

Facultatea de Matematică
 Calcul integral și Aplicații, Semestrul I
 Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 1 – 2

Capitolul I. Integrale improprii

1. Să se studieze natura integralei $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[0, b]$, cu $\forall b > 0$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[0, b] \subset [0, \infty)$. Atunci, prin definiție

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx$$

Dar $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x$ deci

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg(x)|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg(b) - \arctg(0)) = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg(b) = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

ceea ce înseamnă că integrala improprie de primul tip $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ este convergentă și

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

2. Să se studieze natura integralei $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$.

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcția $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[-b, 0]$, cu $\forall b > 0$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[-b, 0] \subset (-\infty, 0]$. Atunci, prin definiție

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Deci

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg(x)|_{-b}^0 = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg(0) - \arctg(-b)) = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg(b) = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

ceea ce înseamnă că integrala improprie de primul tip $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$ este convergentă și

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

3. Să se studieze natura integralei $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Rezolvare:

Prin definiție

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Deci integrala improprie de primul tip $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ este convergentă și

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

4. Fie $a > 0$. Integrala

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcția $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[a, b]$, cu $\forall b > a$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[a, b] \subset [a, \infty)$. Atunci, prin definiție

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-\alpha} dx$$

Dar

$$\int x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha \neq 1 \\ \ln x, & \alpha = 1 \end{cases}$$

deci, pentru $\alpha = 1$,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln a) = \infty - \ln a = \infty$$

și pentru $\alpha \neq 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-\alpha} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} \right) = \frac{1}{1-\alpha} (\infty^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) \end{aligned}$$

Dacă avem $\alpha > 1$ atunci $\alpha - 1 > 0$ deci $\infty^{1-\alpha} = \frac{1}{\infty^{\alpha-1}} = \frac{1}{\infty} = 0$, iar dacă avem $\alpha < 1$ atunci $1 - \alpha > 0$ deci $\infty^{1-\alpha} = \infty$.

Integrala inițială este atunci

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_a^b, & \alpha \neq 1 \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_a^b, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

deci $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}$ deci este (C) pentru $\alpha > 1$ și (D) pentru $\alpha \leq 1$.

5. Studiați, folosind definiția, convergența următoarelor integrale improprii de specia I:

(a) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$, (b) $\int_1^\infty \frac{e^x dx}{e^x - 1}$, (c) $\int_0^\infty e^{-2x} \sin 3x dx$, (d) $\int_0^\infty e^{-3x} \cos 4x dx$,

(e) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2}$, (f) $\int_0^\infty xe^{-x^2} dx$,

(g) $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin(\beta x) dx$, $\alpha > 0$, (h) $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx$, $\alpha > 0$.

Rezolvare:

(a)

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^{3/2}} dx = (\text{subst. } \ln x = y) = \int_1^\infty y^{-3/2} dy = \frac{y^{-1/2}}{-1/2} \Big|_{y=1}^{y=\infty} = -2 \frac{1}{\sqrt{y}} \Big|_{y=1}^{y=\infty} = 2.$$

(b)

$$\int_1^{\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} dx = (\text{subst. } e^x = y) = \int_e^{\infty} \frac{1}{y - 1} dy = \ln |y - 1| \Big|_{y=e}^{y=\infty} = \ln(+\infty) - \ln |e - 1| = +\infty.$$

(c) aplicăm de două ori metoda de integrare prin părți pentru a calcula primitiva

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^{-2x} \sin 3x dx = \frac{-1}{2} e^{-2x} \sin 3x + \frac{3}{-4} e^{-2x} \cos 3x - \frac{3}{2} F(x) \\ \Leftrightarrow F(x) &= \frac{13}{4} \left(\frac{-1}{2} e^{-2x} \sin 3x + \frac{3}{-4} e^{-2x} \cos 3x \right) \\ \Leftrightarrow F(x) &= -\frac{2 \sin 3x + 3 \cos 3x}{2^2 + 3^2} \cdot e^{-2x}. \end{aligned}$$

Deci

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} \sin 3x dx = -F(x) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = F(+\infty) - F(0).$$

Dar $F(0) = -\frac{3}{2^2+3^2}$ iar

$$F(+\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-) \frac{2 \sin 3x + 3 \cos 3x}{2^2 + 3^2} \cdot e^{-2x} = 0$$

deoarece

$$\left| -\frac{2 \sin 3x + 3 \cos 3x}{2^2 + 3^2} \right| = \left| \frac{2 \sin 3x + 3 \cos 3x}{2^2 + 3^2} \right| \leq \frac{|2 \sin 3x| + |3 \cos 3x|}{|2^2 + 3^2|} \leq \frac{2 + 3}{2^2 + 3^2}$$

(adică este mărginit) iar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = e^{-\infty} = 0$$

Am folosit rezultatul:

Lema 1 Fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ unde I este un interval. Presupunem că $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ și $|g(x)| \leq M, \forall x \in I$. Atunci

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

(adică produsul dintre o cantitate care tinde la zero și o cantitate mărginită este o cantitate care tinde la zero).

Prin urmare

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} \sin 3x dx = F(+\infty) - F(0) = \frac{3}{2^2 + 3^2}.$$

(f)

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} e^{-x^2} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{-1}{2} e^{-\infty} + \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2}.$$

(g) Observăm că se integrează funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-\alpha x} \sin(\beta x)$ care este continuă pe orice interval de tipul $[0, b]$, cu $\forall b > 0$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[0, b] \subset [0, \infty)$. Atunci, prin definiție

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\alpha x} \sin(\beta x) dx$$

Dar pentru calculul integralei $\int_0^b e^{-\alpha x} \sin(\beta x) dx$ (vezi metoda de integrare prin părți):

$$\int e^{-\alpha x} \sin(\beta x) dx = -\frac{\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot e^{-\alpha x}$$

adică primitiva $F(x) = -\frac{\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot e^{-\alpha x}$. Obținem $F(0) = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$ și deci

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) dx = F(\infty) - F(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Ținând cont de faptul că funcțiile \sin , \cos sunt mărginite de 1 obținem că

$$\left| -\frac{\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \right| \leq \frac{|\alpha \sin(\beta x)| + |\beta \cos(\beta x)|}{\alpha^2 + \beta^2} \leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{\alpha^2 + \beta^2}$$

și pe de altă parte $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$. Dar având în vedere că produsul dintre o funcție mărginită și o funcție care tinde la 0 va tinde la 0 obținem că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \cdot e^{-\alpha x} = 0$$

deci

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin(\beta x) dx = F(\infty) - F(0) = 0 + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

(h) Avem

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

6. Să se studieze convergența următoarei integrale improprii

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} dx$$

Rezolvare:

Avem $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} = \frac{x^{3/2}}{1+x^2}$. Trebuie să determinăm α astfel încât să existe limita $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^\alpha \cdot \frac{x^{3/2}}{1+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha+3/2}}{1+x^2}$$

Având în vedere că limita este la ∞ , scoatem factor forțat x la puterea cea mai mare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha+3/2}}{x^2(1/x^2+1)} = (\text{aleg } \alpha + 3/2 = 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x^2+1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

Deci pentru $\alpha = 1/2 \leq 1$ obținem $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = 1 \in (0, \infty)$ deci $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} dx$ este (D).

7. Studiați convergența următoarelor integrale improprii*:

$$(a) \int_1^\infty \frac{\arctg(x)}{x^2} dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{\arctg(x)}{x} dx, \quad (c) \int_0^\infty \frac{\arctg(x)}{x(1+x^2)} dx,$$

$$(d) \int_{-1}^\infty e^{-x^2-2x+3} dx, \quad (e) \int_0^\infty e^{-ax} x^b dx, \quad a, b > 0.$$

Rezolvare:

(a) Avem $f(x) = \frac{\arctg(x)}{x^2}$. Trebuie să determinăm α astfel încât să existe limita $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^\alpha \cdot \frac{\arctg(x)}{x^2} \right) = (\text{aleg } \alpha = 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Deci pentru $\alpha = 2 > 1$ obținem $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = \frac{\pi}{2} \in (0, \infty)$ deci $\int_1^\infty \frac{\arctg(x)}{x^2} dx$ este (C).

(b) Avem $f(x) = \frac{\arctg(x)}{x}$. Trebuie să determinăm α astfel încât să existe limita $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^\alpha \cdot \frac{\arctg(x)}{x} \right) = (\text{aleg } \alpha = 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Deci pentru $\alpha = 1 \leq 1$ obținem $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = \frac{\pi}{2} \in (0, \infty)$ deci $\int_1^\infty \frac{\arctg(x)}{x} dx$ este (D).

*La punctele (b) și (c) putem considera integrala calculată pe intervalul $[0, +\infty)$ deoarece limita în 0 există și este finită, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x} = 1$ și $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x(1+x^2)} = 1$. Deci integrala este improprie de specia I.

8. Studiați, folosind criteriul de convergență în α , convergența următoarelor integrale improprii:

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}} dx, \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{1}{2x+5+\sqrt[3]{x^2+1}} dx,$$

$$(c) \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^4}} dx, \quad (d) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3+x^6}}.$$

9. Studiați convergența următoarelor integrale improprii:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+3} dx, \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx, \quad (c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Indicație: se scrie fiecare integrală ca sumă de alte două integrale. Eventual se poate folosi și paritatea funcției de sub integrală și faptul că

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f \text{ este funcție pară} \\ 0, & f \text{ este funcție impară} \end{cases}$$

10. Studiați convergența următoarelor integrale improprii (calculându-le, eventual, în prealabil):

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}, \quad (b) \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx, \quad (c) \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx, \quad (d) \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{(1+x^3)^2},$$

$$(e) \int_1^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx, \quad (f) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}, \quad (g) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Rezolvare:

(a) Mai întâi,

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1-x+x^2} \Leftrightarrow 1 = (a+b)x^2 + (-a+b+c)x + (a+c)$$

$$\Leftrightarrow a = 1/3, \quad b = -1/3, \quad c = 2/3$$

și deci

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^3} &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+x} dx + \frac{1}{3} \int \frac{-x+2}{1-x+x^2} dx = \frac{1}{3} \ln|1+x| + \frac{1}{3} \int \frac{1}{-2} \frac{2x-4}{1-x+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|1+x| + \frac{1}{3} \frac{1}{-2} \int \frac{2x-1-3}{1-x+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|1+x| - \frac{1}{6} \int \frac{(1-x+x^2)'}{1-x+x^2} dx - \frac{1}{6} \int \frac{-3}{1-x+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|1+x| - \frac{1}{6} \ln|1-x+x^2| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln|1+x| - \frac{1}{6} \ln|1-x+x^2| + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}/2} \operatorname{arctg} \frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} + C \\ &= \frac{1}{6} (2 \ln|1+x| - \ln|1-x+x^2|) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{|1+x|^2}{|1-x+x^2|} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{6} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} + C. \end{aligned}$$

Integrala improprie este atunci

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} &= \frac{1}{6} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} \Big|_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{3} \ln \frac{0^2+0+1}{0^2-0+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{0-1/2}{\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{1}{3} \ln 1 - \frac{1}{3} \ln 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\infty) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(b) Calculăm mai întâi primitiva

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^3} dx &= \int x^{-3} \ln x dx = \int \left(\frac{x^{-2}}{-2} \right)' \ln x dx = \frac{x^{-2}}{-2} \ln x - \int \frac{x^{-2}}{-2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^{-2}}{-2} \ln x + \frac{1}{2} \int x^{-3} dx \\ &= \frac{1}{-2} \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^{-2}}{-2} + C. \end{aligned}$$

Integrala improprie este atunci

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx &= \frac{-1}{2} \frac{\ln x}{x^2} \Big|_{x=1}^{x=\infty} - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} \Big|_{x=1}^{x=\infty} \\ &= \frac{-1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} - \frac{-1}{2} \frac{\ln 1}{1^2} - \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = (\text{L'Hospital}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x} = 0.$$

(c) Calculăm mai întâi primitiva făcând substituția

$$x = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2t dt$$

(vezi Integrale din funcții iraționale):

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = \int \frac{t}{(1+t^2)^2} 2t dt.$$

Dar

$$\frac{t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} (1+t^2)^{-2} (1+t^2)' = \frac{1}{2} \left(\frac{(1+t^2)^{-1}}{-1} \right)' = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t^2} \right)'$$

deci

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx &= 2 \int t \left(\frac{-1}{2} \frac{1}{1+t^2} \right)' dt = 2t \left(\frac{-1}{2} \frac{1}{1+t^2} \right) - 2 \int 1 \left(\frac{-1}{2} \frac{1}{1+t^2} \right) dt = -\frac{t}{1+t^2} + \operatorname{arctg} t + C \\ &= -\frac{\sqrt{x}}{1+x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Integrala improprie este atunci

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx &= -\frac{\sqrt{x}}{1+x} \Big|_{x=1}^{x=\infty} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} \Big|_{x=1}^{x=\infty} \\ &= -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} + \frac{\sqrt{1}}{1+1} + \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(d) Observăm mai întâi că

$$\frac{x^2}{(1+x^3)^2} = \frac{1}{3} \frac{(1+x^3)'}{(1+x^3)^2} = \frac{1}{3} (1+x^3)^{-2} (1+x^3)' = \frac{1}{3} \left(\frac{(1+x^3)^{-1}}{-1} \right)' = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x^3} \right)'$$

deci

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(1+x^3)^2} dx &= \int x \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx = \int x \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{1+x^3} \right)' dx = x \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{1+x^3} \right) - \int 1 \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{1+x^3} \right) dx \\ &= -\frac{1}{3} \frac{x}{1+x^3} + \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+x^3} dx \end{aligned}$$

Integrala improprie este atunci (vezi și punctul a))

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(1+x^3)^2} &= -\frac{1}{3} \frac{x}{1+x^3} \Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^3} + \frac{1}{3} \frac{0}{1+0^3} + \frac{1}{3} \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(e) Observăm mai întâi că

$$\frac{x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} (1+x^2)^{-2} (1+x^2)' = \frac{1}{2} \left(\frac{(1+x^2)^{-1}}{-1} \right)' = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)'$$

deci

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= \int \ln x \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \right)' dx = \ln x \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \right) - \int \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx. \end{aligned}$$

Pentru a calcula integrala $\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx$, trebuie să descompunem fracția în fracții simple:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} \Leftrightarrow a=1, b=-1, c=0.$$

Deci

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-x}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{4} \ln x^2 - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C = -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C \end{aligned}$$

Integrala improprie este atunci

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1+x^2} \Big|_{x=1}^{x=\infty} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \Big|_{x=1}^{x=\infty} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 1}{1+1^2} + \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{4} \ln \frac{1^2}{1+1^2} = -\frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \ln 2, \end{aligned}$$

deoarece

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{1+x^2} &= (\text{L'Hospital}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2}{1+x^2} &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

(g) Deoarece

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1),$$

putem descompune în fracții simple și obținem

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) \right] \Big|_{x=0}^{x=\infty}.$$

11. Arătați că următoarele integrale improprii sunt divergente:

$$(a) \int_0^{+\infty} \cos x \, dx, \quad (b) \int_0^{+\infty} \sin x \, dx, \quad (c) \int_0^{+\infty} x \sin x \, dx.$$

Rezolvare:

(b) Observăm că se integrează funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ care este continuă pe orice interval de tipul $[0, b]$, cu $\forall b > 0$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[0, b] \subset [0, \infty)$. Atunci, prin definiție

$$\int_0^{\infty} \sin x \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin x \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (-\cos b + \cos 0) = 1 - \lim_{b \rightarrow \infty} \cos b = 1 - \cos \infty$$

Dar $\cos \infty$ nu există (funcțiile periodice nu au limită la ∞) deci $\int_0^{\infty} \sin x \, dx$ nu există adică

$$\int_0^{\infty} \sin x \, dx \text{ este divergentă.}$$

12. Studiați convergența integralelor

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx, \quad \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} \, dx, \quad a > 0, \alpha > 0.$$

Rezolvare:

Integralele sunt (C) deoarece putem aplica Criteriul lui Dirichlet funcțiilor $f(x) = \sin x$ (respectiv $f(x) = \cos x$) și $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

Într-adevăr avem $f(x) = \sin x$ integrabilă pe orice $[a, b]$ și

$$\left| \int_a^b \sin x \, dx \right| = |-\cos b + \cos a| \leq 2, \quad \forall a < b < \infty.$$

Evident $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ este descrescătoare ($\alpha > 0$) și

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

În particular se obține convergența integralelor

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} \, dx$$

(am putut extinde la cazul $a = 0$ deoarece limita în 0 este finită, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

13. Studiați convergența integralelor:

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^5)}{x^2} \, dx, \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{k^2 + x^2} \, dx.$$

Rezolvare:

Ambele integrale sunt improprii de specia I.

(a) Integrala este (C) deoarece putem aplica Criteriul lui Dirichlet funcțiilor $f(x) = \sin x^5$ și $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

(b) Integrala este (C) deoarece putem aplica Criteriul lui Dirichlet funcțiilor $f(x) = \sin(ax)$ și $g(x) = \frac{x}{k^2 + x^2}$.

14. Să se studieze natura integralei $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcția $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[0, c]$, cu $\forall 0 < c < 1$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[0, c] \subset [0, 1)$. Atunci, prin definiție

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{c \nearrow 1} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{c \nearrow 1} \arcsin x \Big|_0^c = \lim_{c \nearrow 1} (\arcsin c - \arcsin 0) \\ &= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \pi/2 \end{aligned}$$

Deci integrala improprie $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ este (C).

15. Să se studieze natura integralei $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcția $f : (-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (deci punctul singular este -1).

16. Să se studieze natura integralei $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcția $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (deci punctele singulare sunt ± 1).

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \dots\dots$$

17. Integrala

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$$

este convergentă pentru $\lambda < 1$ și divergentă pentru $\lambda \geq 1$.

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcția $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(b-x)^\lambda}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[a, c]$, cu $\forall a < c < b$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[a, c] \subset [a, b)$. Atunci, prin definiție

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c (b-x)^{-\lambda} dx$$

Dar

$$\int (b-x)^{-\lambda} dx = \begin{cases} -\frac{(b-x)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}, & \lambda \neq 1 \\ -\ln(b-x), & \lambda = 1 \end{cases}$$

deci, pentru $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c (b-x)^{-1} dx &= -\lim_{c \rightarrow b} \ln(b-x) \Big|_a^c = \lim_{c \rightarrow b} (-\ln(b-c) + \ln(b-a)) = \\ &= -\ln 0_+ + \ln(b-a) = -(-\infty) + \ln(b-a) = \infty \end{aligned}$$

și pentru $\lambda \neq 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c (b-x)^{-\lambda} dx &= -\lim_{c \rightarrow b} \left. \frac{(b-x)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \right|_a^c = \lim_{c \rightarrow b} \left(\frac{(b-c)^{-\lambda+1}}{\lambda-1} - \frac{(b-a)^{-\lambda+1}}{\lambda-1} \right) \\ &= \left(\frac{0_+^{-\lambda+1}}{\lambda-1} - \frac{(b-a)^{-\lambda+1}}{\lambda-1} \right) \end{aligned}$$

Dacă avem $\lambda > 1$ atunci $\lambda - 1 > 0$ deci $0_+^{-\lambda+1} = \frac{1}{0_+^{\lambda-1}} = \frac{1}{0_+} = +\infty$, iar dacă avem $\lambda < 1$ atunci $1 - \lambda > 0$ deci $0_+^{-\lambda+1} = 0$.

Integrala inițială este atunci

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow b} \left. -\frac{(b-x)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \right|_a^c, & \lambda \neq 1 \\ \lim_{c \rightarrow b} -\ln(b-x) \Big|_a^c, & \lambda = 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & \lambda \geq 1, \\ -\frac{(b-a)^{-\lambda+1}}{\lambda-1}, & \lambda < 1. \end{cases}$$

deci $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}$ este (C) pentru $\lambda < 1$ și (D) pentru $\lambda \geq 1$.

18. Analog se poate studia natura integralei

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcția $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-a)^\lambda}$ care este continuă deci integrabilă pe orice interval compact $[a, c] \subset (a, b]$. Se obține că

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \begin{cases} +\infty, & \lambda \geq 1, \\ \frac{(b-a)^{-\lambda+1}}{1-\lambda}, & \lambda < 1. \end{cases}$$

19. Să se studieze natura integralei $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcția $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ care este (continuă deci) integrabilă pe orice interval compact $[0, c] \subset [0, 1)$. Trebuie să determinăm λ astfel încât să existe limita $\lim_{x \nearrow 1} |x-1|^\lambda f(x)$. Deoarece $x \in [0, 1)$ avem că $x < 1 \Rightarrow |x-1|^\lambda = (1-x)^\lambda$, deci

$$\lim_{x \nearrow 1} |x-1|^\lambda f(x) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{(1-x)^\lambda}{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{(1-x)^\lambda}{(1-x)^{1/4} \sqrt[4]{(1+x)(1+x^2)}}$$

Aleg $\lambda = 1/4$ și obțin

$$\lim_{x \nearrow 1} |x-1|^\lambda f(x) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \in (0, \infty)$$

Deci pentru $\lambda = 1/4 < 1$, $\lim_{x \nearrow 1} |x-1|^\lambda f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \in (0, \infty)$ adică integrala este (C).

20. Studiați convergența următoarelor integrale improprii:

$$(a) \int_0^1 \ln(1-x) dx, \quad (b) \int_1^3 \frac{dx}{4-x^2}, \quad (c) \int_2^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(3-x)^2(x^2+x-6)}}, \quad (d) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}},$$

$$(e) \int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad (f) \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^4(x^4+x^2+1)}}, \quad (g) \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}},$$

$$(h) \int_1^\infty \frac{dx}{1-x^2}, \quad (i) \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}, \quad (j) \int_1^\infty \frac{5x+1}{x^3-x-6} dx, \quad (k) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}.$$

Rezolvare:

(a) Calculăm mai întâi primitiva

$$\begin{aligned} \int \ln(1-x) dx &= x \ln(1-x) - x - \ln(1-x) + C \\ &= -(1-x) \ln(1-x) - x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1-x) dx &= \left[-(1-x) \ln(1-x) - x \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= -\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x) \ln(1-x) + 1 \ln 1 - 1 + 0 = (\text{notând } 1-x=y) \\ &= -\lim_{y \rightarrow 0^+} y \ln y - 1 = (\text{notând } \frac{1}{y} = z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln z}{z} - 1 = 0 - 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\int_1^3 \frac{dx}{4-x^2} = \int_1^3 \frac{dx}{(2-x)(2+x)} = \int_1^2 \frac{dx}{4-x^2} + \int_2^3 \frac{dx}{4-x^2} = \dots$$

(c)

$$\int_2^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(3-x)^2(x^2+x-6)}} = \int_2^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(3-x)^2(x^2+x-6)}} + \int_{5/2}^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(3-x)^2(x^2+x-6)}}.$$

(d)

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$$

(e) Facem substituția

$$x - \frac{a+b}{2} = y \Leftrightarrow x = y + \frac{a+b}{2} \Rightarrow dx = dy$$

și obținem

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{y + \frac{a+b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}} dy = \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}} dy + \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}} dy \\ &= \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} (-) \frac{\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2\right)'}{2\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}} dy + \frac{a+b}{2} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}} dy \\ &= -\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2} \Big|_{x=\frac{a-b}{2}}^{x=\frac{b-a}{2}} + \frac{a+b}{2} \arcsin \frac{y}{\frac{b-a}{2}} \Big|_{x=\frac{a-b}{2}}^{x=\frac{b-a}{2}} = \dots \end{aligned}$$

(f) vom lua $\lambda = 4/3$ și $\alpha = 4/3$.

(g) vom lua $\lambda = 1/2$.

(h)

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = - \int \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

Acum

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{1-x^2} &= \int_1^2 \frac{dx}{1-x^2} + \int_2^\infty \frac{dx}{1-x^2} \\ &= (-) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2-1}{2+1} \right| - \lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a > 1}} (-) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a-1}{a+1} \right| + \lim_{c \rightarrow \infty} (-) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{c-1}{c+1} \right| - (-) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2-1}{2+1} \right| \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\substack{a \rightarrow 1 \\ a > 1}} \ln \left| \frac{a-1}{a+1} \right| + \lim_{c \rightarrow \infty} (-) \frac{1}{2} \ln 1 = \dots \end{aligned}$$

(j) Calculăm mai întâi primitiva

$$\int \frac{5x+1}{x^3-x-6} dx = \int \frac{5x+1}{(x-2)(x^2+2x+3)} dx$$

descompunând în fracții simple.

21. Studiați convergența următoarelor integrale improprii:

(a) $\int_1^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg}(x)) dx$, (b) $\int_1^\infty \frac{x + \cos x}{x^3 + \sin x} dx$, (c) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} dx$,

(d) $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx$, $\beta \in \mathbb{R}$, (e) $\int_1^2 \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx$, $\beta \in \mathbb{R}$, (f) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$,

(g) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$, (h) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$, (i) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$,

(j) $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$, (k) $\int_0^1 \sqrt{\ln \left(\frac{1}{x} \right)} dx$, (l) $\int_0^\infty \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$,

(m) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} dx$, (n) $\int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx$.

Rezolvare:

(a) Avem $f(x) = \pi - 2\operatorname{arctg}(x)$. Trebuie să determinăm α astfel încât să existe limita $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^\alpha \cdot (\pi - 2\operatorname{arctg}(x))) = (\text{nedeterm. } \infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg}(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} \\ &= (\text{aleg } \alpha = 1 \text{ și aplic L'Hospital}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0 - 2 \frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2. \end{aligned}$$

Deci pentru $\alpha = 1 \leq 1$ obținem $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = 2 \in (0, \infty)$ deci $\int_1^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg}(x)) dx$ este (D).

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \cdot \frac{x + \cos x}{x^3 + \sin x} = (\text{aleg } \alpha = 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 \cos x}{x^3 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{\sin x}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x^3}} = \frac{1+0}{1+0} = 1. \end{aligned}$$

Am folosit că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^3} = 0,$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \cdot \frac{\ln x}{x} = (\text{aleg } \alpha = 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty > 0$$

deci limita este > 0 iar $\alpha \leq 1$, prin urmare integrala este divergentă (Conform Criteriului în α).

(d) Calculăm primitiva

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx &= \int (\ln x)^{-\beta} (\ln x)' dx = (\text{pp. } \beta \neq 1 \text{ și fac subst. } \ln x = t) \\ \int t^{-\beta} dt &= \frac{t^{-\beta+1}}{-\beta+1} + C = \frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1} + C. \end{aligned}$$

Dacă $\beta = 1$, atunci

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} (\ln x)' dx = (\text{subst. } \ln x = t) = \int \frac{1}{t} dt = \ln t + C = \ln |\ln x| + C.$$

Prin urmare, pentru $\beta \neq 1$,

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx &= \left. \frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1} \right|_{x=2}^{x=\infty} = \frac{1}{1-\beta} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{-\beta+1} - (\ln 2)^{-\beta+1} \right) \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left((\ln(+\infty))^{-\beta+1} - (\ln 2)^{-\beta+1} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\beta} \left(+\infty - (\ln 2)^{-\beta+1} \right) = +\infty, & \text{dacă } \beta < 1, \\ \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{1}{(+\infty)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} \right) = \frac{1}{\beta-1} \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}, & \text{dacă } \beta > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Pentru $\beta = 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \ln |\ln x| \Big|_{x=1}^{x=\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln |\ln x| - \ln |\ln 1| = \ln \ln(+\infty) - \ln 0_+ = \ln(+\infty) - (-\infty) = +\infty.$$

(k) Vom lua $\lambda = \frac{1}{2}$ și, notând cu $\frac{1}{x} = y$, avem $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\lambda \sqrt{\ln \left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\ln y}{y}} = 0$.

(l) Se obține convergența cu $\alpha > 1$, arbitrar ales.

(m) Se obține convergența cu $\alpha \in (1, 2)$, arbitrar ales.

(n) Avem

$$\int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{-1}{4} \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} \right)' \ln x dx.$$

22. Studiați, folosind criteriul de convergență în λ , convergența următoarelor integrale improprii:

(a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} dx$, (b) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}\sqrt[4]{x+x^3}} dx$, (c) $\int_0^1 \frac{1}{x^3-5x^2} dx$,

(d) $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$, (e) $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^4(x^4+x^2+1)}} dx$,

(f) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1} dx$, (g) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, (h) $\int_1^e \frac{1}{x(\ln x)^{3/2}} dx$.

23. Studiați convergența următoarelor integrale:

$$(a) \int_0^\pi \frac{\sin x}{7 + 6 \cos x - 2 \sin x} dx, \quad (b) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}, \quad (c) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x^2}},$$

$$(d) \int_a^b \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad (e) \int_a^b \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx, \quad (f) \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \quad a < b,$$

$$(g) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 4}$$

Rezolvare:

(a) Folosim substituția $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$ și formulele $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ și $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Deci

$$I = \int_0^\infty \frac{4t dt}{(t^2+1)(t^2-4t+13)} = \dots$$

(b) Folosim substituția $\operatorname{tg}(x) = t$ și formulele $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ și $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Deci

$$I = \int_0^\infty \frac{dt}{a^2 t^2 + b^2} = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\frac{b}{a}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\frac{b}{a}}\right) \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\pi}{2ab}.$$

(c) $x = \sin t$

(d) $\lambda = 1/2$ și $\lambda = 1/2$

(e) Folosim substituția $\sqrt{\frac{b-x}{x-a}} = t$

$$I = \int_0^\infty \frac{2(b-a)t^2}{(t^2+1)^2} dt = \dots$$

(f) Folosim substituția

$$x = a \cos^2 t + b \sin^2 t$$

cu

$$dx = (-2a \cos t \sin t + 2b \sin t \cos t) dt = (b-a) \sin(2t) dt.$$

Obținem

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{(b-a)\sin^2 t}{(b-a)\cos^2 t}} (b-a) \sin(2t) dt \\ &= 2(b-a) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t} \sin t \cos t dt = 2(b-a) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = (b-a) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2t)) dt \\ &= (b-a) \left(t \Big|_{t=0}^{t=\pi/2} - \frac{\sin(2t)}{2} \Big|_{t=0}^{t=\pi/2} \right) = (b-a) \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(g) Folosim substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, dar $x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in [0, \pi]$, iar tangenta nu este definită în $\pi/2$. Deci

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 4} &= \int_0^\pi \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 4} + \int_\pi^{2\pi} \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 4} \\ &= \int_0^\infty \frac{2dt}{t^2 + 4t + 7} + \int_{-\infty}^0 \frac{2dt}{t^2 + 4t + 7} = \dots \end{aligned}$$

24. Studiați convergența următoarelor integrale improprii:

$$(a) \int_0^\infty e^{-x} \sin(x+1) dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{x dx}{1+[x]^2}, \quad (c) \int_0^1 \left[\frac{1}{x} \right] dx, \quad (d) \int_0^1 [\ln x] dx.$$

Facultatea de Matematică
 Calcul integral și aplicații, Semestrul I
 Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 1 – 2

Capitolul I. Integrale improprii

ANEXĂ

1 Integrala improprie de primul tip

Definiția 2 Fie $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție integrabilă Riemann pe intervale compacte de tipul $[a, b]$, pentru orice $b > a$. Integrala $\int_a^\infty f(x) dx$ se numește **integrala improprie de primul tip**. Dacă $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ există și este finită vom spune că integrala improprie $\int_a^\infty f(x) dx$ este convergentă, notat (C) , și vom scrie

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

O integrală care nu este convergentă se va numi divergentă, notat (D) .

Teorema 3 Fie $a > 0$. Integrala

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Se obține că

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_a^b, & \alpha \neq 1 \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_a^b, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Remarca 4 Similar putem defini $\int_{-\infty}^a f(x) dx$.

Remarca 5 Integrala $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ se poate defini prin egalitatea

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^a f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

Definiția 6 Fie o integrală improprie $\int_a^\infty f(x) dx$. Spunem că integrala este absolut convergentă, notat (AC) , dacă integrala $\int_1^\infty |f(x)| dx$ este (C) .

Propoziția 7 Dacă integrala $\int_a^\infty f(x) dx$ este (AC) , atunci ea este (C) .

Remarca 8 Reciproca rezultatului anterior nu are loc.

2 Convergența integralei în cazul funcțiilor pozitive

Teorema 9 (Criteriul de comparație) Fie $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții astfel încât $f \leq g$ pe $[a, \infty)$.

(i) Dacă integrala improprie $\int_a^\infty g(x) dx$ este (C), atunci și integrala improprie $\int_a^\infty f(x) dx$ este (C).

(ii) Dacă integrala improprie $\int_a^\infty f(x) dx$ este (D), atunci și integrala improprie $\int_a^\infty g(x) dx$ este (D).

Teorema 10 (Criteriul în α) Fie $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f \geq 0$ pe $[a, \infty)$.

(i) Dacă există $\alpha > 1$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) < +\infty$ atunci $\int_a^\infty f(x) dx$ este (C).

(ii) Dacă există $\alpha \leq 1$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) > 0$ atunci $\int_a^\infty f(x) dx$ este (D).

3 Convergența integralei în cazul general

Teorema 11 (Criteriul lui Abel) Fie $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții astfel încât

1) Integrala improprie $\int_a^\infty f(x) dx$ este (C).

2) Funcția g este monotonă și mărginită.

În aceste condiții integrala improprie $\int_a^\infty f(x)g(x) dx$ este (C).

Teorema 12 (Criteriul lui Dirichlet) Fie $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții astfel încât

1) Funcția f este integrabilă pe $[a, b]$, pentru orice $b > a$ și

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq K, \text{ pentru orice } a < b < \infty.$$

2) Funcția g este monotonă și $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

În aceste condiții integrala improprie $\int_a^\infty f(x)g(x) dx$ este (C).

4 Integrale de tip Froullani

Teorema 13 Fie $0 < a < b$ și $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și mărginită. Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ sau dacă

$\int_a^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ este (C), atunci este (C) și integrala $\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx$ și are loc formula

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0) \ln \frac{a}{b}.$$

Remarca 14 Un rezultat similar are loc și dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$, deoarece considerăm $g(x) = f(x) - \ell$ în teorema precedentă.

5 Integrala improprie de al doilea tip.

Definiția 15 Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție integrabilă Riemann pe intervale compacte de tipul $[a, c]$, pentru orice $a < c < b$ și care satisface $\lim_{x \nearrow b} f(x) = \infty$. Integrala $\int_a^b f(x) dx$ se numește **integrala improprie de al doilea tip**.

Dacă $\lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x) dx$ există și este finită vom spune că integrala improprie $\int_a^b f(x) dx$ este (C) și vom scrie

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x) dx$$

Remarca 16 Punctul b de mai sus spunem că este **punct singular**.

Remarca 17 Similar putem defini $\int_a^b f(x) dx$ în cazul în care funcția $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă Riemann pe intervale compacte de tipul $[c, b]$, $\forall a < c < b$ și care satisface $\lim_{x \searrow a} f(x) = \infty$.

Teorema 18 *Integrala*

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$$

este convergentă pentru $\lambda < 1$ și divergentă pentru $\lambda \geq 1$.

Propoziția 19 *Analog se poate studia natura integralei*

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se obține că

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \begin{cases} +\infty, & \lambda \geq 1, \\ \frac{(b-a)^{-\lambda+1}}{1-\lambda}, & \lambda < 1. \end{cases}$$

Teorema 20 (Criteriul în λ) Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a, b)$. Atunci

- 1) Dacă există $\lambda < 1$ a.î. $\lim_{x \nearrow b} |x-b|^\lambda f(x) < \infty$ atunci $\int_a^b f(x) dx$ este (C).
- 2) Dacă există $\lambda \geq 1$ a.î. $\lim_{x \nearrow b} |x-b|^\lambda f(x) > 0$ atunci $\int_a^b f(x) dx$ este (D).