Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

CURS VII-IX

Capitolul IV: Funcţii derivabile. Derivate şi diferenţiale

1 Derivata unei funcţii. Interpretarea geometrică

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval şi fie $a \in I$. Definim funcţia $R : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ prin

$$R(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ne interesează problema existenţei limitei acestei funcţii în punctul a (având în vedere că a este, evident, punct de acumulare pentru mulţimea $I \setminus \{a\}$).

Definiţia 1 *Spunem că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $a \in I$ dacă raportul $R(x)$ are limită finită în punctul a (adică dacă $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$). Limita se va numi derivata funcţiei f în punctul a şi se va nota cu $f'(a)$. Deci*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivata se mai notează şi cu $\frac{df}{dx}(a)$.

Remarca 2 *Se vede imediat că dacă notăm cu $h := x - a$ obţinem că $x \to a \Leftrightarrow h \to 0$ (şi evident $a + h$ este tot din I). Deci*

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h + a) - f(a)}{h}.$$

Remarca 3 *Putem nota şi în modul următor:*

$$\begin{aligned} \Delta x &:= x - a, \\ \Delta f &:= f(x) - f(a), \end{aligned}$$

deci obţinem egalităţile

$$x = a + \Delta x, \quad f(x) = f(a) + \Delta f$$

Ne interesează limita cantităţii

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Deci

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Remarca 4 *Dacă funcţia f admite derivată în punctul a, atunci graficul său admite tangentă în punctul $M(a, f(a))$ de pe grafic. Dacă derivata $f'(a)$ este finită atunci panta acestei drepte este egală cu $f'(a)$; dacă derivata este inifintă, tangenta este paralelă cu axa Oy (tangentă este verticală, adică panta este infinită).*

Remarca 5 *Vezi şi desenul cu cele două puncte* $M(a, f(a))$, $P(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$ *şi cu graficul (curba)* $y = f(x)$, *secanta (dreapta)* $y = s(x)$ *şi tangenta* $y = t(x)$. *Secanta este dată de ecuaţia*

$$\begin{aligned} y &= s(x) = f(a) + \frac{\Delta f}{\Delta x}(x-a), \\ y &= t(x) = f(a) + f'(a)(x-a). \end{aligned}$$

Remarca 6 *Dacă* $s(t)$ *reprezintă legea de mişcare rectilinie neuniformă a unui mobil, atunci derivata* $s'(t_0)$ *reprezintă viteza* $v(t_0)$ *a mobilului la momentul* t_0.

Definiţia 7 *Dacă limita raportului* $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *există dar este infinită (adică* $\pm\infty$*) atunci spunem că funcţia are derivată (care este limita obţinută* $\pm\infty$*) dar nu este derivabilă.*

Remarca 8 *Derivata* $f'(a)$ *poate fi definită echivalent în următoarele forme (vezi definirile echivalente ale limitei unei funcţii):*
1. $\forall (x_n)_n \subset I$ *cu* $x_n \to a$ *şi* $x_n \neq a$,

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

2. $\forall V \in \mathcal{V}(f'(a))$, $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* $\forall x \in U \cap I$ *cu* $x \neq a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in V$.
3. *(cazul* $f'(a)$ *finită)* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x \in I$ *cu* $x \neq a$ *şi* $|x-a| < \delta$, $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \varepsilon$.

Teorema 9 *Dacă funcţia* $f : I \to \mathbb{R}$ *este derivabilă în punctul* $a \in I$ *atunci* f *este continuă în* a.

Demonstraţie. Evident $f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a)$, $\forall x \in I \setminus \{a\}$. Deci, având în vedere că există finită limita $f'(a)$, deducem

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left[f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) \right] = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

■

Remarca 10 *Nu toate funcţiile continue într-un punct sunt derivabile în acel punct. De exemplu,* $f(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Avem, pentru* $a = 0$,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1, & \text{dacă } x > 0, \\ -1, & \text{dacă } x < 0, \end{cases}$$

deci nu există limita $\lim_{x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ *adică nu există derivata funcţiei* $|x|$ *în origine (dar există derivatele laterale).*

Derivabilitatea este deci o proprietate mai tare dacât continuitatea.

Definiţia 11 *Spunem că* f *admite derivată la stânga în punctul* a *dacă* $\exists \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: f_s'(a)$.

Definiţia 12 *Spunem că* f *admite derivată la dreapta în punctul* a *dacă* $\exists \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: f_d'(a)$.

Teorema 13 *O funcţie are derivată într-un punct interior* $a \in I$ *dacă şi numai dacă are derivate laterale egale în punctul* a. *În acest caz* $f_s'(a) = f_d'(a) = f'(a)$.

Definiţia 14 *Dacă funcţia* f *admite în punctul* a *derivate laterale care sunt diferite şi cel puţin una dintre ele este finită atunci punctul* $M(a, f(a))$ *de pe grafic se numeşte* ***punct unghiular al graficului*** *(vezi desenul).*

Definiţia 15 *Dacă una dintre derivatele laterale este* $+\infty$ *şi cealaltă este* $-\infty$ *atunci punctul* $M(a, f(a))$ *de pe grafic se numeşte* ***punct de întoarcere al graficului*** *(vezi desenul).*

2 Operaţii cu funcţii derivabile

Teorema 16 *Presupunem că funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ admit derivatele $f'(a)$ şi $g'(a)$ în punctul $a \in I$ şi că operaţia $f'(a) + g'(a)$ are sens. Atunci $f + g$ are derivată în a şi are loc*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Demonstraţie. Se trece la limită în $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$. ■

Remarca 17 *În teorema precedentă nu s-a cerut ca funcţiile să fie derivabile, deci cantităţile $f'(a)$ şi $g'(a)$ sunt din $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

Teorema 18 *Presupunem că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ admite derivata $f'(a)$ în punctul $a \in I$. Atunci $\forall C \in \mathbb{R}^*$, funcţia $C \cdot f$ are derivată în a şi are loc*

$$(C \cdot f)'(a) = C \cdot f'(a).$$

Demonstraţie. Se trece la limită în $C \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. ■

Propoziţia 19 *Având în vedere cele două teoreme de mai sus deducem că* ***operatorul de derivare este operator liniar*** *(definit pe mulţimea funcţiilor derivabile). Adică pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

Teorema 20 *Presupunem că funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile (admite derivate care sunt finite) în punctul $a \in I$. Atunci $f \cdot g$ este derivabilă în a şi are loc*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) g'(a).$$

Demonstraţie. Se trece la limită în egalitatea

$$\frac{f(x) g(x) - f(a) g(x) + f(a) g(x) - f(a) g(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$

■

Teorema 21 *Presupunem că funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile (admite derivate care sunt finite) în punctul $a \in I$ şi că $g'(a) \neq 0$. Atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă în a şi are loc*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{g^2(a)}.$$

Demonstraţie. Se trece la limită în

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x-a} &= \frac{1}{g(x) g(a)} \frac{f(x) g(a) - f(a) g(a) + f(a) g(a) - f(a) g(x)}{x-a} \\ &= \frac{1}{g(x) g(a)} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(a) - f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right]. \end{aligned}$$

■

Teorema 22 *Presupunem că funcţia $g : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă (admite derivată care este finită) în punctul $a \in I$ şi că $f : J \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $g(a) \in J$. Atunci funcţia compusă $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ este derivabilă în a şi are loc*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

(fără demonstraţie).

Teorema 23 *Fie $f : I \to J$ o funcţie strict monotonă astfel încât $J = f(I)$ (atunci f este bijecţie). Dacă f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ astfel încât $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcţia sa inversă $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în $y_0 = f(x_0) \in J$ şi*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

(fără demonstraţie).

Remarca 24 *Avem evident relaţia $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$ $\left(= \left(f \circ f^{-1}\right)(x)\right)$. Derivăm acum această compunere în raport cu x (folosind Teorema 22) şi obţinem identitatea*

$$\left(f^{-1} \circ f\right)'(x_0) = \left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1$$

3 Derivatele funcţiilor elementare

Vom da mai întâi demonstraţii ale derivatelor câtorva funcţii elementare.

- Fie funcţiile afine $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar ales. Atunci

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[a(x_0 + \Delta x) + b] - [ax_0 + b]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a$$

- Fie $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar ales. Atunci

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

  Deci obţinem derivata $\left(x^2\right)' = 2x$.

- Fie $f(x) = x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, şi fie $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar ales. Atunci

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^n + C_n^1 x_0^{n-1} \Delta x + C_n^2 x_0^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + C_n^{n-1} x_0 (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(C_n^1 x_0^{n-1} + C_n^2 x_0^{n-2} \Delta x + \cdots + C_n^{n-1} x_0 (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right) = C_n^1 x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}. \end{aligned}$$

  Deci obţinem derivata $(x^n)' = nx^{n-1}$.

- Mai general, fie $f(x) = x^\alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ arbitrar ales. Atunci

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^\alpha \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1\right]}{\Delta x} = x_0^{\alpha - 1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x_0}} \\ &= (\text{notez } y := \frac{\Delta x}{x_0}) = x_0^{\alpha-1} \lim_{y \to 0} \frac{(1 + y)^\alpha - 1}{y} = (\text{folosesc limita fundamentală}) \\ &= x_0^{\alpha - 1} \cdot \alpha \end{aligned}$$

  Deci obţinem derivata $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$.
  Deducem astfel că $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, valabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$ dar de asemenea, se poate demonstra că egalitatea $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \left(x^{5/3}\right)' = \frac{5}{3} x^{2/3}$ este valabilă pentru orice $x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

- (Temă) demonstraţi formula
$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Putem astfel demonstra/deduce derivatele tuturor funcţiilor elementare:

1. fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = C$. Atunci, pentru orice x, există $f'(x) = 0$.
2. fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Atunci, pentru orice x, există $f'(x) = 1$.
3. fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci, pentru orice x, există $f'(x) = nx^{n-1}$.
4. fie $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$, există $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. fie $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$, există $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
6. fie $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$, există $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.
7. fie $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$, cu $p \in \mathbb{R}$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$, există $f'(x) = px^{p-1}$.
8. fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^x$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $f'(x) = e^x$.
9. fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, cu $a > 0$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $f'(x) = a^x \ln a$.
10. fie $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$, există $f'(x) = \frac{1}{x}$.
11. fie $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$, există $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$.
12. fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $f'(x) = \cos x$.
13. fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $f'(x) = -\sin x$.
14. fie $f : \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{tg} x$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, există $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
15. fie $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{ctg} x$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, există $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$.
16. fie $f : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$. Atunci, pentru orice $x \in (-1,1)$, există $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
17. fie $f : [-1,1] \to [0,\pi]$, $f(x) = \arccos x$. Atunci, pentru orice $x \in (-1,1)$, există $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
18. fie $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \mathrm{arctg} x$. Atunci, pentru orice x, există $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
19. fie $f : \mathbb{R} \to (0,\pi)$, $f(x) = \mathrm{arcctg} x$. Atunci, pentru orice x, există $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

Remarca 25 *Toate formulele de mai sus se rescriu imediat (adăugând u' în dreapta) în cazul compunerii funcţiilor elementare cu o funcţie $u(x)$. De exemplu, $(\mathrm{arctg}\, u)'(x) = \frac{1}{1+u^2(x)} \cdot u'(x)$.*

Exemplul 26 *Derivata funcţiei polinomiale $f(x) = 3x^5 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ utilizează derivata lui x^n precum şi liniaritatea operatorului de derivare. Astfel:*

$$f'(x) = \left(3x^5 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 2\right)' = 15x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 6x - 5 + 0.$$

Exemplul 27 *Derivata funcţiei raţionale $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{2x-1}$ utilizează derivata lui x^n precum şi regula de derivare a câtului. Astfel:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2-3x+1}{2x-1}\right)' = \frac{\left(x^2-3x+1\right)'(2x-1) - \left(x^2-3x+1\right)(2x-1)'}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{(2x-3)(2x-1) - \left(x^2-3x+1\right)2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x+1}{(2x-1)^2}. \end{aligned}$$

Exemplul 28 *Derivata funcţiei* $f(x) = x^3 \sin x$ *utilizează derivata lui* x^n *şi* $\sin x$ *precum şi regula de derivare a produsului. Astfel:*

$$f'(x) = \left(x^3 \sin x\right)' = \left(x^3\right)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$$

Exemplul 29 *Derivata funcţiei* $f(x) = \mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *utilizează derivata lui* $\sin x$ *şi* $\cos x$ *precum şi regula de derivare a câtului. Astfel:*

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = \text{(sau)} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$$

Exemplul 30 *Derivata funcţiei* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *utilizează derivata lui* $1 - x^2$ *precum şi regula de derivare a compunerii de funcţii. Astfel* $f(x) = \sqrt{u(x)}$ *unde* $u(x) = 1 - x^2$*.*

$$f'(x) = \left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \left(1 - x^2\right)' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exemplul 31 *Derivata funcţiei* $f(x) = e^{\cos(3x)}$ *utilizează regula de derivare a compunerii de funcţii. Astfel* $f(x) = e^{u(x)}$ *unde* $u(x) = \cos(3x)$ *iar* $u(x) = \cos v(x)$*, unde* $v(x) = 3x$*. Deci*

$$f'(x) = \left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

iar

$$u'(x) = (\cos v(x))' = -\sin v(x) \cdot v'(x).$$

Prin urmare

$$f'(x) = e^{\cos(3x)} \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 = -3 \sin(3x) e^{\cos(3x)}.$$

Exemplul 32 *Derivata funcţiei* $g(x) = \ln f(x)$ *este imediată:*

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

4 Proprietăţi ale funcţiilor derivabile

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval şi fie $a \in I$.

Definiţia 33 *Spunem* a *este un punct de minim local al funcţiei* f *dacă* $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât*

$$f(x) \geq f(a), \ \forall x \in U \cap I.$$

Definiţia 34 *Spunem* a *este un punct de maxim local al funcţiei* f *dacă* $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât*

$$f(x) \leq f(a), \ \forall x \in U \cap I.$$

Definiţia 35 *Punctele de minim sau maxim (local) se numesc puncte de extrem (local).*

Teorema 36 (lui Fermat) *Dacă* f *are derivată într-un punct* a *din interiorul intervalului* I *care este punct de extrem local atunci derivata sa este nulă în acest punct.*

Demonstraţie. Presupunem că a este punct de maxim local. Atunci, există o vecinătate U a lui a ($U \in \mathcal{V}(a)$) astfel încât

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in U \cap I.$$

Pentru $x < a$ avem că

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

deci trecând la limită avem că

$$f_s'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Pentru $x > a$ avem că

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

deci trecând la limită avem că

$$f_d'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Dar derivata $f'(a)$ există deci

$$f'(a) = f_s'(a) = f_d'(a) \quad \text{(poz. şi neg. în acelaşi timp)}$$

ceea ce înseamnă că derivata $f'(a) = 0$. ■

Definiţia 37 *Punctele în care funcţia este derivabilă şi pentru care derivata se anulează se numesc puncte critice; deci* ***Th. lui Fermat spune că punctele de extrem (în care funcţia este derivabilă) sunt printre punctele critice.***

Remarca 38 1. *dacă punctul de extrem nu se află în interiorul intervalului ci la o extremitate a sa atunci este posibil ca derivata să nu se anuleze în acel punct.*
2. *funcţia f poate avea extrem într-un punct fără ca ea să admită derivată în acel punct (de exemplu funcţia $f(x) = |x|$).*
3. *recoproca teoremei lui Fermat nu este adevărată; există deci punte în care derivata este nulă dar punctul nu este de extrem (de exemplu funcţia $f(x) = x^3$ care este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ iar 0 este punct critic).*

Teorema 39 (lui Rolle) *Fie $a, b \in I$ cu $a < b$. Presupunem că:*
1. *f este continuă pe $[a, b]$,*
2. *f este derivabilă pe (a, b),*
3. *$f(a) = f(b)$.*
Atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Demonstraţie. Conform teoremei lui Weierstrass avem că $f([a, b])$ este intervalul $[m.M]$ astfel încât valorile maxime sunt atinse de puncte din $[a, b]$; mai precis, există punctele de extrem (global) $x_m, x_M \in [a, b]$ astfel încât

$$\begin{aligned} f(x_m) &= \min_{x \in [a,b]} f(x) := m, \\ f(x_M) &= \max_{x \in [a,b]} f(x) := M \end{aligned}$$

Acum dacă $m = M$ atunci f este constantă pe $[a, b]$ deci $f' = 0$ pe $[a, b]$. Deci prespunem că $m < M$. Deoarece $f(a) = f(b)$ avem fie

$$f(a) = f(b) < M$$

fie

$$f(a) = f(b) > m.$$

Dacă $f(a) = f(b) < M$ atunci x_M nu poate fi a sau b deci $x_M \in (a,b)$ şi, având în vedere că f este derivabilă în punctul de maxim x_M deducem (din teorema lui Fermat) că x_M este punct critic, adică $f'(x_M) = 0$.

Dacă $f(a) = f(b) > m$ atunci x_m nu poate fi a sau b deci $x_m \in (a,b)$ şi, având în vedere că f este derivabilă în punctul de minim x_m deducem (din teorema lui Fermat) că x_m este punct critic, adică $f'(x_m) = 0$. ■

Remarca 40 1. *condiţia ca domeniul să fie interval este esenţială pentru valabilitatea teoremei lui Rolle.*
2. *se deduce imediat că între două rădăcini ale funcţiei f se află cel puţin o rădăcină a derivatei.*
3. *deci, între două rădăcini consecutive ale derivatei se află cel mult o rădăcină a funcţiei.*
4. *(semnificaţia geometrică a teoremei lui Rolle) există cel puţin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât tangenta la graficul lui f în punctul $M(c, f(c))$ este paralelă cu axa Ox (vezi desenul).*

Exemplul 41 *Fie $f(x) = x^2$, $x \in [-1,1]$. Atunci f este evident derivabilă şi continuă pe $[-1,1]$. Ecuaţia $f'(x) = 0$ are exact o soluţie în intervalul $[-1,1]$ (punctul $c = 0$).*

Exemplul 42 *Fie $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$, $x \in (0,1]$. Avem că $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ iar f este evident derivabilă şi continuă pe $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Deci $f' = 0$ are cel puţin o soluţie x_n în intervalul $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$. Deci ecuaţia $f'(x) = 0$ are o infinitate numărabilă de soluţii în intervalul $(0,1)$.*

Teorema 43 (creşterilor finite a lui Lagrange) *Fie $a, b \in I$ cu $a < b$. Presupunem că:*
1. *f este continuă pe $[a,b]$,*
2. *f este derivabilă pe (a,b),*
Atunci există cel puţin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât să avem

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Demonstraţie. Definim funcţia $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) - f(x)$. Evident g este contiunuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b) (datorită lui f). În plus, $g(a) = g(b) = -f(a)$. Aplicând acum Teorema lui Rolle obţinem că $\exists c \in (a,b)$ astfel încât

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot 1 - f'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

■

Remarca 44 1. *formula de mai sus se numeşte formula creşterilor finite.*
2. *dacă graficul funcţiei f admite tangentă în fiecare punct (cu excepţia eventuală a extremităţilor) atunci există cel puţin un punct de pe grafic (care nu coincide cu extremităţile) în care tangenta este paralelă cu coarda care uneşte extremităţile (vezi desenul).*
3. *(semnificaţia geometrică a teoremei lui Lagrange) există cel puţin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât tangenta la graficul lui f în punctul $M(c, f(c))$ este paralelă cu dreapta care uneşte punctele $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$ (vezi desenul).*

Exemplul 45 *Fie $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Evident $\exists f'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$. Fie acum $0 < a < b < +\infty$. Aplicând Teorema lui Lagrange obţinem că $\exists c \in (a,b)$ astfel încât*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \ln b - \ln a = \frac{b-a}{c}.$$

Deoarece $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$ *rezultă inegalitatea*

$$\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a},\ \forall 0 < a < b < +\infty.$$

În particular pentru $a = 1$ *şi* $b = x + 1 > 0$ *rezultă inegalitatea*

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x,\ \forall x \in (-1, +\infty).$$

În particular pentru $a = x > 0$ *şi* $b = x + 1 > 0$ *rezultă inegalitatea*

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x},\ \forall x \in (0, +\infty).$$

Teorema 46 (prima consecinţă a Teoremei lui Lagrange) *Fie* f *derivabilă pe un interval* I. *Atunci* f *constantă pe* $I \Leftrightarrow f' = 0$ *pe* I.

Demonstraţie. Fie $a \in I$ fixat şi $x \in I$ oarecare $x \neq a$. Atunci, aplicând Teorema lui Lagrange, obţin că $\exists \xi \in (a, x)$ (sau în (x, a)) astfel încât $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) \equiv 0$, deci $f(x) = f(a)$. ■

Remarca 47 *Dacă* f *are derivata nulă nu pe un interval (ci, spre exemplu, pe o reuniune de intervale) atunci* f *nu este constantă pe acea mulţime.*

Teorema 48 (a doua consecinţă a Teoremei lui Lagrange) *Fie* f *derivabilă pe un interval* I. *Atunci*
1. f *(strict) crescătoare pe* $I \Leftrightarrow f'$ *este (strict) pozitivă pe* I,
2. f *(strict) descrescătoare pe* $I \Leftrightarrow f'$ *este (strict) negativă pe* I.

Demonstraţie. 1.
"$\Rightarrow$" Fie $x_0 \in I$ din interiorul intervalului I. Atunci $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, $\forall x \in I$ cu $x > x_0$. Deci

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

"$\Leftarrow$" Presupunem că $f' \geq 0$ pe I şi fie $x_1 < x_2$ din I arbitrari aleşi. Atunci, aplicând Teorema lui Lagrange pe $[x_1, x_2]$ deducem că $\exists c \in (x_1, x_2)$ astfel încât

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c).$$

Deoarece $f'(c) \geq 0$ obţinem $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. ■

Corolarul 49 *Dacă derivata* f' *nu se anulează pe* I *atunci* f *este strict monotonă pe* I.

Exemplul 50 *Vom arăta inegalitatea*

$$e^x > 1 + x,\ \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Să notăm cu $f(x) = e^x - x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Calculăm* $f'(x) = e^x - 1$ *care are semnul*

$$f'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{dacă } x > 0, \\ < 0, & \text{dacă } x < 0, \\ = 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

deci, aplicând consecinţa teoremei lui Lagrange, obţinem că

$$f = \begin{cases} \text{strict cresc. pe } (0, +\infty), \\ \text{strict descresc. pe } (-\infty, 0). \end{cases}$$

Atunci $f(x) > f(0) = 0$, $\forall x > 0$ *şi* $f(x) > f(0) = 0$, $\forall x < 0$, *adică* $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ *şi atinge valoarea* 0 *doar în* $x = 0$.

Deci

$$e^x - x - 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Exemplul 51 *Vom arăta inegalitatea*

$$e^x \geq x^e,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

şi faptul că e *este singurul număr care verifică egalitatea.*

Să notăm cu $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$. *Calculăm* $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ *care are semnul*

$$f'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{dacă } x \in (0, e), \\ < 0, & \text{dacă } x \in (e, +\infty), \\ = 0, & \text{dacă } x = 1, \end{cases}$$

deci, aplicând consecinţa teoremei lui Lagrange, obţinem că

$$f = \begin{cases} \text{strict cresc. pe } (0, e), \\ \text{strict descresc. pe } (e, +\infty). \end{cases}$$

Atunci $f(x) < f(e) = 1/e$, $\forall x \in (0, e)$ *şi* $f(x) < f(e) = 1/e$, $\forall x \in (e, +\infty)$, *adică* $f(x) < 1/e$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$ *şi atinge valoarea* $1/e$ *doar în* $x = e$.

Deci $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$

$$\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow e \ln x < x \Leftrightarrow \ln x^e < x \Leftrightarrow x^e < e^x.$$

Teorema 52 (a treia consecinţă a Teoremei lui Lagrange) *Fie* f *continuă pe un interval* I *şi derivabilă pe* $I \setminus \{x_0\}$. *Dacă există* $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ *atunci există şi* $f'(x_0)$ *şi*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

(fără demonstraţie).

Exemplul 53 *Fie*

$$f(x) = \begin{cases} a \sin(2x) - 4, & \text{dacă } x < 0, \\ b(x-1) + e^x, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Dacă dorim ca f *să fie derivabilă în origine atunci trebuie mai întâi ca* f *să fie continuă în origine; calculez*

$$\begin{aligned} f(0-0) &:= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -4 \\ f(0+0) &:= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -b + 1 \end{aligned}$$

deci impun ca

$$-4 = -b + 1 \Leftrightarrow b = 5.$$

Acum calculez

$$f'(x) = \begin{cases} 2a \cos(2x), & \text{dacă } x < 0, \\ 5 + e^x, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

şi limitele

$$\begin{aligned} f_s'(x) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f'(x) = 2a, \\ f_d'(x) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f'(x) = 6. \end{aligned}$$

Impun acum ca să existe $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_s'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_d'(x)$ *adică* $a = 3$ *şi deci* $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 6$. *În concluzie, pentru* $a = 3, b = 5$ *funcţia* f *este continuă şi derivabilă în* 0 *şi derivata este dată de*

$$f'(x) = \begin{cases} 6\cos(2x), & \text{dacă } x < 0, \\ 5 + e^x, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Teorema 54 (lui Cauchy) *Fie* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *şi* $a, b \in I$ *cu* $a < b$. *Presupunem că:*
1. f, g *sunt continue pe* $[a, b]$,
2. f, g *sunt derivabile pe* (a, b),
3. $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$.
Atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ *astfel încât să avem*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstraţie. Evident, din Teorema lui Rolle, $g(a) \neq g(b)$ (altfel ar exista un punct în care derivata g' se anulează). Definim funcţia $h : I \to \mathbb{R}$,

$$h(x) := [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)] \cdot [f(x) - f(a)].$$

Evident h este contiunuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b) (datorită lui f şi g). Aplicând acum Teorema lui Rolle obţinem că $\exists c \in (a, b)$ astfel încât

$$h'(c) = 0 \Leftrightarrow [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

■

5 Teorema lui l'Hôpital

Teorema 55 *Fie* f, g *două funcţii definite pe o vecinătate a lui* a *(exceptând eventual* a*) astfel încât*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \ell$$

unde ℓ *este* 0, $-\infty$ *sau* $+\infty$. *Dacă sunt derivabile în vecinătatea lui* a *(exceptând eventual* a*) astfel încât* $g'(x) \neq 0, \forall x \neq a$, *şi dacă*

$$\text{există limita } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{, finită sau infinită,}$$

atunci există şi limita $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *şi este egală tot cu* L, *adică*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

(fără demonstraţie).

Remarca 56 1. *Teorema lui l'Hôpital se poate aplica de mai multe ori, de exemplu,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = L$$

2. *Teorema lui l'Hôpital se poate aplica şi în celelalte cazuri de nedeterminări.*
Astfel, în cazul $0 \cdot \infty$ *se poate utiliza identitatea* $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$
În cazul 0^0, ∞^0, 1^∞ *se poate utiliza identitatea* $f^g = e^{\ln f^g} = e^{g \ln f}$

Exemplul 57 *Pentru fracţia* $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin(5x)}$ *observăm că suntem în condiţiile teoremei lui l'Hôpital deci*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin(5x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{5\cos(5x)}=\frac{2e^{0}+2e^{0}}{5\cos 0}=\frac{4}{5}.$$

Exemplul 58 *Pentru fracţia* $\frac{1+3x-\sqrt{(1+2x)^3}}{x\sin x}$ *observăm că suntem în condiţiile teoremei lui l'Hôpital deci*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+3x-\sqrt{(1+2x)^3}}{x\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3-\frac{3}{2}(1+2x)^{\frac{3}{2}-1}(1+2x)'}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{3-3(1+2x)^{1/2}}{\sin x+x\cos x}.$$

Acum aplicăm încă o dată teorema lui l'Hôpital şi obţin

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-3(1+2x)^{1/2}}{\sin x+x\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-3\frac{1}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2}-1}(1+2x)'}{\cos x+\cos x+x(-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-3(1+2x)^{\frac{-1}{2}}}{2\cos x-x\sin x}=\frac{-3(1+0)^{\frac{-1}{2}}}{2\cos 0-0\sin 0}=\frac{-3}{2}$$

deci

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+3x-\sqrt{(1+2x)^3}}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{-3}{2}.$$

Exemplul 59 *Pentru a demonstra că*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}1$$

suntem în condiţiile teoremei lui l'Hôpital. Dacă o aplicăm obţinem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1.$$

Remarcăm că raţionamentul este greşit (este un "cerc vicios") deoarece pentru a demonstra că derivata lui $\sin$ *este* $\cos$ *se foloseşte această limită fundamentală* ($\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$).

Exemplul 60 *Pentru a calcula limita*

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{2x+\cos x}$$

nu putem aplica l'Hôpital deoarece nu există $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ *(vezi capitolele precedente). Limita se va rezolva astfel*

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{2x+\cos x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{2+\frac{\cos x}{x}}=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2},$$

deoarece avem

$$0\le\lim_{x\to +\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{|x|}=0\Rightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

Exemplul 61 *(Temă) Calculaţi*

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}.$$

Exemplul 62 *(Temă) Aplicaţi l'Hôpital pentru a demonstra*

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty,\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0,$$

6 Derivate de ordin superior. Formula lui Taylor

Definiţia 63 *Fie f o funcţie derivabilă într-o vecinătate a lui a astfel încât derivata f' să fie definită pe o vecinătate a lui a. Dacă f' este derivabilă în a atunci spunem că f este de două ori derivabilă în a. Vom nota cu*

$$f''(a) = (f')'(a)$$

derivata secundă a lui f în a.

Remarca 64 *Vom nota derivata secundă şi cu*

$$f^{(2)}(a) \text{ sau cu } \frac{d^2 f}{dx^2}(a).$$

Derivata de ordin trei va fi definită ca

$$f^{(3)}(a) = f'''(a) := (f'')'(a).$$

Definiţia 65 *În general, fie f o funcţie derivabilă de $(k-1)$ ori într-o vecinătate a lui a astfel încât derivata $f^{(k-1)}$ să fie definită pe o vecinătate a lui a. Dacă $f^{(k-1)}$ este derivabilă în a atunci spunem că f este de k ori derivabilă în a. Vom nota cu*

$$f^{(k)}(a) = \left(f^{(k-1)}\right)'(a)$$

derivata de ordin k a lui f în a.

Remarca 66 *Vom nota derivata de ordin k şi cu*

$$\frac{d^k f}{dx^k}(a).$$

Exemplul 67 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Atunci, pentru $k \le n$,*

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\ f^{(3)}(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}. \end{aligned}$$

Pentru $k \ge n+1$ obţinem că

$$f^{(k)}(x) = 0.$$

Exemplul 68 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Atunci*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \\ f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Exemplul 69 *(Temă) Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$. *Demonstraţi că*

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right).$$

Exemplul 70 *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$. *Atunci*

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Definiţia 71 *Fie* $f:I\to\mathbb{R}$ *derivabilă de* n *ori şi cu derivatele continue pe* I. *Presupunem că derivata de ordin* $(n+1)$ *există în fiecare punct din* I. *Polinomul*

$$T_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3++\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se numeşte ***polinomul Taylor de grad n****, ataşat funcţiei* f *în punctul* a.

Definiţia 72 (Formula lui Taylor) *Dacă* $f:I\to\mathbb{R}$ *este o funcţie de* $(n+1)$ *ori derivabilă pe* I *atunci pentru oricare două puncte* $x,a\in I$ *formula*

$$\begin{aligned} f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots \\ +\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \end{aligned}$$

se numeşte ***formula lui Taylor*** *de ordin* n *corespunzătoare funcţiei* f *în punctul* a. *Cantitatea* $R_n(x)$ *se numeşte* ***restul de ordin*** n *din formula Taylor şi are diverse forme de exprimare*

Teorema 73 *Restul de ordin* n *din formula lui Taylor este dat de următoarele formule:*

$$\begin{aligned} &(a)\quad R_n(x)=\frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\quad \text{(restul lui Cauchy)} \\ &(b)\quad R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\quad \text{(restul lui Lagrange),} \end{aligned}$$

unde ξ *este un punct între* a *şi* x.

7 Diferenţiale

Fie $f:I\to\mathbb{R}$ cu I interval şi $a\in I$.

Definiţia 74 *Spunem că* f *este diferenţiabilă în punctul* $a\in I$ *dacă există numărul finit* $A\in\mathbb{R}$ *şi funcţia* $\alpha:I\to\mathbb{R}$ *continuă în* a *astfel încât* $\alpha(a)=0$ *şi,* $\forall x\in I$,

$$f(x)=f(a)+A(x-a)+\alpha(x)(x-a).$$

Teorema 75 *Funcţia* f *este diferenţiabilă în* $a\in I$ *dacă şi numai dacă* f *este derivabilă în* a.

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Presupunem că f este diferenţiabilă în a. Pentru $x \neq a$, avem că

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \alpha(x)$$

deci, α fiind continuă în a, obţinem că

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (A + \alpha(x)) = A + \lim_{x \to a} \alpha(x) = A + \alpha(a) = A.$$

"$\Leftarrow$" Presupunem că f este derivabilă în a. Atunci

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

şi definim funcţia $\alpha : I \to \mathbb{R}$ astfel

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & \text{dacă } x \neq a \\ 0, & \text{dacă } x = a. \end{cases} \tag{1}$$

Deci

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0 =: \alpha(a),$$

adică funcţia α satisface coniţia de continuitate în a şi de anulare în a.

Conform definiţiei (1) a lui α avem egalitatea (valabilă $\forall x \neq a$ şi evidentă pentru $x = a$)

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \alpha(x)(x - a).$$

■

Remarca 76 *Funcţia f este deci diferenţiabilă în a dacă şi numai dacă*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a),$$

unde

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0.$$

Remarca 77 *Deoarece*

$$f(x) - f(a) = [f'(a) + \alpha(x)](x - a)$$

deducem că pentru valori ale lui x suficient de aproape de a,

$$f(x) - f(a) \simeq f'(a)(x - a)$$

(ţinem cont de continuitatea lui α şi de $\alpha(a) = 0$).

Notând $h : x - a$, obţinem aproximarea

$$f(a + h) - f(a) \simeq f'(a) \cdot h.$$

Definiţia 78 *Funcţia liniară $h \longmapsto f'(a) \cdot h$ definită pentru $\forall h \in \mathbb{R}$, se numeşte diferenţiala funcţiei f în punctul a şi se va nota cu*

$$df(a).$$

Deci

$$df(a)(h) := f'(a) \cdot h$$

Definiţia 79 *Pentru un punct oarecare $x \in I$,*

$$df\left(x\right)\left(h\right) = f'\left(x\right)\ h.$$

Pe de altă parte, luând $g\left(x\right) = x$ (identitatea) obţinem

$$dg\left(x\right)\left(h\right) = dx\left(h\right) = h$$

deci are loc

$$df\left(x\right)\left(h\right) = f'\left(x\right)\ dx\left(h\right).$$

Definiţia 80 (Formula de calcul a diferenţialei unei funcţii într-un punct) *Acum dacă nu îl mai scriem pe h, obţinem scrierea*

$$df\left(x\right) = f'\left(x\right)\ dx.$$

Definiţia 81 *În condiţiile în care există derivata secundă a lui f în a putem scrie dieferenţiala de ordinul doi notată*

$$d^2 f\left(a\right) := f'\left(a\right) dx^2.$$

În general

$$d^k f\left(a\right) := f^{(k)}\left(a\right) dx^k.$$

Exemplul 82 *Să calculăm diferenţiala*

$$\begin{aligned} d\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right) &= \left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)' dx = \frac{1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)' dx \\ &= \frac{1}{1+1+x^2}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x\ dx = \frac{1}{2+x^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx. \end{aligned}$$