Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie
şi Ingineria Mediului
Matematici Superioare, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC

CURS XI-XIII

Capitolul VI: Funcţii de mai multe variabile

1 Spaţiul $\mathbb{R}^n$

Definiţia 1 *Definim mulţimea* $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}}$. *Elementele sale se numesc puncte. Vom nota cu* $x \in \mathbb{R}^n$, *n-uplu* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *unde* $x_i \in \mathbb{R}$, *cu* $i = \overline{1,n}$, *se numesc coordonatele lui* x_i.

Remarca 2 *Mulţimea* $\mathbb{R}^n$ *este* ***spaţiu vectorial*** *în raport cu operaţia internă de adunare*

$$a + b = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)\,.$$

şi cu operaţia externă de înmulţire cu scalari

$$\lambda \cdot a = \lambda \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) := (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)\,.$$

Remarca 3 *Punctele* $a \in \mathbb{R}^n$ *se mai numesc* ***vectori;*** *pentru* $i = \overline{1,n}$, *valorile* a_i *se numesc* ***coordonatele vectorului*** a.

Remarca 4 ***Spaţiul vectorial*** $\mathbb{R}^n$ ***este de dimensiune*** n. *Într-adevăr, se poate arăta că următorii* n *vectori*

$$\begin{aligned}
&e_1 := (1, 0, 0, \ldots, 0, 0)\\
&e_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0, 0)\\
&\vdots\\
&e_{n-1} := (0, 0, 0, \ldots, 1, 0)\\
&e_n := (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)
\end{aligned}$$

formează o bază (numită şi ***baza canonică****) în spaţiul* $\mathbb{R}^n$. *Deci dacă* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *atunci, de fapt,*

$$\begin{aligned}
a &= (a_1, 0, 0, \ldots, 0, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0, 0) + \cdots + (0, 0, 0 \ldots, a_{n-1}, 0) + (0, 0, 0 \ldots, 0, a_n)\\
&= a_1 (1, 0, 0, \ldots, 0, 0) + a_2 (0, 1, 0, \ldots, 0, 0) + \cdots + a_{n-1} (0, 0, 0 \ldots, 1, 0) + a_n (0, 0, 0 \ldots, 0, 1)\\
&= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_{n-1} e_{n-1} + a_n e_n\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\,.
\end{aligned}$$

Remarca 5 *În spaţiul* $\mathbb{R}^3$ *vectorii bazei canonice se mai notează şi cu* $\vec{i} := (1, 0, 0)$, $\vec{j} := (0, 1, 0)$ *şi* $\vec{k} := (0, 0, 1)$.

În general punctele $a \in \mathbb{R}^n$ *se mai notează şi cu* $\vec{a}$.

Definiţia 6 *Fie vectorii* $a, b \in \mathbb{R}^n$. ***Produsul scalar*** *al vectorilor este definit de*

$$\langle a, b \rangle := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n \ .$$

Produsul scalar se mai notează şi cu (a, b) *sau cu* $a \cdot b$.

Exerciţiul 7 *Fie baza canonică* $\{e_1, e_2, e_r\}$ *din* $\mathbb{R}^3$. *Calculaţi produsele scalare*

$$\begin{gathered} \langle e_1, e_1 \rangle \, , \ \langle e_1, e_2 \rangle \, , \ \langle e_1, e_3 \rangle \, , \\ \langle e_2, e_1 \rangle \, , \ \langle e_2, e_2 \rangle \, , \ \langle e_2, e_3 \rangle \, , \\ \langle e_3, e_1 \rangle \, , \ \langle e_3, e_2 \rangle \, , \ \langle e_3, e_3 \rangle \, , \end{gathered}$$

Exerciţiul 8 *(mai general) Calculaţi produsul scalar* $\langle e_i, e_j \rangle$ *unde* $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ *este baza canonică din* $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 9 *Fie* $a \in \mathbb{R}^n$. ***Norma (euclidiană a) vectorului*** *a este numărul definit de*

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

adică

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2} \ .$$

Exerciţiul 10 *Calculaţi norma vectorilor bazei canonice din* $\mathbb{R}^3$. *Calculaţi norma vectorilor bazei canonice din* $\mathbb{R}^n$.

Exerciţiul 11 *Calculaţi norma vectorilor* $a = (1, 2, 3)$ *şi* $b = (2, 3, 1)$.

Definiţia 12 *Distanţa dintre două puncte* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *este numărul*

$$\mathrm{d}\,(a, b) := \|a - b\|$$

adică

$$\mathrm{d}\,(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_{n-1} - b_{n-1})^2 + (a_n - b_n)^2}$$

Exerciţiul 13 *Calculaţi distanţa dintre punctele* $a = (1, 0, 0)$ *şi* $b = (0, 1, 0)$.

Definiţia 14 *Se numeşte* ***bilă deschisă de centru*** $a \in \mathbb{R}^n$ ***şi rază*** $r > 0$, *mulţimea*

$$\mathrm{B}\,(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\} \, .$$

Definiţia 15 *Se numeşte* ***bilă închisă de centru*** $a \in \mathbb{R}^n$ ***şi rază*** $r > 0$, *mulţimea*

$$\bar{\mathrm{B}}\,(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \le r\} \, .$$

Exerciţiul 16 *Desenaţi* $\mathrm{B}\,(a, r)$ *şi* $\bar{\mathrm{B}}\,(a, r)$ *unde* $a \in \mathbb{R}$ *şi* $r = 1$; $a \in \mathbb{R}$ *şi* $r = 0.1$; $a \in \mathbb{R}^2$ *şi* $r = 1$; $a \in \mathbb{R}^3$ *şi* $r = 1$.

Definiţia 17 *Se numeşte vecinătate a punctului* $a \in \mathbb{R}^n$ *orice submulţime din* $\mathbb{R}^n$ *care conţine o bilă deschisă* $\mathrm{B}\,(a, r)$ *(adică* V *este o vecinătate a lui* a *dacă* $\exists r > 0$ *astfel încât* $\mathrm{B}\,(a, r) \subset V$*).*

Definiţia 18 *Spunem că* a *este* ***punct interior al mulţimii*** $A \subset \mathbb{R}^n$ *dacă există o vecintătate* $V \in \mathcal{V}\,(a)$ *a lui* a *astfel încât* $V \subset A$. *Mulţimea punctelor interioare se numeşte interiorul mulţimii* A *şi se notează cu* $\mathrm{Int}\,(A)$.

Definiţia 19 *Spunem că a este* ***punct aderent al mulţimii*** *$A \subset \mathbb{R}^n$ dacă oricare ar fi o vecintătate $V \in \mathcal{V}(a)$ a lui a are loc că $V \cap A \neq \emptyset$. Mulţimea punctelor aderente se numeşte aderenţa mulţimii A şi se notează cu $\bar{A}$.*

Definiţia 20 *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte* ***mulţime deschisă*** *dacă*

$$A = \operatorname{Int}(A) \ .$$

Definiţia 21 *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte* ***mulţime închisă*** *dacă*

$$A = \bar{A} \ .$$

Definiţia 22 ***Frontiera mulţimii*** *A este mulţimea*

$$\operatorname{Bd}(A) := \bar{A} \setminus A.$$

Definiţia 23 *Spunem că a este* ***punct de acumulare al mulţimii*** *$A \subset \mathbb{R}^n$ dacă oricare ar fi o vecintătate $V \in \mathcal{V}(a)$ a lui a, aceasta conţine cel puţin un punct $x \neq a$ din A (adică $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, are loc că $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$).*

Definiţia 24 *Spunem că a este* ***punct izolat al mulţimii*** *$A \subset \mathbb{R}^n$ dacă $a \in A$ şi a nu este punct de acumulare.*

Definiţia 25 *Spunem că mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este mărginită dacă există o bilă cu centrul în 0 şi de rază $r > 0$ care să fie inclusă în mulţimea A (adică dacă $\exists r > 0$ astfel încât $\mathrm{B}(a, r) \subset A$).*

2 Şiruri de puncte din $\mathbb{R}^n$

Definiţia 26 *Se numeşte şir de puncte din $\mathbb{R}^n$ o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Vom nota şirul cu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (adică $a_k := f(k)$, $\forall k \in \mathbb{R}^n$).*

Remarca 27 *Şirul $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este de forma*

$$a_k = \left(a_k^1, a_k^2, a_k^3, \ldots, a_k^{n-1}, a_k^n\right), \ k \in \mathbb{N}$$

unde componentele (sau coordonatele) sunt şirurile 1-dimensionale $\left(a_k^i\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, cu $i = \overline{1, n}$.

Definiţia 28 *Punctul $a \in \mathbb{R}^n$ este limita unui şir $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^n$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există rangul (pragul) $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $k > N(\varepsilon)$ să avem că*

$$\|a_k - a\| < \varepsilon.$$

Definiţia 29 *(sau echivalent) Punctul $a \in \mathbb{R}^n$ este limita unui şir $(a_k)_{p\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^n$ dacă în afara oricărei vecinătăţi a lui a se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului.*

Remarca 30 *Problema (existenţei) limitei unui şir multidimensional se reduce la problema (existenţei) limitei şirurilor 1-dimensionale componente.*

Exemplul 31 *Studiaţi limita şirului definit de $a_k = \left(\sqrt{k^2 - 3k + 1} - k, k \sin \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}^2$.*

3 Limite de funcţii şi continuitate

Definiţia 32 *O funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se numeşte* ***funcţie vectorială de variabilă vectorială*** *(sau de n variabile reale). Pentru $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, vom nota cu $f(x) \in \mathbb{R}^m$ valorile funcţiei; de asemenea, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$. Funcţiile $f_i(x)$ se numesc componente reale ale funcţiei vectoriale f.*

Definiţia 33 *În cazul în care $m = 1$ funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numeşte* ***funcţie reală de variabilă vectorială****.*

Definiţia 34 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi a un punct de acumulare pentru A.*
1. Spunem că $\ell \in \mathbb{R}^m$ este limita funcţiei f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $U \in \mathcal{V}(\ell)$ a lui ℓ, există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ a lui a astfel încât oricare ar fi $x \in A \cap V$ cu $x \neq a$ să avem $f(x) \in U$. Vom scrie

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x).$$

2. Are loc că $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât $x_k \to a$, $x_k \neq a$ şi $x_k \in A$ să avem $f(x_k) \to \ell$.
3. Are loc că $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \neq a$ astfel încât $x \in A$ şi $\|x - a\| < \delta$ să avem $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$.

Remarca 35 *Fie şirul notat $x_k = \left(x_k^1, x_k^2, x_k^3, \ldots, x_k^{n-1}, x_k^n\right)$, $k \in \mathbb{N}$ şi punctul $a = \left(a^1, a^2, a^3, \ldots, a^{n-1}, a^n\right)$. Atunci $x_k \to a$, $k \to \infty$ este echivalent cu*

$$x_k^1 \to a^1\,, \quad x_k^2 \to a^2\,, \quad \ldots, x_k^n \to a^n, \quad \text{pentru } k \to \infty.$$

De aceea în cazul $n = 2$, de exemplu, se poate scrie

$$\lim_{\substack{x^1 \to a \\ x^2 \to a}} f\left(x^1, x^2\right) = \ell.$$

Toate proprietăţile limitelor de funcţii reale (care nu conţin relaţia de ordine) se păstrează şi pentru funcţii vectoriale.

Teorema 36 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi a un punct de acumulare pentru A şi $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m,) \in \mathbb{R}^m$. Să notăm componentele vectorului f cu $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, deci*

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)).$$

Atunci $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ dacă şi numai dacă $\ell_i = \lim_{x\to a} f(x_i)$, cu $i = \overline{1, m}$.

Definiţia 37 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi a un punct de acumulare pentru D.*
1. Spunem că f este continuă punctul a dacă pentru orice vecinătate $U \in \mathcal{V}(f(a))$ a lui ℓ, există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ a lui a astfel încât oricare ar fi $x \in D \cap V$ cu $x \neq a$ să avem $f(x) \in U$. Vom scrie

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x).$$

2. Are loc că $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$ dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât $x_k \to a$, $x_k \neq a$ şi $x_k \in D$ să avem $f(x_k) \to f(a)$.
3. Are loc că $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$ dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \neq a$ astfel încât $x \in D$ şi $\|x - a\| < \delta$ să avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Teorema 38 *Fie funcţia vectorială $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi a un punct de acumulare pentru D. Funcţia f este continuă în $x = a$ dacă şi numai dacă fiecare din componentele sale reale $f_1, f_2, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$ este continuă în a.*

4 Derivate parţiale de ordinul 1 şi 2

Vom prezenta în continuare definiţii şi rezultate legate de noţiunea de derivată parţială a unei funcţii în raport cu o variabilă. Prezentăm mai întâi cazul $n = 2$.

Definiţia 39 *Spunem că funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este derivabilă parţial în punctul (a, b) în raport cu variabila x dacă există şi este finită limita*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

Valoarea limitei se numeşte derivata parţială în raport cu x a funcţiei $f(x, y)$ în punctul (a, b) şi se va nota cu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{sau} \quad f'_x(a, b).$$

Analog se va defini derivata parţială în raport cu variabila y.

Deci pentru a calcula derivata parţială $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a, b)$ a unei funcţii, în raport cu prima variabilă x, derivăm funcţia ca şi cum variabilă ar fi doar x (privim variabila y ca o constantă).

Exemplul 40 *Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right), \ y \neq 0 \\ 0, \ y = 0 \end{cases}$$

Derivatele parţiale ale funcţiei f într-un punct arbitrar $(x, y) \neq (a, 0)$ sunt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2\left(\ln\left(1 + \tfrac{x^2}{y^2}\right)\right)'_x = y^2 \tfrac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(1 + \tfrac{x^2}{y^2}\right)'_x = \tfrac{y^2}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(0 + \left(\tfrac{x^2}{y^2}\right)'_x\right) =$$
$$= \tfrac{y^4}{x^2+y^2} \cdot 2x \cdot \tfrac{1}{y^2} = \tfrac{2xy^2}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(y^2 \ln\left(1 + \tfrac{x^2}{y^2}\right)\right)'_y = \left(y^2\right)'_y \ln\left(1 + \tfrac{x^2}{y^2}\right) + y^2\left(\ln\left(1 + \tfrac{x^2}{y^2}\right)\right)'_y =$$
$$= 2y \ln\left(1 + \tfrac{x^2}{y^2}\right) + y^2 \tfrac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(1 + \tfrac{x^2}{y^2}\right)'_y = 2y \ln\left(1 + \tfrac{x^2}{y^2}\right) + \tfrac{y^4}{x^2+y^2}\left(0 + \left(\tfrac{x^2}{y^2}\right)'_y\right) =$$
$$= 2y \ln\left(1 + \tfrac{x^2}{y^2}\right) + \tfrac{y^4}{x^2+y^2} \cdot x^2 \cdot \left(y^{-2}\right)'_y = 2y \ln\left(1 + \tfrac{x^2}{y^2}\right) + \tfrac{y^4}{x^2+y^2} \cdot x^2 \cdot \left(-2y^{-3}\right) =$$
$$= 2y \ln\left(1 + \tfrac{x^2}{y^2}\right) - \tfrac{2x^2 y}{x^2+y^2}$$

Definiţia 41 *Spunem că funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este derivabilă parţial în punctul $(a_1, a_2, ..., a_n) \in$* Int (D)*, în raport cu variabila x_i (unde $i = \overline{1, n}$) dacă există şi este finită limita*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)}{x - a}$$

Valoarea limitei se numeşte derivata parţială în raport cu variabila x_i a funcţiei $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ în punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$ şi se va nota cu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, ..., a_n) \quad \text{sau} \quad f'_{x_i}(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Definiţia 42 *Fie* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *cu* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. *Spunem că* f *este derivabilă parţial în raport cu* x_i *(unde* $i = \overline{1,n}$*) în punctul* $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \operatorname{Int}(D)$, *dacă toate componentele* $f_j : D \to \mathbb{R}$, *cu* $j = \overline{1,m}$ *sunt derivabile parţial în raport cu variabila* x_i. *Deci*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)(a_1, a_2, ..., a_n)$$

Următoarea observaţie ne va regula practică de calcul pentru derivata parţială în raport cu o variabilă.

Pentru a calcula derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, ..., a_n)$ **a unei funcţii, în raport cu variabil** x_i**, derivăm funcţia ca şi cum variabilă ar fi doar** x_i **(celelate variabile** $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$**, le vom considera drept constante).**

Exemplul 43 *Fie* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^4y^3 + yz^5 - x^2z$. *Derivatele parţiale ale funcţiei* f *într-un punct arbitrar* (x, y, z) *sunt*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 4x^3 \cdot y^3 + 0 - 2x \cdot z = 4x^3y^3 - 2xz, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= x^4 \cdot 3y^2 + 1 \cdot z^5 - 0 = 3x^4y^2 + z^5, \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 0 + y \cdot 5z^4 - x^2 \cdot 1 = 5yz^4 - x^2
\end{aligned}$$

Definiţia 44 *Dacă funcţia* $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *este derivabilă parţial în raport cu* x_j *în punctul* $a \in D$, *atunci această derivată se numeşte* ***derivata parţială de ordinul al doilea în raport cu*** x_i ***şi*** x_j *în punctul* a, *şi o vom nota cu*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$$

În cazul $i = j$ vom nota derivata de ordinul al doilea prin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a) \overset{not}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$$

De asemenea vom nota derivata parţială şi prin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \overset{not}{=} f''_{x_i x_j}$$

Derivata parţială $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ cu $i \neq j$ se va numi **derivata parţială mixtă** de ordinul al doilea.

Analog se vor defini / nota derivatele parţiale de ordin superior $3, 4, ...$

Exemplul 45 *Fie* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dată de* $f(x, y) = \cos(x + 2y + 3z)$. *Calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (\cos(x + 2y + 3z))'_x &= -\sin(x + 2y + 3z) \cdot (x + 2y + 3z)'_x \\
&= -\sin(x + 2y + 3z) \cdot (1 + 0 + 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (\cos(x + 2y + 3z))'_y &= -\sin(x + 2y + 3z) \cdot (x + 2y + 3z)'_y \\
&= -\sin(x + 2y + 3z) \cdot (0 + 2 + 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (\cos(x + 2y + 3z))'_z &= -\sin(x + 2y + 3z) \cdot (x + 2y + 3z)'_z \\
&= -\sin(x + 2y + 3z) \cdot (0 + 0 + 3)
\end{aligned}$$

derivatele parţiale de ordinul al doilea

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &\overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \left(-\sin(x+2y+3z)\right)'_x = \\
&= -\cos(x+2y+3z)\,(x+2y+3z)'_x = -\cos(x+2y+3z)\cdot 1, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &\overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \left(-2\sin(x+2y+3z)\right)'_x = \\
&= -2\cos(x+2y+3z)\,(x+2y+3z)'_y = -2\cos(x+2y+3z)\cdot 2, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &\overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y) = \left(-3\sin(x+2y+3z)\right)'_z = \\
&= -3\cos(x+2y+3z)\,(x+2y+3z)'_z = -3\cos(x+2y+3z)\cdot 3,
\end{aligned}$$

şi derivatele parţiale mixte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) &\overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \left(-2\sin(x+2y+3z)\right)'_x = -2\cos(x+2y+3z)\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) &\overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y) = \left(-3\sin(x+2y+3z)\right)'_x = -3\cos(x+2y+3z)\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) &\overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y) = \left(-3\sin(x+2y+3z)\right)'_y = -6\cos(x+2y+3z)\,.
\end{aligned}$$

Putem calcula şi derivate parţiale într-un punct particular. De exemplu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(\pi/4,-\pi/8,3\pi/4) &= -3\sin(\pi/4+2(-\pi/8)+9\pi/4) = -3\sin(9\pi/4) = \\
&= -3\sin(2\pi+\pi/4) = -3\sin(\pi/4) = -3\sqrt{2}/2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y) &= -6\cos(x+2y+3z)\,.
\end{aligned}$$

Teorema următoare prezintă condiţiile suficiente care asigură egalitatea derivatelor parţiale mixte de ordinul al doilea într-un punct.

Teorema 46 (Schwarz) *Dacă funcţia* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *admite derivatele parţiale mixte* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *şi* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i \neq j \in \{1,2,...,n\}$, *finite pe o vecinătate* $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$ *a punctului* a *şi acestea sunt continue în* a, *atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

5 Diferenţiale de ordinul 1 şi 2

Aşa cum am văzut în cazul 1-dimensional, fie $D \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă în punctul $a \in D$. Conform definiţiei derivatei avem

$$f'(a) \overset{def}{=} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \overline{\mathbb{R}} \tag{1}$$

Dacă notăm cu $\alpha(x) \overset{def}{=} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$, $\forall x \in D \setminus \{a\}$, atunci din (1) avem că

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$$

şi că
$$f(x)-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)+\alpha(x)\cdot(x-a)\,,\ \forall x\in D$$
(am luat prin definiţie $\alpha(a)\overset{def}{=}0$).

Din ultima egalitate se vede că dacă x se apropie de a, atunci diferenţa $f(x)-f(a)$ se poate aproxima prin $f'(a)\cdot(x-a)$
$$f(x)-f(a)\simeq f'(a)\cdot(x-a)\,,$$
sau echivalent, notând $h=x-a$, pentru valori ale lui h suficient de mici, diferenţa $f(a+h)-f(a)$ se poate aproxima prin $f'(a)\cdot h$
$$f(a+h)-f(a)\simeq f'(a)\cdot h.$$
Aceasta arată că într-o vecinătate a unui punct de derivabilitate a unei funcţii, aceasta are o comportare liniară. Această observaţie conduce la introducerea noţiunii de diferenţiabilitate.

În general, fie domeniul $D\subset\mathbb{R}^n$.

Definiţia 47 *O funcţie $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ se numeşte **diferenţiabilă în punctul** $a\in\operatorname{Int}(D)$ dacă există o aplicaţie liniară $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ astfel încât*
$$\lim_{\substack{x\to a\\x\neq a}}\frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|}=0. \tag{2}$$

Aplicaţia T se numeşte **diferenţiala** funcţiei f în punctul a şi se notează cu $df(a)$.

Spunem că f este **diferenţiabilă pe** o mulţime deschisă dacă este diferenţiabilă în fiecare punct al acestei mulţimi deschise.

Remarca 48 *Dacă notăm $h\overset{def}{=}x-a$, atunci (2) devine*
$$\lim_{\substack{x\to a\\x\neq a}}\frac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{\|h\|}=0. \tag{3}$$

Definim aplicaţia $\alpha:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ prin
$$\alpha(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|}, & x\in D\setminus\{a\}\,,\\ 0, & x=a.\end{cases}$$
Deci, dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul a, atunci funcţia α este continuă în punctul a deoarece
$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{\substack{x\to a\\x\neq a}}\frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|}=0=\alpha(a)$$
Deci Definiţia de mai sus este echivalentă cu

Definiţia 49 *O funcţie $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ se numeşte **diferenţiabilă în punctul** $a\in\operatorname{Int}(D)$ dacă există o aplicaţie liniară $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ şi aplicaţia $\alpha:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, continuă în a, astfel încât*
$$f(x)=f(a)+T(x-a)+\alpha(x)\cdot\|x-a\|\,,\ \forall x\in D$$

Exerciţiul 50 *Fie $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)\overset{def}{=}c$, $\forall x\in D$. Diferenţiala funcţiei f în punctul $a\in\operatorname{Int}(D)$ este în acest caz $df(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $df(a)(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$.*

Remarca 51 *Dacă funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în punctul $a \in \operatorname{Int}(D)$, atunci diferenţiala ei, $df(a)$, este unică.*

Teorema 52 *Fie $D \subset \mathbb{R}$ un interval şi $a \in \operatorname{Int}(D)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*

(i) *Funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în punctul a*

(ii) *Funcţia f este derivabilă în a.*

În cazul 1-dimensional diferenţiala unei funcţiei este dată de

$$\boxed{df(a)(h) = f'(a) \cdot h, \ \forall h \in \mathbb{R}}$$

Remarca 53 *În timp ce derivata funcţiei f într-un punct a este un număr, diferenţiala lui f în a este o aplicaţie liniară.*

Teorema 54 *Următoarele afirmaţii sunt echivalente*

(i) *Funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în punctul $a \in \operatorname{Int}(D)$.*

(ii) *Funcţiile componente $f_j : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall\, j = \overline{1,m}$ sunt diferenţiabile în punctul $a \in \operatorname{Int}(D)$ şi are loc*

$$df(a) = (df_1(a), df_2(a), ..., df_m(a))$$

(fără demonstraţie)

Teorema 55 *Fie funcţiile $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenţiabile în punctul $a \in \operatorname{Int}(D)$. Atunci $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în punctul $a \in \operatorname{Int}(D)$ şi are loc*

$$d(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(a) = \alpha \cdot df(a) + \beta \cdot dg(a)$$

Teorema 56 *Fie funcţiile $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenţiabile în punctul $a \in \operatorname{Int}(D)$. Atunci $f \cdot g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în punctul $a \in \operatorname{Int}(D)$ şi are loc*

$$d(f \cdot g)(a) = df(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot dg(a)$$

Teorema 57 *Fie funcţiile $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenţiabile în punctul $a \in \operatorname{Int}(D)$. Presupunem că există V, vecinătate a punctului a, astfel încât $V \subset D$ şi $f(x) \neq 0$, $\forall x \in V$. Atunci $\dfrac{g}{f} : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în punctul $a \in \operatorname{Int}(D)$ şi are loc*

$$d\left(\frac{g}{f}\right)(a) = \frac{dg(a) \cdot f(a) - g(a) \cdot df(a)}{f^2(a)}$$

Vom da în continuare câteva cazuri particulare de calcul a diferenţialei unei funcţii.
Dacă $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$, atunci

$$\boxed{df(a) = \frac{df}{dx}(a) \cdot dx}$$

Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$, atunci

$$\boxed{df(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot dy}$$

Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$, atunci

$$\boxed{df(a,b,c) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \cdot dz}$$

Definiţia 58 *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$ şi presupunem că există derivatele parţiale de ordinul întâi şi al doilea şi că ele sunt continue. Forma pătratică*

$$d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

definită de

$$d^2 f(a)(h) \overset{def}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot dx_i(h) \cdot dx_j(h),$$

unde $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$, se numeşte ***diferenţiala de ordinul al doilea*** *a funcţiei f în punctul a.*

Definiţia 59 *Matricea acestei forme pătratice se numeşte* ***matricea hessiană*** *lui f în a şi este dată de*

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^n}(a) \end{bmatrix}$$

Observăm că în condiţiile Teoremei lui Schwarz matricea hessiană este o matrice simetrică (deoarece elementele $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = a_{ji}$).

Remarca 60 *Diferenţiala de ordinul al doilea se poate scrie formal:*

$$d^2 f(a) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot dx_i \right)^2 (f(a)) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot dx_i \cdot dx_j,$$

Exemplul 61 *Diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, în punctul a, este dată de*

$$\boxed{d^2 f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot dy^2}$$

Diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, în punctul a, este dată de

$$\boxed{\begin{aligned} d^2 f(a) = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) \cdot dz^2 + \\ & +2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot dxdy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) \cdot dxdz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) \cdot dydz \end{aligned}}$$

Exerciţiul 62 *Să se scrie diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xe^{xy}$ în punctul $(2,3)$. Calculăm mai întâi derivatele parţiale de ordinul întâi*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (xe^{xy})'_x = 1 \cdot e^{xy} + x(e^{xy})'_x = e^{xy} + xe^{xy}(xy)'_x = e^{xy} + xe^{xy} \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (xe^{xy})'_y = x \cdot (e^{xy})'_y = xe^{xy}(xy)'_y = xe^{xy} \cdot x$$

Deci diferenţiala de ordinul 1 este

$$df(x,y) = (e^{xy} + xye^{xy})\, dx + x^2 e^{xy} dy$$

Derivatele parţiale de ordinul al doilea sunt date de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \left(e^{xy} + xye^{xy}\right)'_x = \left(e^{xy}\right)'_x + \left(xye^{xy}\right)'_x =$$
$$= e^{xy}\,(xy)'_x + y\left(xe^{xy}\right)'_x = e^{xy}\cdot y + y\left(e^{xy} + xye^{xy}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \left(x^2e^{xy}\right)'_y = x^2\left(e^{xy}\right)'_y = x^2e^{xy}\,(xy)'_y = x^2e^{xy}\cdot x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \left(x^2e^{xy}\right)'_x = \left(x^2\right)'_x\cdot e^{xy} + x^2\cdot\left(e^{xy}\right)'_x = 2x\cdot e^{xy} + x^2\cdot e^{xy}\cdot y$$

Deci diferenţiala de ordinul al doilea într-un punct arbitrar (x,y) este dată de

$$d^2f(x,y) = y(2+xy)\,e^{xy}\cdot dx^2 + 2x(2+xy)\,e^{xy}\cdot dxdy + x^3e^{xy}\cdot dy^2$$

şi diferenţiala de ordinul al doilea în punctul $(2,3)$ este dată de

$$d^2f(2,3) = 3(2+6)\,e^6dx^2 + 4(2+6)\,e^6dxdy + 8e^6dy^2$$

Definiţia 63 *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie scalară de clasă C^1. **Gradientul lui f în punctul** a este vectorul*

$$\operatorname{grad} f(a) \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(a)\cdot\vec{k}$$

Exemplul 64 *Fie $f(x,y,z) = x^2yz + xyz^3$ un câmp scalar şi $a = (1,-1,2)$. Atunci*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \left(x^2yz + xyz^3\right)'_x = \left(x^2yz\right)'_x + \left(xyz^3\right)'_x = yz\left(x^2\right)'_x + yz^3\,(x)'_x = 2xyz + yz^3\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \left(x^2yz + xyz^3\right)'_y = \left(x^2yz\right)'_y + \left(xyz^3\right)'_y = x^2z\,(y)'_y + xz^3\,(y)'_y = x^2z + xz^3\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \left(x^2yz + xyz^3\right)'_z = \left(x^2yz\right)'_z + \left(xyz^3\right)'_z = x^2y\,(z)'_z + xy\left(z^3\right)'_z = x^2y + 3xyz^2
\end{aligned}$$

şi respectiv

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(2xyz + yz^3\right)\cdot\vec{i} + \left(x^2z + xz^3\right)\cdot\vec{j} + \left(x^2y + 3xyz^2\right)\cdot\vec{k}$$

În particular

$$\operatorname{grad} f(1,-1,2) = (-4-8)\cdot\vec{i} + (2+8)\cdot\vec{j} + (-1-12)\cdot\vec{k} = -12\vec{i} + 10\vec{j} - 13\vec{k}$$

6 Extreme pentru funcţii de două variabile

Definiţia 65 *Un punct $a \in \operatorname{Int}(D)$ se numeşte **punct critic** (sau **punct staţionar**) al funcţiei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferenţiabilă în punctul a, dacă*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad \forall i = \overline{1,n},$$

sau echivalent

$$df(a) = 0,$$

sau echivalent (vezi definiţia gradientului)

$$\nabla f(a) = 0.$$

Definiţia 66 *1. Un punct $a \in \operatorname{Int}(D)$ se numeşte* ***punct de minim local*** *al funcţiei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dacă există $V \in \mathcal{V}(a)$ (vecinătate a lui a), astfel încât*

$$f(x) \geq f(a), \quad x \in V \cap D.$$

2. Un punct $a \in \operatorname{Int}(D)$ se numeşte ***punct de maxim local*** *al funcţiei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dacă există $V \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât*

$$f(x) \leq f(a), \quad x \in V \cap D.$$

Punctele de minim şi maxim local se numesc ***puncte de extrem local****.*

Teorema 67 *Dacă punctul $a \in \operatorname{Int}(D)$ este* ***punct de extrem local*** *al funcţiei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi f este diferenţiabilă în punctul a, atunci a este punct critic (sau punct staţionar) al lui f.*

Demonstraţie. Deoarece a aparţine interiorului lui D avem că există (bila de centru a şi rază r) $\mathcal{B}(a,r) \subset D$ astfel încât $f(x) - f(a)$ păstrează semn constant pentru $\forall x \in \mathcal{B}(a,r)$. Definim aplicaţia

$$h : (-r,r) \to \mathbb{R}^n,\ h(t) \overset{def}{=} a + tv,\ t \in (-r,r)$$

unde v este un versor arbitrar (adică norma vectorului $v \in \mathbb{R}^n$ este unitară, $\|v\| = 1$). Avem că

$$\{a + tv : t \in (-r,r),\ v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| = 1\} \subset \mathcal{B}(a,r)\ ,$$

deci are loc $f(a+tv) - f(a)$ păstrează semn constant pentru $\forall t \in (-r,r)$. Dacă notăm cu

$$\varphi : (-r,r) \to \mathbb{R},\ \varphi(t) \overset{def}{=} f(h(t)) = f(a+tv)$$

atunci obţinem că $f(a+tv) - f(a) = \varphi(t) - \varphi(0)$ păstrează semn constant pentru $\forall t \in (-r,r)$, deci $t = 0$ este punct de extrem local pentru φ. Aplicând Teorema lui Fermat pentru funcţii de o variabilă obţinem că

$$\varphi'(0) = 0,$$

adică, conform definiţiei derivatei,

$$\varphi'(0) \overset{def}{=} \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = 0$$

Folosind definiţia lui φ obţinem

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = 0$$

Luând acum $v = e_i$, $i = \overline{1,n}$ (vectorii bazei canonice uzuale a lui $\mathbb{R}^n$), obţinem din relaţia de mai sus că derivatele parţiale în raport cu variabila x_i,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0,\ i = \overline{1,n}$$

Deci

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i = 0,$$

adică a este punct staţionar. ■

Remarca 68 *Teorema lui Fermat afirmă că* ***punctele de extrem local ale unei funcţii ce admite derivate parţiale (sau care este diferenţiabilă) se găsesc printre punctele sale critice****. Deci condiţia ca diferenţiala să se anuleze este într-un punct este necesară dar nu este şi suficientă pentru ca punctul să fie de extrem local.*

În acest sens să analizăm următorul

Exemplul 69 *Fie* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=xy$. *Pentru a determina punctele critice rezolvăm sistemul*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=0 \end{cases}$$

adică obţinem punctul staţionar $a=(0,0)$. *Pe de altă parte observăm că funcţia* $f(x,y)=xy$ *nu păstrează semn constant în nici o vecinătate a lui* $a=(0,0)$ *deci* a *nu este punct de extrem.*

În acelaşi sens considerăm şi

Exemplul 70 *Fie* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2-y^2$. *Pentru a determina punctele critice rezolvăm sistemul*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=0, \\ 2y=0 \end{cases}$$

adică obţinem punctul staţionar $a=(0,0)$. *Pe de altă parte observăm că funcţia* $f(x,y)=x^2-y^2$ *nu păstrează semn constant în nici o vecinătate a lui* $a=(0,0)$ *deci* a *nu este punct de extrem.*

Definiţia 71 *Un punct critic care nu este de extrem se numeşte* ***punct şa***.

Aplicând formula lui Taylor pentru funcţii de două variabile se poate demonstra următorul rezultat:

Teorema 72 *Fie* $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *de clasă* C^2 *(vezi Definiţia 2, Curs III) pe deschisul* $\operatorname{Int}(D)$, *şi* $a\in\operatorname{Int}(D)$ *un punct critic al lui* f. *Atunci,*

1) dacă forma pătratică $d^2f(a)$ *este pozitiv definită atunci* a *este punct de minim local;*

2) dacă forma pătratică $d^2f(a)$ *este negativ definită (adică forma pătratică* $-d^2f(a)$ *este pozitiv definită) atunci* a *este punct de maxim local;*

3) dacă forma pătratică $d^2f(a)$ *este nedefinită (adică* $d^2f(a)$ *nu păstrează semn constant) atunci* a *nu este punct de extrem (este punct şa).*

O consecinţă practică, în cazul $n=2$, a teoremei anterioare este următoarea

Teorema 73 *Fie* $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *de clasă* C^2 *pe deschisul* $\operatorname{Int}(D)$, *şi* $a\in\operatorname{Int}(D)$ *un punct critic al lui* f. *Să notăm prin*

$$\boxed{A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\,,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)\,,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\,.}$$

Atunci,

1) dacă $B^2-AC<0$ *şi* $A>0$, *punctul* a *este punct de minim local (forma pătratică* $d^2f(a)$ *este pozitiv definită);*

2) dacă $B^2-AC<0$ *şi* $A<0$, *punctul* a *este punct de maxim local (forma pătratică* $d^2f(a)$ *este negativ definită);*

3) dacă $B^2-AC>0$, *punctul* a *nu este punct de extrem local (forma pătratică* $d^2f(a)$ *este nedefinită).*

Demonstraţie. Fie $a=(a_1,a_2)$ şi (x,y) un punct din D. Aplicând definiţia diferenţialei de ordinul al doilea obţinem

$$\begin{aligned}
d^2 f(a)(h) &\overset{def}{=} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot h_i \cdot h_j = \text{(scris dezvoltat)} = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\cdot h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\cdot h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)\cdot h_2 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\cdot h_2^2 = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\cdot h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\cdot h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\cdot h_2^2
\end{aligned}$$

unde $h=(h_1,h_2)$. Deci putem calcula diferenţiala de ordinul al doilea în punctul $a=(a_1,a_2)$, calculată într-un punct $h=(x-a_1,y-a_2)$

$$\begin{aligned}
&d^2 f(a_1,a_2)(x-a_1,y-a_2) = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2)\cdot (x-a_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,a_2)\cdot (x-a_1)(y-a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2)\cdot (y-a_2)^2 \\
&= A\cdot (x-a_1)^2 + 2B\cdot (x-a_1)(y-a_2) + C\cdot (y-a_2)^2
\end{aligned}$$

şi, pentru $y \neq a_2$,

$$d^2 f(a_1,a_2)(x-a_1,y-a_2) = \frac{1}{(y-a_2)^2}\left[A\left(\frac{x-a_1}{y-a_2}\right)^2 + 2B\,\frac{x-a_1}{y-a_2} + C\right],$$

adică, notând cu $u=\dfrac{x-a_1}{y-a_2}$, obţinem că semnul formei pătratice $d^2 f(a_1,a_2)(x-a_1,y-a_2)$ este dat de semnul formei pătratice $A\,u^2+2B\,u+C$. Astfel un trinom de gradul al doilea are semn constant dacă şi numai dacă nu are rădăcini reale (ci doar complexe), echivalent $\Delta = 4\left(B^2-AC\right)<0$.

Deci dacă $B^2-AC<0$ şi $A>0$ atunci forma pătratică $A\,u^2+2B\,u+C$ este pozitiv definită, deci $d^2 f(a_1,a_2)$ este formă pătratică pozitiv definită, deci, conform Teoremei de mai sus, a este punct de minim local.

Dacă $B^2-AC<0$ şi $A<0$ atunci forma pătratică $A\,u^2+2B\,u+C$ este negativ definită, deci $d^2 f(a_1,a_2)$ este formă pătratică negativ definită, deci, conform Teoremei de mai sus, a este punct de maxim local.

Dacă $B^2-AC>0$ atunci forma pătratică $A\,u^2+2B\,u+C$ nu păstrează semn constant şi deci este negativ definită, deci $d^2 f(a_1,a_2)$ este formă pătratică nedefinită, deci, conform Teoremei de mai sus, a nu este punct de maxim local (este punct şa). ■

Exemplul 74 *Să se determine puntele de extrem ale funcţiei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită de*

$$f(x,y)=x^4+y^4+2x^2y^2-8x+8y$$

Determinăm mai întâi punctele critice (deoarece punctele de extrem se găsesc printre puntele critice). Pentru a determina punctele critice rezolvăm sistemul (vezi Definiţia 1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$$

Obţinem

$$\begin{cases} \left(x^4+y^4+2x^2y^2-8x+8y\right)_x'=0, \\ \left(x^4+y^4+2x^2y^2-8x+8y\right)_y'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3+0+4xy^2-8+0=0, \\ 0+4y^3+4x^2y-0+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2+y^2\right)=2, \\ y\left(x^2+y^2\right)=-2 \end{cases}$$

Deci $\left(x^2+y^2\right)\neq 0$ *şi*

$$\left(x^2+y^2\right)=\frac{2}{x}=\frac{2}{-y}\Rightarrow x=-y$$

adică sistemul devine

$$x\left(x^2+x^2\right)=2\Leftrightarrow 2x^3=2\Leftrightarrow x^3=1\Leftrightarrow x=1$$

Deci singurul punct staţionar este $P\left(1,-1\right)$*. Studiem în continuare dacă acest punct critic este punt de extrem sau este punct şa. Pentru aceasta calculăm mai întâi*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(12x^2+4y^2\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=8xy,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2+4x^2$$

şi apoi

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(1,-1\right)=16,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(1,-1\right)=-8,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(1,-1\right)=16.$$

Obţinem

$$B^2-AC=64-16^2<0,\quad A>0$$

adică punctul staţionar $P\left(1,-1\right)$ *este punct de minim.*

Exemplul 75 *Să se determine punctele de extrem ale funcţiei*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\, f\left(x\right)=x^4+y^4-x^2-y^2.$$

Punctele critice (staţionare) sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=0\end{cases}$$

deci

$$\begin{cases}4x^3+0-2x-0=0\\ 0+4y^3-0-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\left(2x^2-1\right)=0\\ 2y\left(2y^2-1\right)=0\end{cases}$$

Deci punctele staţionare sunt $P_1\left(0,0\right)$, $P_2(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_3(0,\frac{-1}{\sqrt{2}})$, $P_4(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $P_5(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $P_6(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_7(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_8(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})$, $P_9(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})$*. Acum vom verifica fiecare punct în parte dacă este de extrem sau nu. Vom face calculul doar pentru câteva puncte. Să calculăm mai întâi derivatele parţiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(4x^3-2x\right)'_x=12x^2-2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(4y^3-2y\right)'_y=12y^2-2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(4x^3-2x\right)'_y=0$$

Pentru punctul $P_1\left(0,0\right)$ *avem deci* $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0,0\right)=-2$, $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(0,0\right)=0$, $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(0,0\right)=-2$ *deci* $B^2-AC=0-4=-4<0$ *şi* $A<0$ *deci* $P_1\left(0,0\right)$ *este punct de maxim local.*

Pentru punctul $P_3(0,\frac{-1}{\sqrt{2}})$ *avem* $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\frac{-1}{\sqrt{2}})=0-2=-2$, $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,\frac{-1}{\sqrt{2}})=0$, $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\frac{-1}{\sqrt{2}})=12\dfrac{1}{2}-2=4$ *deci* $B^2-AC=0-(-8)=8>0$ *deci* $P_3(0,\frac{-1}{\sqrt{2}})$ *nu este punct de extrem.*

Pentru punctul $P_9(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})$ *avem* $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=12\dfrac{1}{2}-2=4$, $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=0$, $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=12\dfrac{1}{2}-2=4$ *deci* $B^2-AC=0-16=-16<0$ *şi* $A>0$ *deci* $P_9(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})$ *este punct de minim local.*

Celelate puncte se studiază în mod similar.

Exemplul 76 (Temă) *Să se determine punctele de extrem ale funcţiilor* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definite de:*
(a) $f(x,y)=2\left(x^3+y^3\right)+24xy+13\left(x^2+y^2\right)+27$ *(punctele staţionare sunt* $(0,0)\,,(-25/3,-25/3)\,,(1,-4/3)$*).*

(b) $f(x,y)=3x^2y+y^3-12x-15y.$

(c) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2.$

(d) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{3x+2y}.$

(e) $f(x,y)=(x-1)^2+2y^2.$

(f) $f(x,y)=(x-1)^2-2y^2.$

(g) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y.$

(h) $f(x,y)=2xy-5x^2-2y^2+6x+6y.$

(i) $f(x,y)=3x^2y+36x-y^3-15y+9.$

(j) $f(x,y)=x^3-3xy+y^3.$

7 Funcţii implicite

Definiţia 77 *Fie ecuaţia* $F(x,y)=0$*, unde* F *este o funcţie reală de două variabile* $F:A\times B\subset\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*.O funcţie* $y=y(x)$ *definită pe mulţimea* $D\subset A\subset\mathbb{R}$ *astfel încât pentru orice* $x\in D$*,* $(x,y(x))\in A\times B$ *se numeşte soluţie în raport cu variabila* y *a ecuaţiei* $F(x,y)=0$ *pe mulţimea* D *dacă*

$$F(x,y(x))=0,\ \forall x\in D.$$

O asemenea funcţie $y=y(x)$ ***se numeşte funcţie definită implicit de ecuaţia*** $F(x,y)=0.$

Teorema 78 (de existenţă a funcţiilor implicite în cazul $n=2$**)** *Fie* F *este o funcţie reală de două variabile definită pe* $A\times B\subset\mathbb{R}^2$ *şi* $(a,b)\in\operatorname{Int}(A)\times\operatorname{Int}(B)$*.*
Dacă:

1\. $F(a,b)=0.$

2\. *Funţiile* F*,* F'_x *şi* F'_y *sunt continue pe o vecinătate* $U\times V$ *a lui* (a,b)*.*

3\. $F'_y(a,b)=0.$

Atunci:

(i) *Există o vecinătate* $U_0\times V_0\subset U\times V$ *a lui* (a,b) *şi o funcţie unică* $y=y(x):U_0\to V_0$ *astfel încât* $y(a)=b$ *şi*

$$F(x,y(x))=0,\ \forall x\in U_0.$$

(ii) *Funţia* y *definită mai sus are derivată continuă pe* U_0*, dată de*

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))}.$$

(fără demonstraţie)

Exemplul 79 *Să se calculeze* $y^{'}(x_0)$ *şi* $y^{''}(x_0)$ *pentru funcţia* $y(x)$ *ce satisface condiţia* $y(x_0)=y_0$ *şi este definită implicit de ecuaţia:*
$a)$ $x^3+y^3+xy-y^2=0\,,\,y(0)=1.$

$b)$ $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}.$

$c)$ $x^2y^2-x^4-y^4+2^4=0,\ y(2)=2.$

$d)$ $x^3+y^3+xy-y^2=0,\ y(0)=1.$

$e)$ $x^3 + y^3 + xy - y^2 = 0,\ y(0) = 1.$

$f)$ $x + y + z = e^z,\ y(...) = ...$

$g)$ $\arcsin \frac{y}{x} + \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\ ,\ y(-2) = 1.$

Ecuaţia dată este de tipul $F(x, y) = 0$ şi defineşte implicit funcţia $y = y(x)$. Mai întâi vom rescrie ecuaţia dată cu $y(x)$ in loc de y şi apoi vom deriva în raport cu x.

$a)$ *ecuaţia rescrisă este $x^3 + y^3(x) + xy(x) - y^2(x) = 0$. Singura variabilă în această ecuaţie este x. Să derivăm în raport cu această variabilă. Avem*

$$\left[x^3 + y^3(x) + xy(x) - y^2(x)\right]^{'} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2(x)\, y^{'}(x) + x^{'} y(x) + xy^{'}(x) - 2y(x)\, y^{'}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + y(x) + \left[3y^2(x) + x - 2y(x)\right] y^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow y^{'}(x) = -\frac{3x^2 + y(x)}{3y^2(x) + x - 2y(x)}$$

deci are loc

$$y'(x_0) = -\frac{3x_0^2 + y(x_0)}{3y^2(x_0) + x_0 - 2y(x_0)}$$

şi acum vom înlocui $x_0 = 0$ şi $y(x_0) = y(0) = 1$ deci obţinem

$$y'(0) = -\frac{0 + 1}{3 + 0 - 2} = -1$$

Pentru calculul lui $y''(x)$ derivăm relaţia de mai sus

$$y''(x) \overset{def}{=} \left(y^{'}(x)\right)^{'} = \left(-\frac{3x^2 + y(x)}{3y^2(x) + x - 2y(x)}\right)^{'} = -\left(\frac{3x^2 + y(x)}{3y^2(x) + x - 2y(x)}\right)^{'} =$$

$$= -\frac{\left[3x^2 + y(x)\right]^{'} \left[3y^2(x) + x - 2y(x)\right] - \left[3x^2 + y(x)\right] \left[3y^2(x) + x - 2y(x)\right]^{'}}{\left[3y^2(x) + x - 2y(x)\right]^2} =$$

$$= -\frac{\left[6x + y^{'}(x)\right] \left[3y^2(x) + x - 2y(x)\right] - \left[3x^2 + y(x)\right] \left[6y(x)\, y^{'}(x) + 1 - 2y^{'}(x)\right]}{\left[3y^2(x) + x - 2y(x)\right]^2}$$

iar acum $y'(x)$ se înlocuieşte şi vom obţine $y''(x)$ apoi imediat $y''(0) = \cdots$
Observaţie: cu ajutorul cantităţii $y''(x)$ de poate preciza ceva despre concavitatea funcţiei. Astfel dacă $y''(x) \geq 0$ în vecinătatea lui x_0 atunci y este convexă în vecinătatea lui x_0. Dacă $y''(x) \leq 0$ in vecinătatea lui x_0 atunci y este concavă în vecinătatea lui x_0.

Observaţie: Cu ajutorul derivatelor de mai sus putem scrie şi diferenţialele înlocuind $y'(x)$ şi $y''(x)$ în

$$dy(x) \overset{def}{=} y'(x)\, dx$$
$$d^2y(x) \overset{def}{=} y''(x)\, dx^2$$

Remarca 80 *Fie curba de ecuaţie $y = f(x)$. Se ştie că în punctul $(a, f(a)) = (a, b)$ de pe curbă ecuaţia dreptei tangente este dată de*

$$y - b = f'(a)(x - a)\,.$$

În cazul în care $y = f(x)$ este o funcţie implicită dată de ecuaţia $F(x, y) = 0$ (adică $F(x, f(x)) = 0$) atunci

$$f'(a) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

şi deci ecuaţia tangentei se va scrie astfel

$$y - b = -\frac{F'_x(a,b)}{F'_y(a,b)}(x-a)$$

sau echivalent

$$F'_x(a,b)(x-a) + F'_y(a,b)(y-b) = 0.$$

Ecuaţia de mai sus reprezintă ecuaţia tangentei în cazul în care curba y este dată implicit de ecuaţia $F(x,y) = 0$.

Definiţia 81 *Fie ecuaţia $F(x,y,z) = 0$, unde F este o funcţie reală de trei variabile definită pe $A \times B \times C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.O funcţie $z = z(x,y)$ definită pe mulţimea $D \times E \subset A \times B \subset \mathbb{R}^2$ astfel încât pentru orice $(x,y) \in D \times E$, $(x,y,z(x,y)) \in A \times B \times C$ se numeşte soluţie în raport cu variabila z a ecuaţiei $F(x,y,z) = 0$ pe mulţimea $D \times E$ dacă*

$$F(x,y,z(x,y)) = 0,\ \forall x \in D \times E.$$

O asemenea funcţie $z = z(x,y)$ ***se numeşte funcţie definită implicit de ecuaţia*** *$F(x,y,z) = 0$.*

Teorema 82 (de existenţă a funcţiilor implicite în cazul $n = 3$) *Fie F este o funcţie reală de trei variabile definită pe $A \times B \times C \subset \mathbb{R}^3$ şi $(a,b,c) \in \operatorname{Int}(A) \times \operatorname{Int}(B) \times \operatorname{Int}(C)$.*
Dacă:

1. $F(a,b,c) = 0$.

2. *Funţiile F, F'_x, F'_y şi F'_z sunt continue pe o vecinătate $U \times V \times W$ a lui (a,b,c).*

3. $F'_z(a,b,c) = 0$.

Atunci:

(i) *Există o vecinătate $U_0 \times V_0 \times W_0 \subset U \times V \times W$ a lui (a,b,c) şi o funcţie unică $z = z(x,y)$: $U_0 \times V_0 \to W_0$ astfel încât $z(a,b) = c$ şi*

$$F(x,y,z(x,y)) = 0,\ \forall x \in U_0 \times V_0.$$

(ii) *Funţia z definită mai sus are derivatele continue pe $U_0 \times V_0$, date de*

$$z'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,z(x,y))}{F'_z(x,y,z(x,y))}$$

şi de

$$z'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,z(x,y))}{F'_z(x,y,z(x,y))}\ .$$

(fără demonstraţie)

Exemplul 83 *Să se calculeze $z'_x,\ z'_y,\ dz,\ d^2z$, pentru funcţia $z(x,y)$ dată implicit de ecuaţiile:*
a) $(x+y)e^z - xy - z = 0$,în punctul $(2,2,0)$.

b) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{z+y} - y$.

Ecuaţia dată este de tipul $F(x,y,z) = 0$ şi defineşte implicit funcţia $z = z(x,y)$. Mai întâi vom rescrie ecuaţia dată cu $z(x,y)$ in loc de z şi apoi vom deriva parţial în raport cu şi x şi cu y.

a) ecuaţia rescrisă este $(x+y)\,e^{z(x,y)} - xy - z(x,y) = 0$. *Variabilele în această ecuaţie sunt* x *şi* y. *Să derivăm parţial această ecuaţie. Avem*

$$\begin{cases} \left((x+y)\,e^{z(x,y)} - xy - z(x,y)\right)'_x = 0, \\ \left((x+y)\,e^{z(x,y)} - xy - z(x,y)\right)'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)'_x\, e^{z(x,y)} + (x+y)\left(e^{z(x,y)}\right)'_x - y - z'_x(x,y) = 0, \\ (x+y)'_y\, e^{z(x,y)} + (x+y)\left(e^{z(x,y)}\right)'_y - x - z'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{z(x,y)} + (x+y)\,e^{z(x,y)} z'_x(x,y) - y - z'_x(x,y) = 0, \\ e^{z(x,y)} + (x+y)\,e^{z(x,y)} z'_y(x,y) - x - z'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z'_x(x,y) = \dfrac{y - e^{z(x,y)}}{(x+y)\,e^{z(x,y)} - 1}, \\ z'_y(x,y) = \dfrac{x - e^{z(x,y)}}{(x+y)\,e^{z(x,y)} - 1} \end{cases}$$

Acum vom înlocui derivatele de mai sus în expresia diferenţialei

$$dz(x,y) = z'_x(x,y)\,dx + z'_y(x,y)\,dy$$

şi respectiv

$$dz(2,2) = z'_x(2,2)\,dx + z'_y(2,2)\,dy$$

Se poate calcula similar

$$\begin{aligned} z''_{xx}(x,y) &= \left(z'_x(x,y)\right)'_x = \left(\frac{y - e^{z(x,y)}}{(x+y)\,e^{z(x,y)} - 1}\right)'_x = \cdots \\ z''_{yy}(x,y) &= \left(z'_y(x,y)\right)'_y = \left(\frac{x - e^{z(x,y)}}{(x+y)\,e^{z(x,y)} - 1}\right)'_y = \cdots \\ z''_{xy}(x,y) &= \left(z'_x(x,y)\right)'_y = \left(\frac{y - e^{z(x,y)}}{(x+y)\,e^{z(x,y)} - 1}\right)'_y = \cdots \end{aligned}$$

şi apoi folosim formula

$$d^2 z(x,y) = z''_{xx}(x,y)\,dx^2 + z''_{yy}(x,y)\,dy^2 + 2z''_{xy}(x,y)\,dxdy$$

şi respectiv

$$d^2 z(2,2) = z''_{xx}(2,2)\,dx^2 + z''_{yy}(2,2)\,dy^2 + 2z''_{xy}(2,2)\,dxdy.$$

Remarca 84 *Fie suprafaţa de ecuaţie* $z = f(x,y)$. *Se ştie că în punctul* $(a,b,f(a,b)) = (a,b,c)$ *de pe suprafaţă ecuaţia planului tangent este dat de*

$$z - c = z'_x(a,b)\,(x-a) + z'_y(a,b)\,(y-b).$$

În cazul în care $z = f(x,y)$ *este o funcţie implicită dată de ecuaţia* $F(x,y,z) = 0$ *(adică* $F(x,y,f(x,y)) = 0$*) atunci*

$$z'_x(x,y) = -\frac{F'_x(a,b,c)}{F'_z(a,b,c)} \quad \text{şi} \quad z'_x(x,y) = -\frac{F'_y(a,b,c)}{F'_z(a,b,c)}$$

şi deci planului tangent se va scrie astfel

$$z - c = -\frac{F'_x(a,b,c)}{F'_z(a,b,c)}\,(x-a) - \frac{F'_y(a,b,c)}{F'_z(a,b,c)}\,(y-b)$$

sau echivalent

$$F_x'(a,b,c)(x-a)+F_y'(a,b,c)(y-b)+F_z'(a,b,c)(z-c)=0.$$

Ecuaţia de mai sus reprezintă ecuaţia planului tangent în cazul în care suprafaţa z este dată implicit de ecuaţia $F(x,y,z)=0$.

Definiţia unei funcţii implicite precum şi Teorema de existenţă a funcţiilor implicite de mai sus se pot prezenta şi în cazul general al unei funcţii vectoriale $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Vom prezenta în continuare, printr-un exemplu, doar cazul $n=3$ şi $m=2$.

Exemplul 85 *Să se calculeze derivatele y', z' şi diferenţialele dy, dz ale funcţiilor definite implicit de sistemul*

$$\begin{cases} x^3+3y^2-z^2+x-y-8=0 \\ 2x^2-4y-6z-6=0 \end{cases}$$

în punctul $A(1,2,-2)$.

Avem un sistem de tipul $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ care defineşte implicit funcţiile $y=y(x)$ şi $z=z(x)$.

Mai întâi vom rescrie ecuaţia dată cu $y(x)$ in loc de y şi $z(x)$ în loc de z apoi vom deriva în raport cu şi x ambele ecuaţii.

Să rescriem sistemul $\begin{cases} x^3+3y^2(x)-z^2(x)+x-y(x)-8=0 \\ 2x^2-4y(x)-6z(x)-6=0 \end{cases}$ şi vom obţine derivând în raport cu x:

$$\begin{cases} 3x^2+6y(x)y'(x)-2z(x)z'(x)+1-y'(x)-0=0 \\ 4x-4y'(x)-6z'(x)-0=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2+6y(x)y'(x)-2z(x)z'(x)+1-y'(x)-0=0 \\ 4x-4y'(x)-6z'(x)-0=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (6y(x)-1)y'(x)-2z(x)z'(x)=-3x^2-1 \\ 4y'(x)+6z'(x)=4x \end{cases}$$

care este un sistem liniar în necunoscutele $y'(x)$ şi $z'(x)$.