpha.$$

Exemplul 31 *(nedeterminarea* 0^0*)*

$$x^x \xrightarrow[x \to 0_+]{} 0.$$

Într-adevăr, $\ln x^x = x \ln x$ *şi notând* $y = \frac{1}{x}$ *obţin* $x \to 0_+ \Leftrightarrow y \to +\infty$ *şi apoi*

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} = e^{\frac{1}{y} \ln \frac{1}{y}} = e^{\frac{-\ln y}{y}} \xrightarrow[y \to +\infty]{} e^{-0} = 1.$$

Exemplul 32 *(nedeterminarea* ∞^0*)*

$$x^{1/x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

Într-adevăr,

$$x^{1/x} = e^{\ln x^{1/x}} = e^{\frac{\ln x}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} e^0 = 1.$$

Exemplul 33 *(nedeterminarea* $0 \cdot \infty$*)*

$$x \ln x \xrightarrow[x \to 0_+]{} 0.$$

Într-adevăr, notând $y = \frac{1}{x}$ *obţin* $x \to 0_+ \Leftrightarrow y \to +\infty$ *şi apoi*

$$x \ln x = \frac{1}{y} \ln \frac{1}{y} = \frac{-\ln y}{y} \xrightarrow[y \to +\infty]{} -0 = 0.$$

4 Funcţii continue

Definiţia 34 *Spunem că o funcţie* $f : D \to \mathbb{R}$ *este continuă în punctul* a *din domeniul de definiţie* D *dacă oricare ar fi vecinătatea* V *a lui* $f(a)$ *există o vecinătate* U *a lui* a *astfel încât* $\forall x \in U \cap D$ *să avem* $f(x) \in V$. *În acest caz vom spune că* a *este* ***punct de continuitate*** *al funcţiei.*

Remarca 35 *Fie* $a \in D$. *Atunci el poate fi punct de acumulare pentru* D *sau nu. Dacă nu este atunci el se numeşte punct izolat al mulţimii* D *(vezi exemplele:* $D = [0,1] \cup \{2\}$, $D = [1,2) \cup \{0\}$, $D = (0,3] \setminus \{2\}$*).*

Remarca 36 *Problema continuităţii nu are sens decât în punctele în care funcţia este definită (ca să aibă sens* $f(a)$*).*

Definiţia 37 (Caracterizarea cu şiruri a continuităţii) *Funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$ *este continuă în punctul* $a \in D$ *dacă şi numai dacă* $\forall (x_n)_n$ *astfel încât* $x_n \to a$, *cu* $x_n \in D$, *să avem că* $f(x_n) \to f(a)$.

Definiţia 38 (Caracterizarea cu ε **şi** δ **a continuităţii)** *Funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$ *este continuă în punctul* $a \in D$ *dacă şi numai dacă* $\forall \varepsilon > 0$, *există* $\delta > 0$ *(care poate depinde de* ε*) astfel încât* $\forall x \in D$ *cu* $|x - a| < \delta$, *să avem că* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Exemplul 39 *Funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, *este continuă în orice* $x_0 \in \mathbb{R}$.
Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ *arbitrar fixat. Avem*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow |ax + b - (ax_0 + b)| < \varepsilon \Leftrightarrow |a| \cdot |x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

Luând $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ *avem*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{|a|} \text{ astfel încât } \forall |x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{|a|} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Propoziţia 40 *O funcţie este continuă în orice punct izolat al domeniului ei de definiţie.*

Teorema 41 *Funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$ *este continuă într-un punct de acumulare* $a \in D$ *dacă şi numai dacă există* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *şi aceasta este egală cu valoarea* $f(a)$.

Definiţia 42 *Spunem că funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* D *dacă este continuă în fiecare punct din* D.

Remarca 43 *Funcţiile elementare sunt continue în orice punct din domeniul lor de definiţie.*

Definiţia 44 *1. Dacă funcţia* f *nu este continuă în* a *atunci spunem că* f *este discontinuă în* a *(iar* a *se numeşte punct de discontinuitate al funcţiei).*
2. Un punct de discontinuitate a *spunem că este* ***punct de discontinuitate de prima speţă*** *dacă există limite laterale în* a *şi ele sunt finite.*
3. Un punct de discontinuitate a *spunem că este* ***punct de discontinuitate de a doua speţă*** *dacă cel puţin una dintre limitele laterale în* a *nu există sau este infinită.*

Teorema 45 *Dacă o funcţie* $f : D \to \mathbb{R}$ *este monotonă pe intervalul de definiţie* D, *atunci* f *admite doar puncte de discontinuitate de prima speţă şi acestea formează o mulţime numărabilă.*

Definiţia 46 *1. Funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$ *este continuă la stânga în punctul* $a \in D$ *dacă* $\forall (x_n)_n$ *astfel încât* $x_n \to a$, *cu* $x_n \leq a$ *şi* $x_n \in D$, *să avem că* $f(x_n) \to f(a)$.
2. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ *este continuă la dreapta în punctul* $a \in D$ *dacă* $\forall (x_n)_n$ *astfel încât* $x_n \to a$, *cu* $x_n \geq a$ *şi* $x_n \in D$, *să avem că* $f(x_n) \to f(a)$.

Teorema 47 *Funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$ *este continuă în punctul* $a \in D$ *dacă şi numai dacă este continuă la stânga şi la dreapta în punctul* a.

În continuare vom prezenta câteva proprietăţi ale funcţiilor continue.

Teorema 48 *Dacă* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *sunt două funcţii continue în* $a \in D$ *atunci:*
1. funcţia $f + g$ *este continuă în* a;
2. funcţia $\alpha \cdot f$ *este continuă în* a *(unde* $\alpha \in \mathbb{R}$*);*
3. funcţia $f \cdot g$ *este continuă în* a;
4. funcţia $\frac{f}{g}$ *este continuă în* a *(dacă în plus* $g(a) \neq 0$*);*
5. funcţia f^g *este continuă în* a *(dacă are sens operaţia* $f(a)^{g(a)}$*).*
(pentru demonstraţie se va folosi caracterizarea cu şiruri a continuităţii).

Propoziţia 49 *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă în punctul* $a \in D$. *Atunci:*
1. dacă $\alpha < f(a) < \beta$, *atunci* $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât să avem* $\alpha < f(x) < \beta$, $\forall x \in U \cap D$;
2. dacă $f(a) \neq 0$, *atunci* $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât să avem* $f(x) \neq 0$, $\forall x \in U \cap D$;
3. dacă în orice vecinătate a lui a *există puncte în acre* f *are valori strict negative şi strict pozitive atunci* $f(a) = 0$.

Propoziţia 50 *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe intervalul de definiţie D. Atunci:*
1. dacă $\exists a, b \in D$ astfel încât $a < b$ şi $f(a) \cdot f(b) < 0$ atunci există cel puţin un punct între a şi b în care funcţia se anulează ($\exists c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$).
2. dacă f nu se anulează în nici un punct din D atunci f păstrează semn constant pe D.

Teorema 51 (lui Weierstrass) *O funcţie continuă pe o mulţime compactă (o mulţime care este închisă şi mărginită) este mărginită şi îşi atinge marginile pe această mulţime.*

Remarca 52 *Deci dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$, atunci*

$$\exists M > 0 \text{ astfel încât } |f(x)| < M, \forall x \in [a, b]$$

şi

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] \text{ astfel încât } f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{şi} \quad f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$