Facultatea de Matematică
Calcul integral, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 1 – 2

Capitolul I. Integrale improprii

1. Să se studieze natura integralei $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$.

   Rezolvare:

   Observăm că se integrează funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[0,b]$, cu $\forall\ b>0$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[0,b]\subset[0,\infty)$. Atunci, prin definiţie
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx$$
   Dar $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x$ deci
$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}(x)\big|_0^b=\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}(b)-\operatorname{arctg}(0))=\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}(b)=\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}$$
   ceea ce înseamnă că integrala improprie de primul tip $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ este convergentă şi
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

2. Să se studieze natura integralei $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$.

   Rezolvare:

   Observăm că se integrează funcţia $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[-b,0]$, cu $\forall\ b>0$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[-b,0]\subset(-\infty,0]$. Atunci, prin definiţie
$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$$
   Deci
$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}(x)\big|_{-b}^0=\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}(0)-\operatorname{arctg}(-b))=\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}(b)=\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}$$
   ceea ce înseamnă că integrala improprie de primul tip $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$ este convergentă şi
$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

3. Să se studieze natura integralei $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$.

   Rezolvare:

   Prin definiţie
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$
   Deci integrala improprie de primul tip $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ este convergentă şi
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx=\pi$$

4. Fie $a > 0$. Integrala
$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$
este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcţia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[a, b]$, cu $\forall\ b > a$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[a, b] \subset [a, \infty)$. Atunci, prin definiţie
$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-\alpha} dx$$
Dar
$$\int x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha \neq 1 \\ \ln x, & \alpha = 1 \end{cases}$$
deci, pentru $\alpha = 1$,
$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-1} dx = \lim_{b\to\infty} \ln x|_a^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln a) = \infty - \ln a = \infty$$
şi pentru $\alpha \neq 1$,
$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-\alpha} dx &= \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_a^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\lim_{b\to\infty} b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\infty^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) \end{aligned}$$
Dacă avem $\alpha > 1$ atunci $\alpha - 1 > 0$ deci $\infty^{1-\alpha} = \frac{1}{\infty^{\alpha-1}} = \frac{1}{\infty} = 0$, iar dacă avem $\alpha < 1$ atunci $1 - \alpha > 0$ deci $\infty^{1-\alpha} = \infty$.

Integrala iniţială este atunci
$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty} \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_a^b, & \alpha \neq 1 \\ \lim\limits_{b\to\infty} \ln x|_a^b, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$
deci $\int_a^\infty \dfrac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}$ deci este (C) pentru $\alpha > 1$ şi (D) pentru $\alpha \leq 1$.

5. Studiaţi, folosind definiţia, convergenţa următoarelor integrale improprii de specia I:
$$(a) \int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}\ , \quad (b) \int_1^\infty \frac{e^x dx}{e^x - 1}\ , \quad (c) \int_0^\infty e^{-2x} \sin 3x\ dx\ , \quad (d) \int_0^\infty e^{-3x} \cos 4x\ dx,$$
$$(e) \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2}\ , \quad (f) \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin(\beta x)\ dx\ , \quad \alpha > 0, \quad (g) \int_0^\infty x e^{-x^2} dx\ .$$

Rezolvare:

(a)
$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^{3/2}} dx = (\text{subst. } \ln x = y) = \int_1^\infty y^{-3/2} dy = \left.\frac{y^{-1/2}}{-1/2}\right|_{y=1}^{y=\infty} = -2 \left.\frac{1}{\sqrt{y}}\right|_{y=1}^{y=\infty} = 2.$$
(b)
$$\int_1^\infty \frac{e^x}{e^x - 1} dx = (\text{subst. } e^x = y) = \int_e^\infty \frac{1}{y-1} dy = \ln|y-1|\ |_{y=e}^{y=\infty} = \ln(+\infty) - \ln|e-1| = +\infty.$$

(c) aplicăm de două ori metoda de integrare prin părţi pentru a calcula primitiva

$$F(x) = \int e^{-2x} \sin 3x \; dx = \frac{-1}{2} e^{-2x} \sin 3x + \frac{3}{-4} e^{-2x} \cos 3x - \frac{3}{2}\frac{3}{2} F(x)$$
$$\Leftrightarrow F(x) = \frac{13}{4} \left(\frac{-1}{2} e^{-2x} \sin 3x + \frac{3}{-4} e^{-2x} \cos 3x \right)$$
$$\Leftrightarrow F(x) = -\frac{2\sin 3x + 3\cos 3x}{2^2 + 3^2} \cdot e^{-2x}.$$

Deci

$$\int_0^\infty e^{-2x} \sin 3x \; dx = -F(x)\big|_{x=0}^{x=+\infty} = F(+\infty) - F(0).$$

Dar $F(0) = -\frac{3}{2^2+3^2}$ iar

$$F(+\infty) \overset{def}{=} \lim_{x\to+\infty} (-) \frac{2\sin 3x + 3\cos 3x}{2^2+3^2} \cdot e^{-2x} = 0$$

deoarece

$$\left| -\frac{2\sin 3x + 3\cos 3x}{2^2+3^2} \right| = \left| \frac{2\sin 3x + 3\cos 3x}{2^2+3^2} \right| \le \frac{|2\sin 3x| + |3\cos 3x|}{|2^2+3^2|} \le \frac{2+3}{2^2+3^2}$$

(adică este mărginit) iar

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = e^{-\infty} = 0$$

Am folosit rezultatul:

Lema 1 *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ unde I este un interval. Presupunem că $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ şi $|g(x)| \le M$, $\forall x \in I$. Atunci*

$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

(adică produsul dintre o cantitate care tinde la zero şi o cantitate mărginită este o cantitate care tinde la zero).

Prin urmare

$$\int_0^\infty e^{-2x} \sin 3x \; dx = F(+\infty) - F(0) = \frac{3}{2^2+3^2}\ .$$

(f) Observăm că se integrează funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\alpha x}\sin(\beta x)$ care este continuă pe orice interval de tipul $[0,b]$, cu $\forall\, b > 0$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[0,b] \subset [0,\infty)$. Atunci, prin definiţie

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin(\beta x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-\alpha x} \sin(\beta x)\, dx$$

Dar pentru calculul integralei $\int_0^b e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\, dx$ (vezi metoda de integrare prin părţi):

$$\int e^{-\alpha x} \sin(\beta x)\, dx = -\frac{\alpha \sin(\beta x) + \beta\cos(\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} \cdot e^{-\alpha x}$$

adică primitiva $F(x) = -\frac{\alpha\sin(\beta x)+\beta\cos(\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} \cdot e^{-\alpha x}$. Obţinem $F(0) = -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ şi deci

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin(\beta x)\, dx = F(\infty) - F(0) = \lim_{x\to\infty} F(x) + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Ţinând cont de faptul că funcţiile $\sin, \cos$ sunt mărginite de 1 obţinem că

$$\left| -\frac{\alpha\sin(\beta x) + \beta\cos(\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} \right| \le \frac{|\alpha\sin(\beta x)| + |\beta\cos(\beta x)|}{\alpha^2+\beta^2} \le \frac{|\alpha| + |\beta|}{\alpha^2+\beta^2}$$

şi pe de altă parte $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\alpha x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$. Dar având în vedere că produsul dintre o funcţie mărginită şi o funcţie care tinde la 0 va tinde la 0 obţinem că

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\right) \cdot e^{-\alpha x} = 0$$

deci

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin(\beta x)\, dx = F(\infty) - F(0) = 0 + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

(g)

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} e^{-x^2} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{-1}{2} e^{-\infty} + \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2}.$$

6. Să se studieze convergenţa următoarei integrale improprii

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} dx$$

Rezolvare:

Avem $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} = \frac{x^{3/2}}{1+x^2}$. Trebuie să determinăm α astfel încât să existe limita $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(x^\alpha \cdot \frac{x^{3/2}}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+3/2}}{1+x^2}$$

Având în vedere că limita este la ∞, scoatem factor forţat x la puterea cea mai mare

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+3/2}}{x^2(1/x^2+1)} = (\text{aleg } \alpha + 3/2 = 2) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x^2+1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

Deci pentru $\alpha = 1/2 \le 1$ obţin $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = 1 \in (0,\infty)$ deci $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} dx$ este (D).

7. Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2} dx$, (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} dx$, (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x(1+x^2)} dx$, (d) $\displaystyle\int_{-1}^\infty e^{-x^2-2x+3} dx$.

Rezolvare:

(a) Avem $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}$. Trebuie să determinăm α astfel încât să existe limita $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(x^\alpha \cdot \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}\right) = (\text{aleg } \alpha = 2) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Deci pentru $\alpha = 2 > 1$ obţin $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \frac{\pi}{2} \in (0,\infty)$ deci $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2} dx$ este (C).

(b) Avem $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}$. Trebuie să determinăm α astfel încât să existe limita $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(x^\alpha \cdot \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}\right) = (\text{aleg } \alpha = 1) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Deci pentru $\alpha = 1 \le 1$ obţin $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \frac{\pi}{2} \in (0,\infty)$ deci $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} dx$ este (D).

8. Studiaţi, folosind criteriul de convergenţă în α, convergenţa următoarelor integrale improprii:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+1}} dx$, (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{2x+5+\sqrt[3]{x^2+1}} dx$,

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{1+x^4}} dx$, (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3+x^6}}$.

9. Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+3}dx$, (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|}dx$,

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$, (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$.

Indicaţie: se scrie fiecare integrală ca sumă de alte două integrale. Eventual se poate folosi şi paritatea funcţiei de sub integrală şi faptul că $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx \text{ , } f \text{ este funcţie pară} \\ 0 \text{ , } f \text{ este funcţie impară} \end{cases}$

10. Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii (calculându-le, eventual, în prealabil):

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$, (b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx$, (c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$,

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{(1+x^3)^2}$, (e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$, (f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Rezolvare:

(a) Mai întâi,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1-x+x^2} \Leftrightarrow 1 = (a+b)\,x^2 + (-a+b+c)\,x + (a+c) \\ &\Leftrightarrow a = 1/3,\ b = -1/3,\ c = 2/3 \end{aligned}$$

şi deci

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}dx + \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{1-x+x^2}dx = \frac{1}{3}\ln|1+x| + \frac{1}{3}\int \frac{1}{-2}\frac{2x-4}{1-x+x^2}dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|1+x| + \frac{1}{3}\,\frac{1}{-2}\int \frac{2x-1-3}{1-x+x^2}dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\int \frac{\left(1-x+x^2\right)'}{1-x+x^2}dx - \frac{1}{6}\int \frac{-3}{1-x+x^2}dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln\left|1-x+x^2\right| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx = \\ &= \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln\left|1-x+x^2\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} + C \\ &= \frac{1}{6}\left(2\ln|1+x| - \ln\left|1-x+x^2\right|\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} + C \\ &= \frac{1}{6}\ln\frac{|1+x|^2}{|1-x+x^2|} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} + C \ . \end{aligned}$$

Integrala improprie este atunci

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\Big|_{x=0}^{x=\infty}$$
$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{3}\ln\frac{0^2+0+1}{0^2-0x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to\infty}\text{arctg}\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{0-1/2}{\sqrt{3}/2}$$
$$= \frac{1}{3}\ln 1 - \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,(\infty) - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\ .$$

(b) Calculăm mai întâi primitiva

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx = \int x^{-3}\ln x dx = \int\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)'\ln x dx = \frac{x^{-2}}{-2}\ln x - \int\frac{x^{-2}}{-2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^{-2}}{-2}\ln x + \frac{1}{2}\int x^{-3}dx$$
$$= \frac{1}{-2}\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{x^{-2}}{-2} + C.$$

Integrala improprie este atunci

$$\int_1^\infty\frac{\ln x}{x^3}dx = \frac{-1}{2}\frac{\ln x}{x^2}\Big|_{x=1}^{x=\infty} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2}\Big|_{x=1}^{x=\infty}$$
$$= \frac{-1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2} - \frac{-1}{2}\frac{\ln 1}{1^2} - \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1^2} = \frac{1}{4}\ .$$

deoarece

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2} = (\text{L'Hospital}) = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x} = 0.$$

(c) Calculăm mai întâi primitiva făcând substituţia

$$x = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2tdt$$

(vezi Integrale din funcţii iraţionale):

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = \int\frac{t}{(1+t^2)^2}2tdt.$$

Dar

$$\frac{t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}(1+t^2)^{-2}(1+t^2)' = \frac{1}{2}\left(\frac{(1+t^2)^{-1}}{-1}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)'$$

deci

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = 2\int t\left(\frac{-1}{2}\frac{1}{1+t^2}\right)'dt = 2t\left(\frac{-1}{2}\frac{1}{1+t^2}\right) - 2\int 1\left(\frac{-1}{2}\frac{1}{1+t^2}\right)dt = -\frac{t}{1+t^2} + \text{arctg}t + C$$
$$= -\frac{\sqrt{x}}{1+x} + \text{arctg}\sqrt{x} + C.$$

Integrala improprie este atunci

$$\int_1^\infty\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = -\frac{\sqrt{x}}{1+x}\Big|_{x=1}^{x=\infty} + \text{arctg}\sqrt{x}\Big|_{x=1}^{x=\infty}$$
$$= -\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x} + \frac{\sqrt{1}}{1+1} + \lim_{x\to\infty}\text{arctg}\sqrt{x} - \text{arctg}\sqrt{1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

(d) Observăm mai întâi că

$$\frac{x^2}{\left(1+x^3\right)^2}=\frac{1}{3}\frac{\left(1+x^3\right)'}{\left(1+x^3\right)^2}=\frac{1}{3}\left(1+x^3\right)^{-2}\left(1+x^3\right)'=\frac{1}{3}\left(\frac{\left(1+x^3\right)^{-1}}{-1}\right)'=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x^3}\right)'$$

deci

$$\int\frac{x^3}{\left(1+x^3\right)^2}dx=\int x\frac{x^2}{\left(1+x^3\right)^2}dx=\int x\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{1+x^3}\right)'dx=x\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{1+x^3}\right)-\int 1\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{1+x^3}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{3}\frac{x}{1+x^3}+\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x^3}dx$$

Integrala improprie este atunci (vezi şi punctul a))

$$\int_0^\infty\frac{x^3dx}{\left(1+x^3\right)^2}=-\frac{1}{3}\frac{x}{1+x^3}\Big|_{x=0}^{x=\infty}+\frac{1}{3}\int_0^\infty\frac{1}{1+x^3}dx$$
$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^3}+\frac{1}{3}\frac{0}{1+0^3}+\frac{1}{3}\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

(e) Observăm mai întâi că

$$\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-2}\left(1+x^2\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(1+x^2\right)^{-1}}{-1}\right)'=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'$$

deci

$$\int\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int\ln x\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\right)'dx=\ln x\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\right)-\int\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx.$$

Pentru a calcula integrala $\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx$, trebuie sa descompunem fracţia în fracţii simple:

$$\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{1+x^2}\Leftrightarrow a=1,\ b=-1,\ c=0.$$

Deci

$$\int\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{-x}{1+x^2}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)+C$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln x^2-\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)+C=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$$

Integrala improprie este atunci

$$\int_1^\infty\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}\Big|_{x=1}^{x=\infty}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_{x=1}^{x=\infty}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{\ln 1}{1+1^2}+\frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{4}\ln\frac{1^2}{1+1^2}=-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\ln 2,$$

deoarece

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}=(\text{L'Hospital})=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x}=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2}{1+x^2}=\ln\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\ln 1=0.$$

11. Arătaţi că următoarele integrale improprii sunt divergente:

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \cos x\, dx\ ,\quad (b)\ \int_0^{+\infty} \sin x\, dx\ ,\quad (c)\ \int_0^{+\infty} x \sin x\, dx\ .$$

Rezolvare:

(b) Observăm că se integrează funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ care este continuă pe orice interval de tipul $[0, b]$, cu $\forall\ b > 0$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[0, b] \subset [0, \infty)$. Atunci, prin definiţie

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \sin x dx = \lim_{b\to\infty} (-\cos b + \cos 0) = 1 - \lim_{b\to\infty} \cos b = 1 - \cos\infty$$

Dar $\cos\infty$ nu există (funcţiile periodice nu au limită la ∞) deci $\int_0^{\infty} \sin x dx$ nu există adică

$$\int_0^{\infty} \sin x dx \text{ este divergentă.}$$

12. Studiaţi convergenţa integralelor

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx,\ \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}} dx\ ,\quad a > 0,\ \alpha > 0.$$

Rezolvare:

Integralele sunt (C) deoarece putem aplica Criteriul lui Dirichlet funcţiilor $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Într-adevăr avem $f(x) = \sin x$ integrabilă pe orice $[a, b]$ şi

$$\left| \int_a^{b} \sin x dx \right| = |-\cos b + \cos a| \le 2,\ \forall\ a < b < \infty.$$

Evident $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ este descrescătoare $(\alpha > 0)$ şi

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

În particular se obţine convergenţa integralelor

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,\ \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

(am putut extinde la cazul $a = 0$ deoarece limita în 0 este finită, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

13. Să se studieze natura integralei $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcţia $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[0, c]$, cu $\forall\ 0 < c < 1$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[0, c] \subset [0, 1)$. Atunci, prin definiţie

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{c\nearrow 1} \int_0^{c} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{c\nearrow 1} \arcsin x|_0^c = \lim_{c\nearrow 1} (\arcsin c - \arcsin 0) \\ &= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \pi/2\end{aligned}$$

Deci integrala improprie $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ este (C).

14. Să se studieze natura integralei $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

    Rezolvare:

    Observăm că se integrează funcţia $f : (-1, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (deci punctul singular este -1).

15. Să se studieze natura integralei $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

    Rezolvare:

    Observăm că se integrează funcţia $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (deci punctele singulare sunt ± 1).

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cdots\cdots$$

16. Integrala

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$$

este convergentă pentru $\lambda < 1$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 1$.

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcţia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\lambda}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[a, c]$, cu $\forall\ a < c < b$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[a, c] \subset [a, b)$. Atunci, prin definiţie

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{c \to b} \int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{c \to b} \int_a^c (b-x)^{-\lambda} dx$$

Dar

$$\int (b-x)^{-\lambda} dx = \begin{cases} -\dfrac{(b-x)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}, & \lambda \neq 1 \\ -\ln(b-x), & \lambda = 1 \end{cases}$$

deci, pentru $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{c \to b} \int_a^c (b-x)^{-1} dx &= -\lim_{c \to b} \ln(b-x)\big|_a^c = \lim_{c \to b} \left(-\ln(b-c) + \ln(b-a)\right) = \\ &= -\ln 0_+ + \ln(b-a) = -(-\infty) + \ln(b-a) = \infty \end{aligned}$$

şi pentru $\lambda \neq 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{c \to b} \int_a^c (b-x)^{-\lambda} dx &= -\lim_{c \to b} \left.\frac{(b-x)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right|_a^c = \lim_{c \to b} \left(\frac{(b-c)^{-\lambda+1}}{\lambda-1} - \frac{(b-a)^{-\lambda+1}}{\lambda-1}\right) \\ &= \left(\frac{0_+^{-\lambda+1}}{\lambda-1} - \frac{(b-a)^{-\lambda+1}}{\lambda-1}\right) \end{aligned}$$

Dacă avem $\lambda > 1$ atunci $\lambda - 1 > 0$ deci $0_+^{-\lambda+1} = \frac{1}{0_+^{\lambda-1}} = \frac{1}{0_+} = +\infty$, iar dacă avem $\lambda < 1$ atunci $1 - \lambda > 0$ deci $0_+^{-\lambda+1} = 0$.

Integrala iniţială este atunci

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \begin{cases} \lim\limits_{c \to b} -\left.\dfrac{(b-x)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right|_a^c, & \lambda \neq 1 \\ \lim\limits_{c \to b} -\ln(b-x)\big|_a^c, & \lambda = 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & \lambda \geq 1, \\ -\dfrac{(b-a)^{-\lambda+1}}{\lambda-1}, & \lambda < 1. \end{cases}$$

deci $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}$ este (C) pentru $\lambda < 1$ şi (D) pentru $\lambda \geq 1$.

17. Analog se poate studia natura integralei

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}\ , \lambda \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcţia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\lambda}$ care este continuă deci integrabilă pe orice interval compact $[a, c] \subset (a, b]$. Se obţine că

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \begin{cases} +\infty\ , & \lambda \geq 1, \\ \dfrac{(b-a)^{-\lambda+1}}{1-\lambda}\ , & \lambda < 1. \end{cases}$$

18. Să se studieze natura integralei $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

Rezolvare:

Observăm că se integrează funcţia $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ care este (continuă deci) integrabilă pe orice interval compact $[0, c] \subset [0, 1)$. Trebuie să determinăm λ astfel încât să existe limita $\lim\limits_{x\nearrow 1} |x-1|^\lambda f(x)$. Deoarece $x \in [0, 1)$ avem că $x < 1 \Rightarrow |x-1|^\lambda = (1-x)^\lambda$, deci

$$\lim_{x\nearrow 1} |x-1|^\lambda f(x) = \lim_{x\nearrow 1} \frac{(1-x)^\lambda}{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \lim_{x\nearrow 1} \frac{(1-x)^\lambda}{(1-x)^{1/4}\sqrt[4]{(1+x)(1+x^2)}}$$

Aleg $\lambda = 1/4$ şi obţin

$$\lim_{x\nearrow 1} |x-1|^\lambda f(x) = \lim_{x\nearrow 1} \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \in (0, \infty)$$

Deci pentru $\lambda = 1/4 < 1$, $\lim\limits_{x\nearrow 1} |x-1|^\lambda f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4}} \in (0, \infty)$ adică integrala este (C).

19. Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-x)\,dx$, (b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{4-x^2}$, (c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(3-x)^2(x-2)}}$,

(d) $\displaystyle\int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, (e) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^4(x^4+x^2+1)}}$, (f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$,

(g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1-x^2}$, (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$, (i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{5x+1}{x^3-x-6}dx$, (j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

Rezolvare:

(a) Calculăm mai întâi primitiva

$$\begin{aligned} \int \ln(1-x)\,dx &= x\ln(1-x) - x - \ln(1-x) + C \\ &= -(1-x)\ln(1-x) - x + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(1-x)\,dx &= \left[-(1-x)\ln(1-x)-x\right]\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= -\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)\ln(1-x) + 1\ln 1 - 1 + 0 = (\text{notând } 1-x=y) \\
&= -\lim_{y\to 0_+} y\ln y - 1 = (\text{notând } \frac{1}{y}=z) = \lim_{z\to\infty}\frac{\ln z}{z} - 1 = 0-1.
\end{aligned}$$

(b)

$$\int_1^3 \frac{dx}{4-x^2} = \int_1^3 \frac{dx}{(2-x)(2+x)} = \int_1^2 \frac{dx}{4-x^2} + \int_2^3 \frac{dx}{4-x^2} = \cdots$$

(c)

$$\int_2^3 \frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(3-x)^2(x-2)}} = \int_2^{5/2} \frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(3-x)^2(x-2)}} + \int_{5/2}^3 \frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(3-x)^2(x-2)}} = \cdots$$

(d) Facem substituţia

$$x - \frac{a+b}{2} = y \Leftrightarrow x = y + \frac{a+b}{2} \Rightarrow dx = dy$$

şi obţinem

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{y+\frac{a+b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}}dy = \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}}dy + \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}}dy \\
&= \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} (-)\frac{\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2\right)'}{2\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}}dy + \frac{a+b}{2}\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}}dy \\
&= -\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}\,\Bigg|_{x=\frac{a-b}{2}}^{x=\frac{b-a}{2}} + \frac{a+b}{2}\arcsin\frac{y}{\frac{b-a}{2}}\Bigg|_{x=\frac{a-b}{2}}^{x=\frac{b-a}{2}} = \cdots
\end{aligned}$$

(e) vom lua $\lambda = 4/3$.

(f) vom lua $\lambda = 1/2$.

(g)

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = -\int \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

Acum

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{dx}{1-x^2} &= \int_1^2 \frac{dx}{1-x^2} + \int_2^\infty \frac{dx}{1-x^2} \\
&= (-)\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-1}{2+1}\right| - \lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}}(-)\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a-1}{a+1}\right| + \lim_{c\to\infty}(-)\frac{1}{2}\ln\left|\frac{c-1}{c+1}\right| - (-)\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-1}{2+1}\right| \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}}\ln\left|\frac{a-1}{a+1}\right| + \lim_{c\to\infty}(-)\frac{1}{2}\ln 1 = \cdots
\end{aligned}$$

(i) Calculăm mai întâi primitiva

$$\int \frac{5x+1}{x^3-x-6}dx = \int \frac{5x+1}{(x-2)(x^2+2x+3)}dx = \text{desc. în fracţii simple} = \cdots$$

Deci

$$\int_1^\infty \frac{5x+1}{x^3-x-6}dx = \cdots$$

20. Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii:

$(a)\ \int_1^\infty (\pi - 2\mathrm{arctg}\,(x))\,dx\ ,\quad (b)\ \int_1^\infty \frac{x+\cos x}{x^3+\sin x}dx\ ,\quad (c)\ \int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx\ ,$

$(d)\ \int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\beta}dx\ ,\ \beta\in\mathbb{R}\ ,\quad (e)\ \int_1^2 \frac{1}{x(\ln x)^\beta}dx\ ,\ \beta\in\mathbb{R}\ ,\quad (f)\ \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx\ ,$

$(g)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}dx,\quad (h)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}\ ,\quad (i)\ \int_0^{\pi/2} \mathrm{ctg} x\,dx\ ,$

$(j)\ \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}},\quad (k)\ \int_0^\infty x^{-2}\sin\left(x^5\right)dx\ ,\quad (l)\ \int_0^1 \sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}dx\ .$

Rezolvare:

(a) Avem $f(x) = \pi - 2\mathrm{arctg}\,(x)$. Trebuie să determinăm α astfel încât să existe limita $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(x^\alpha\cdot(\pi-2\mathrm{arctg}\,(x))\right) = (\text{nedeterm. } \infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2\mathrm{arctg}\,(x)}{\frac{1}{x^\alpha}}\\ &= (\text{aleg } \alpha=1 \text{ şi aplic L'Hospital}) = \lim_{x\to\infty}\frac{0-2\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{1+x^2} = 2.\end{aligned}$$

Deci pentru $\alpha = 1 \le 1$ obţin $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = 2 \in (0,\infty)$ deci $\int_1^\infty (\pi - 2\mathrm{arctg}\,(x))\,dx$ este (D).

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) &= \lim_{x\to\infty} x^\alpha\cdot\frac{x+\cos x}{x^3+\sin x} = (\text{aleg } \alpha=2) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2\cos x}{x^3+\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{\sin x}{x^3}\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x^3}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.\end{aligned}$$

Am folosit că

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x} = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^3} = 0,$$

(c)

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to\infty} x^\alpha\cdot\frac{\ln x}{x} = (\text{aleg } \alpha=1) = \lim_{x\to\infty}\ln x = +\infty > 0$$

deci limita este > 0 iar $\alpha \le 1$, prin urmare integrala este divergentă (Conform *Criteriului în* α).

(d) Calculăm primitiva

$$\begin{aligned}&\int\frac{1}{x(\ln x)^\beta}dx = \int(\ln x)^{-\beta}(\ln x)'\,dx = (\text{pp. } \beta\neq 1 \text{ şi fac subst. } \ln x = t)\\ &\int t^{-\beta}dt = \frac{t^{-\beta+1}}{-\beta+1}+C = \frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}+C.\end{aligned}$$

Dacă $\beta = 1$, atunci

$$\int\frac{1}{x\ln x}dx = \int\frac{1}{\ln x}(\ln x)'\,dx = (\text{subst. } \ln x = t) = \int\frac{1}{t}dt = \ln t + C = \ln|\ln x| + C.$$

Prin urmare, pentru $\beta \neq 1$,

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\beta}dx &= \frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\Big|_{x=2}^{x=\infty} = \frac{1}{1-\beta}\left(\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{-\beta+1} - (\ln 2)^{-\beta+1}\right)\\ &= \frac{1}{1-\beta}\left((\ln(+\infty))^{-\beta+1} - (\ln 2)^{-\beta+1}\right)\\ &= \begin{cases}\frac{1}{1-\beta}\left(+\infty - (\ln 2)^{-\beta+1}\right) = +\infty, & \text{dacă } \beta<1,\\ \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(+\infty)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}\right) = \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}\ , & \text{dacă } \beta>1.\end{cases},\end{aligned}$$

Pentru $\beta = 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\ln x}dx = \ln|\ln x|\ \Big|_{x=1}^{x=\infty} = \lim_{x\to\infty}\ln|\ln x| - \ln|\ln 1| = \ln\ln(+\infty) - \ln 0_+ = \ln(+\infty) - (-\infty) = +\infty.$$

(l) Vom lua $\lambda = \dfrac{1}{2}$ şi, notând cu $\frac{1}{x} = y$, avem $\lim_{x\to 0_+} x^\lambda \sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to\infty}\sqrt{\frac{\ln y}{y}} = 0$.

21. Studiaţi, folosind criteriul de convergenţă în λ, convergenţa următoarelor integrale improprii:

$(a)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}dx\ ,\quad (b)\ \int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}dx\ ,\quad (c)\ \int_0^1 \frac{1}{x^3-5x^2}dx\ ,$

$(d)\ \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx\ ,\quad (e)\ \int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt[5]{(3-x)^2(x-2)}}dx\ ,\quad (f)\ \int_2^5 \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^4(x^4+x^2+1)}}dx$

$(g)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx\ ,\quad (h)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}\ ,\ \alpha>0\ ,\quad (i)\ \int_1^e \frac{1}{x(\ln x)^{3/2}}dx.$

22. Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii:

$(a)\ \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{7+6\cos x-2\sin x}dx\ ,\quad (b)\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\ ,\quad (c)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x^2}}\ ,$

$(d)\ \displaystyle\int_a^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\ ,\quad (e)\ \int_a^b \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}dx\ ,\quad (f)\ \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx\ ,\quad a<b,$

$(g)\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+4}$

Rezolvare:

(a) Folosim substituţia $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right) = t$ şi formulele $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ şi $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Deci

$$I = \int_0^\infty \frac{4tdt}{(t^2+1)(t^2-4t+13)} = \cdots$$

(b) Folosim substituţia $\operatorname{tg}(x) = t$ şi formulele $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ şi $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Deci

$$I = \int_0^\infty \frac{dt}{a^2t^2+b^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\frac{b}{a}}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\frac{b}{a}}\right)\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\pi}{2ab}\,.$$

(c) $x = \sin t$

(d) $\lambda = 1/2$ şi $\lambda = 1/2$

(e) Folosim substituţia $\sqrt{\frac{b-x}{x-a}} = t$

$$I = \int_0^\infty \frac{2\left(b-a\right)t^2}{\left(t^2+1\right)^2} dt = \cdots$$

(f) Folosim substituţia

$$x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$$

cu

$$dx = \left(-2a\cos t\sin t + 2b\sin t\cos t\right)dt = \left(b-a\right)\sin\left(2t\right)dt.$$

Obţinem

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\left(b-a\right)\sin^2 t}{\left(b-a\right)\cos^2 t}}\left(b-a\right)\sin\left(2t\right)dt \\
&= 2\left(b-a\right)\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t}\sin t\cos t dt = 2\left(b-a\right)\int_0^{\pi/2}\sin^2 t dt = \left(b-a\right)\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos\left(2t\right)\right)dt \\
&= \left(b-a\right)\left(t\Big|_{t=0}^{t=\pi/2} - \frac{\sin\left(2t\right)}{2}\Big|_{t=0}^{t=\pi/2}\right) = \left(b-a\right)\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(g) Folosim substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, dar $x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in [0, \pi]$, iar tangenta nu este definită în $\pi/2$. Deci

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 4} &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 4} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 4} \\
&= \int_0^\infty \frac{2dt}{t^2 + 4t + 7} + \int_{-\infty}^0 \frac{2dt}{t^2+4t+7} = \cdots
\end{aligned}$$

23. Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin\left(x+1\right)dx$, (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin\left(x^5\right)}{x^2}dx$, (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xdx}{1+[x]^2}$,

(d) $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{1}{x}\right]dx$, (e) $\displaystyle\int_0^1 [\ln x]\,dx$.