Facultatea de Matematică
Calcul integral şi Elemente de Analiză Complexă, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 13 – 14

Capitolul VII. Numere complexe

1. Să se calculeze
$$z = 1 + i + i^2 + \ldots + i^{2016}.$$
Rezolvare:

Avem
$$z = \frac{1 - i^{2017}}{1 - i} = \frac{1 - \left(i^4\right)^{504} \cdot i}{1 - i} = \frac{1 - i}{1 - i} = 1.$$

2. Să se calculeze
$$z = \frac{1 + i}{1 - i}\,.$$
Rezolvare:

Avem
$$z = (1 + i) \cdot \frac{1}{1 - i}\,.$$
Mai întâi calculăm inversul unui număr complex, utilizând forma lui algebrică.
Deci
$$\frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{(1 - i)\,(1 + i)} = \frac{1 + i}{1 - i^2} = \frac{1}{2}\,(1 + i)$$
şi
$$z = (1 + i) \cdot \frac{1}{2}\,(1 + i) = \frac{1}{2}\,(1 + i)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + 2i + i^2\right) = i\,.$$

3. Fie $z_1 = 2 + 3i$ şi $z_2 = -3 + i$. Să se calculeze $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^2$, $z_1 \bar{z}_1$, $\bar{z}_1 z_1$, $|z_1 - 2z_2|^2$.
Rezolvare:

4. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Să se arate că:
(a) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, (b) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, (c) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_1|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.
Rezolvare:

5. Reprezentaţi grafic numerele complexe $a, b, a + b, a - b, a - i$ şi $a + i$, unde $a = -2 + 2i$ şi $b = 1 + 3i$.

6. Care este semnificaţia geometrică a cantităţii $|z_1|$ şi $|z_1 - z_2|$?

7. Să se discute validitatea egalităţii
$$\arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),$$
unde $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
Rezolvare:

Argumentul redus al numărului complex z este acel unic număr $\theta = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ astfel încât
$$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\,, \quad \sin\theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}\,, \tag{1}$$

deci

$$\operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(\arg(z)) = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Obţinem că θ este soluţia ecuaţiei (2) care corespunde cadranului în care este situată imaginea geometrică a numărului complex z şi astfel încât $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Deci

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{dacă } x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{dacă } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{dacă } x = 0, y < 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{dacă } x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{dacă } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

De fapt se poate folosi cercul trigonometric şi observăm că avem patru variante, în funcţie situarea numărului complex z într-unul dintre cele patru cadrane; astfel unghiul poate fi α, $\pi - \alpha$, $-\pi + \alpha$ şi respectiv $-\alpha$.

8. Să se discute validitatea egalităţii

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Rezolvare:

Să notăm $z_k = |z_k|(\cos\theta_k + i\,\sin\theta_k)$, cu $\theta_k = \arg(z_k)$, unde $k = \overline{1,2}$.

Deci, pe de o parte

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2|\left(\cos(\arg(z_1 z_2)) + i\,\sin(\arg(z_1 z_2))\right)$$

iar pe de altă parte

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1 z_2|(\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2) \\ &= |z_1 z_2|\left([\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)] + i\,[\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2)]\right) \\ &= |z_1 z_2|\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\sin(\theta_1 + \theta_2)\right). \end{aligned}$$

Obţinem

$$\begin{cases} \cos(\arg(z_1 z_2)) = \cos(\arg(z_1) + \arg(z_2)), \\ \sin(\arg(z_1 z_2)) = \sin(\arg(z_1) + \arg(z_2)), \end{cases}$$

deci relaţia de legătură este

$$\arg(z_1 z_2) - \arg(z_1) - \arg(z_2) \in \{0, \pm 2\pi\}, \tag{3}$$

deoarece $\arg(z_1), \arg(z_2) \in (-\pi, \pi]$, deci $\arg(z_1) + \arg(z_2) \in (-2\pi, 2\pi]$.

În concluzie egalitatea

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

are loc dacă şi numai dacă

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) \in (-\pi, \pi].$$

9. Să se determine modulul şi argumentul redus al numerelor complexe:

(a) $z = 1 + 2i$, (b) $z = -2(\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5))$, (c) $z = 2(\cos(\pi/5) - i\sin(\pi/5))$,

(d) $z = -2(\cos(\pi/5) - i\sin(\pi/5))$, (e) $z = -1 + i$, (f) $z = \sqrt{3} + i$.

Rezolvare:

Fie numărul complex $z \in \mathbb{C}$.

- **Forma algebrică** a numărului complex z este

$$z = x + i\,y,$$

unde $x = \mathrm{Re}\,(z) \in \mathbb{R}$ este partea reală a lui z iar $y = \mathrm{Im}\,(z) \in \mathbb{R}$ este partea imaginară a lui z;

- **Forma trigonometrică** a numărului complex z este

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\,,$$

unde $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ este modulul lui z iar θ este argumentul principal al numărului complex z, adică acel unic număr $\theta = \arg(z) \in (-\pi,\pi]$ astfel încât are loc (1).

(a) Avem că

$$z = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + i\,\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\,,$$

unde $\theta \in (-\pi,\pi]$ este acel unicul număr dat de (1), adică

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}\,,\quad \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Mai precis, deoarece z este în cadrul I, obţinem că $\theta = \mathrm{arctg}\,(2) \in (0,\pi/2)\,.$ Deci

$$z = \sqrt{5}\,(\cos(\mathrm{arctg}\,(2)) + i\,\sin(\mathrm{arctg}\,(2)))\,.$$

(b) Avem că

$$z = 2\,(-\cos(\pi/5) - i\sin(\pi/5)) = 2\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\,,$$

unde $\theta \in (-\pi,\pi]$ este acel unicul număr astfel încât

$$\cos\theta = -\cos(\pi/5)\,,\quad \sin\theta = -\sin(\pi/5)\,.$$

Mai precis, deoarece z este în cadrul III, obţinem* că $\theta = -\pi + \pi/5 \in (-\pi,-\pi/2)\,.$ Deci

$$z = 2\,(\cos(-4\pi/5) + i\,\sin(-4\pi/5))\,.$$

(c) Avem că

$$z = 2\,(\cos(\pi/5) - i\sin(\pi/5)) = 2\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\,,$$

unde $\theta \in (-\pi,\pi]$ este acel unicul număr astfel încât

$$\cos\theta = \cos(\pi/5)\,,\quad \sin\theta = -\sin(\pi/5)\,.$$

Mai precis, deoarece z este în cadrul II, obţinem** că $\theta = -\pi/5 \in (-\pi/2,0)\,.$ Deci

$$z = 2\,(\cos(-\pi/5) + i\,\sin(-\pi/5))\,.$$

10. Să se calculeze

$$\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{2015}.$$

Rezolvare:

Avem că

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\,,$$

*Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Deci $\cos(-\pi+\pi/5) = -\cos(\pi/5)$ iar $\sin(-\pi+\pi/5) = -\sin(\pi/5)$.

**Într-adevăr,

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,\quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

unde $\theta \in (-\pi, \pi]$ este astfel încât

$$\cos\theta = \frac{-1}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Mai precis, deoarece z este în cadrul II, obţinem că $\theta = \pi - \pi/3 \in (\pi/2, \pi)$. Deci

$$z = 2\left(\cos(2\pi/3) + i\,\sin(2\pi/3)\right).$$

Conform formulei lui Moivre,

$$z^{2015} = 2^{2015}\left(\cos(2015\cdot 2\pi/3) + i\,\sin(2015\cdot 2\pi/3)\right).$$

Dar

$$\begin{aligned}
\cos\left(2015\cdot\frac{2\pi}{3}\right) &= \cos\left(671\cdot 2\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\pi + \frac{\pi}{3}\right)\\
\sin\left(2015\cdot\frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\pi + \frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Deci

$$z^{2015} = 2^{2015}\left(\cos(-2\pi/3) + i\,\sin(-2\pi/3)\right),$$

adică

$$\left|z^{2015}\right| = |z|^{2015} = 2^{2015}$$

iar

$$\arg(z) = -2\pi/3.$$

11. Să se calculeze $\cos(3\theta)$ şi $\sin(3\theta)$ folosind formula lui Moivre.

Rezolvare:

Folosim

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta).$$

12. Să se determine rădăcinile de ordin 7 ale numărului complex a, adică numerele complexe z astfel încât

$$z^7 = a.$$

Rezolvare:

Folosim forma trigonometrică a lui a :

$$a = |a|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$

Deci

$$z^7 = |a|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right),$$

care are rădacinile*

$$z_k = |a|^{1/7}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{7} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{7}\right), \quad k = \overline{0,6}.$$

În particular, rădăcinile de ordin 7 ale unităţii sunt date de

$$z_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}\right), \quad k = \overline{0,6}.$$

*Într-adevăr, dacă $a = |a|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, atunci rădăcinile ecuaţiei

$$z^n = a$$

sunt

$$z_k = |a|^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{4}$$

13. Să se determine modulul şi argumentul redus al următoarelor numere complexe:

$(a)\ z_1 = (1-i)\left(-1-i\sqrt{3}\right)$, $\quad (b)\ z_2 = \left(-\sqrt{3}+i\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)$, $\quad (c)\ z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2(1-i)}$,

$(d)\ z_4 = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}$, $\quad (e)\ z_5 = (1-i)^2$, $\quad (f)\ z_6 = (1-i)^6$, $\quad (g)\ z_7 = (-1+i)\left(-\sqrt{3}+i\right)$.

Rezolvare:

(a) $z_1 = w_1 \cdot w_2$, unde

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

iar

$$w_2 = 2\left(\frac{-1}{2} + i\,\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\pi+\frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(-\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right).$$

Deci $|z_1| = |w_1|\cdot|w_2| = 2\sqrt{2}$ şi $\arg(w_1) = -\dfrac{\pi}{4}$ iar $\arg(w_2) = \dfrac{-2\pi}{3}$.
Obţinem*

$$\arg(w_1) + \arg(w_2) = \frac{-11\pi}{12} \in (-\pi, \pi],$$

deci $\arg(w_1 w_2) = \arg(w_1) + \arg(w_2) = \dfrac{-11\pi}{12}$.

(b) $z_2 = w_1 \cdot w_2$, unde

$$w_1 = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

iar

$$w_2 = 2\left(\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Deci $|z_2| = |w_1|\cdot|w_2| = 4$ şi $\arg(w_1) = \dfrac{5\pi}{6}$ iar $\arg(w_2) = \dfrac{2\pi}{3}$.
Obţinem

$$\arg(w_1) + \arg(w_2) = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} > \pi,$$

deci, conform relaţiei (3) de legătură,

$$\arg(w_1 w_2) = \arg(w_1) + \arg(w_2) - 2\pi = \frac{-\pi}{2}.$$

(c) $z_3 = \dfrac{w_1}{w_2}$, unde

$$w_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

iar

$$w_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right).$$

*Într-adevăr, dacă $z_k = |z_k|(\cos\theta_k + i\,\sin\theta_k)$, cu $\theta_k = \arg(z_k)$, unde $k = \overline{1,2}$, atunci

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right).$$

Să remarcăm că trebuie avută în vedere şi relaţia de legătură (3).

Deci $|z_3| = \dfrac{|w_1|}{|w_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ şi $\arg(w_1) = \dfrac{\pi}{3}$ iar $\arg(w_2) = \dfrac{-\pi}{4}$.

Obţinem*

$$\arg(w_1) - \arg(w_2) = \frac{7\pi}{12} \in (-\pi, \pi],$$

deci

$$\arg\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \arg(w_1) - \arg(w_2) = \frac{7\pi}{12}\,.$$

(d) Avem $|z_4| = \dfrac{|w_1|}{|w_2|} = \dfrac{2}{2} = 1$ şi $\arg(w_1) = \dfrac{7\pi}{6}$ iar $\arg(w_2) = \dfrac{\pi}{3}$.

Obţinem

$$\arg\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \arg(w_1) - \arg(w_2) = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \in (-\pi, \pi]\,.$$

(e) $z_5 = w_1^2$, unde $w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Deci $|z_2| = |w_1|^2 = 2$ şi

$$\arg\left(w_1^2\right) = 2\arg(w_1) = \frac{-\pi}{2} \in (-\pi, \pi]\,.$$

(f) $z_6 = w_1^6$, unde $w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Deci $|z_2| = |w_1|^6 = 8$ şi, conform relaţiei (3),

$$\arg\left(w_1^6\right) = 6\arg(w_1) + 2\pi = \frac{-3\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi]\,.$$

(g) $z_7 = w_1 \cdot w_2$, unde $w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$, $w_2 = 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$.
Deci $|z_1| = |w_1| \cdot |w_2| = 2\sqrt{2}$ şi

$$\arg(w_1 w_2) = \arg(w_1) + \arg(w_2) - 2\pi = \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} - 2\pi = \frac{-5\pi}{12} \in (-\pi, \pi]\,.$$

14. Să se determine modulul şi argumentul redus al următoarelor numere complexe:

(a) $z_1 = (1+2i)^4 + (1-2i)^4$, (b) $z_2 = (-1+i)^6\left(-\sqrt{3}+i\right)^6$,

(c) $z_3 = (4-5i)(3+2i)$, (d) $z_4 = \left(\dfrac{2+i^9}{1+i^{19}}\right)^4$.

15. Să se determine modulul şi argumentul redus al următoarelor numere complexe:

(a) $z_1 = \sqrt{-1+i}$, (b) $z_2 = \sqrt[5]{-1+i}$, (c) $z_3 = \sqrt{3-4i}$,

(d) $z_4 = \sqrt{3+4i}$, (e) $z_5 = \sqrt{4+i} + \sqrt{4-i}$, (f) $z_6 = \sqrt[5]{-i}$.

Rezolvare:

Se poate folosi scrierea trigonometrică şi relaţia (4) sau direct forma algebrică.

(a) $z_1 = (w_1)^{1/2}$, unde

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Deci

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right)\right), \quad k = \overline{0,1}\,.$$

*Într-adevăr, dacă $z_k = |z_k|\left(\cos\theta_k + i\,\sin\theta_k\right)$, cu $\theta_k = \arg(z_k)$, unde $k = \overline{1,2}$, atunci

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$

Să remarcăm că trebuie avută în vedere şi relaţia de legătură (3).

(c) Dacă $\sqrt{3-4i} = x + iy$, obţinem
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4, \end{cases}$$
deci $y^4 + 3y^2 - 4 = 0$. Obţinem soluţiile $(-2, 1), (2, -1)$.
(e) Dacă $\sqrt{4+i} + \sqrt{4-i} = x + iy$, obţinem
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 + 2\sqrt{17}, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

16. Să se arate că:
(a) $\left|e^{i\theta}\right| = 1$, (b) $e^{\pm 2\pi i} = 1$, (c) $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, (d) $e^{i(\theta \pm 2\pi)} = e^{i\theta}$.

Rezolvare:

Fie numărul complex $z \in \mathbb{C}$. Folosind formula lui Euler
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$
obţine şi **forma exponenţială** a unui număr complex
$$z = |z|\, e^{i\theta}.$$

În cazul nostru:
(a) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, deci $\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$.
(b) $e^{\pm 2\pi i} = \cos(\pm 2\pi) + i\sin(\pm 2\pi) = 1$.
(c)
$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= [\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)]\,[\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)] \\ &= [\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)] + i\,[\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2)] \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$
(d) $e^{i(\theta\pm 2\pi)} = e^{i\theta} \cdot e^{\pm 2\pi i} = e^{i\theta}$.

17. Să se calculeze sumele:
(a) $S_1 = 1 + \cos t + \cos(2t) + \ldots + \cos(nt)$, (b) $S_2 = \sin t + \sin(2t) + \ldots + \sin(nt)$.

Rezolvare:

Observăm că
$$S_1 + iS_2 = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} = \frac{[1 - \cos((n+1)\,t)] - i\sin((n+1)\,t)}{[1-\cos(t)] - i\sin(t)}$$
$$= \frac{2\sin^2\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) - 2i\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - 2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) - i\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{t}{2}\right) - i\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]}$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{(n+1)t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{(n+1)t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right]} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\left[\cos\left(\frac{nt}{2}\right) + i\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\right].$$

18. Fie $a \in \mathbb{C}$ astfel încât $\operatorname{Im}(a) > 0$. Arătaţi că
$$\operatorname{Im}(z) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right| < 1.$$

Rezolvare:

Observăm că
$$\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|z-a|^2}{|z-\bar{a}|^2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|z-a|^2 - |z-\bar{a}|^2}{|z-\bar{a}|^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-4\operatorname{Im}(z)\cdot\operatorname{Im}(a)}{|z-\bar{a}|^2} < 0.$$

19. Să se determine numerele complexe care verifică:

$(a)\ |z| = 5, \quad (b)\ |z-a| = 5, \quad a \in \mathbb{C}, \quad (c)\ |z-i| = 1, \quad (d)\ |z+i| = 1,$

$(e)\ |z-1| = 1, \quad (f)\ |z+1| = 1, \quad (g)\ \arg(z) = \pi/6,$

$(h)\ \arg(z-i) = \pi/6, \quad (i)\ \pi/6 < \arg(z) < \pi/3, \quad (j)\ \pi/6 < \arg(z-i) < \pi/3,$

$(k)\ |z-a| = |z-b|\,,$ unde $a, b \in \mathbb{C}$, $\quad (l)\ |z-2| = |z-2i|\,,$

$(m)\ 2\,|z-i| = |z-1|\,, \quad (n)\ |z-a| = \lambda\,|z-b|\,,$ unde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\,,$

$(o)\ |z-a| + |z-b| = c,$ unde $a, b \in \mathbb{C},\ c \in \mathbb{R}_+^*\,,$

$(p)\ |z-z_0| = R, \quad (r)\ |z-z_0| < R, \quad (s)\ |z-z_0| > R.$

Rezolvare:

(a) Cerc cu centrul $O(0,0)$ şi de rază $R = 5$.
(b) Cerc cu centrul $A(a_1, a_2)$ şi de rază $R = 5$.
(c) Cerc cu centrul $i = (0,1)$ şi de rază $R = 1$.
(d) Cerc cu centrul $-i = (0,-1)$ şi de rază $R = 1$.
(g) Semidreaptă din punctul $O(0,0)$ care face unghiul $\pi/6$ cu partea pozitivă a axei Ox.
(h) Semidreaptă din punctul $i = (0,1)$ care face unghiul $\pi/6$ cu partea pozitivă a axei Ox.
(i) Unghiul cu vârful în $O(0,0)$ mărginit de semidreptele $\arg(z) = \pi/6$ şi $\arg(z) = \pi/3$.
(j) Unghiul cu vârful în $i = (0,1)$ mărginit de semidreptele $\arg(z) = \pi/6$ şi $\arg(z) = \pi/3$.
(k) Dreapta mediatoare a segmentului care uneşte punctele a şi b.
(l) Prima bisectoare.
(m) Cerc cu centrul $(-1/3, 4/3)$ şi de rază $R = 2\sqrt{2}/3$.
(o) Elipsă cu focarele a şi b.

20. Să se determine numerele complexe care verifică:

$(a)\ \left|\dfrac{z}{z+2i}\right| < 1, \quad (b)\ \left|\dfrac{1-z}{1+z}\right| < 1, \quad (c)\ \left|\dfrac{2z}{1+z^2}\right| < 1.$

Rezolvare:

Se foloseşte faptul că $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

21. Să se determine numerele complexe care verifică

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{3}\,.$$

Rezolvare:

22. Să se arate că punctele $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sunt coliniare dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ 1 & z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezolvare:

Punctele z_1, z_2, z_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă punctul z_3 aparţine dreptei determinate de punctele z_1 şi z_2, adică dreptei

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = t \in \mathbb{R}.$$

Deci z_1, z_2, z_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = t_0 \in \mathbb{R}$$

ceea ce e echivalent cu

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}} = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

Dar

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ 1 & z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ 0 & z_2 - z_1 & \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \\ 0 & z_3 - z_1 & \bar{z}_3 - \bar{z}_1 \end{vmatrix} = (z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1)$$

ceea ce e echivalent cu

$$(z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1).$$

23. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $|b|^2 > ac$. Arătaţi că

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$$

reprezintă ecuaţia generală a unei drepte, dacă $a = 0$ şi respectiv ecuaţia unui cerc, de centru $\frac{-\bar{b}}{a}$ şi de rază $\frac{|b|^2 - ac}{a^2}$, dacă $a \neq 0$.

Rezolvare:

Dacă $a = 0$, atunci ecuaţia devine

$$2\operatorname{Re}(b)\ x - 2\operatorname{Im}(b)\ y + c = 0.$$

Dacă $a \neq 0$, atunci folsoim ecuaţia generală a unui cerc de centru $C(z_0)$ şi de rază R :

$$|z - z_0| = R \quad \Leftrightarrow \quad z\bar{z} - \bar{z}_0\, z - z_0\, \bar{z} + z_0^2 - R^2 = 0$$

şi identificăm coeficienţii.

24. Se consideră funcţia $f : \mathbb{C}\setminus\{-1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$. Să se determine punctele z astfel încât

(a) $f(z)$ este număr real, (b) $f(z)$ este număr pur imaginar.

Rezolvare:

Se ia $z = x + iy$ şi se determină forma algebrică a funcţiei $f(z)$.

25. Să se calculeze

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{z} - 1\right).$$

Rezolvare:

Ştim că un şir de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai şirurile date de partea reală $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ şi partea imaginară $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şiruri convergente.

În cazul nostru, folosind forma trigonometrică $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, unde $\rho = |z|$ şi $\theta = \arg(z)$, obţinem

$$\sqrt[n]{z} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right).$$

Deci

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{z} - 1\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\rho^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\theta}{n} - 1\right) + i\ \lim_{n\to+\infty} n\rho^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\theta}{n} \\ &= \ln\rho + i\,\theta = \ln|z| + i\arg(z)\ . \end{aligned}$$

26. Dacă $z = x + iy \in \mathbb{C}$, atunci şirul
$$z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$
converge la $e^x(\cos y + i \sin y)$.

Rezolvare:

Într-adevăr,
$$z_n = |z_n|(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$
iar pentru convergenţă este echivalent să studiem convergenţa şirului modulelor şi a şirului argumentelor.

Avem
$$|z_n| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{n/2} \to e^x, \quad n \to +\infty$$
şi, pentru n suficient de mare,
$$\arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \operatorname{arctg}\frac{y}{n+x},$$
deci
$$\theta_n = n \operatorname{arctg}\frac{y}{n+x} \to y, \quad n \to +\infty.$$
Obţinem, folosind continuitatea funcţiilor $\sin$ şi $\cos$,
$$z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to e^x(\cos y + i\sin y).$$
Vom nota $e^x(\cos y + i\sin y)$ cu e^{x+iy}.

Pentru $x = 0$ obţinem formula lui Euler
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

27. Să se calculeze sumele:

(a) $S_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$,

(b) $S_2 = \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

Rezolvare:

Folosim rădăcinile $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, cu $k = \overline{0, n-1}$, de ordin n ale unităţii, i.e.
$$z^n - 1 = 0,$$
precum şi relaţia lui Viete
$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0.$$
Deci
$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n} = 0$$
sau echivalent
$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n} = -1 \quad \text{şi} \quad \sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n} = 0.$$

28. Să se calculeze produsul $\sin\dfrac{\pi}{n}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\dfrac{(n-1)\,\pi}{n}$.

Rezolvare:

Folosim rădăcinile $z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, cu $k=\overline{0,n-1}$, de ordin n ale unităţii, i.e.

$$z^n-1=0,$$

precum şi relaţia

$$\frac{z^n-1}{z-1}=(z-z_1)\,(z-z_2)\ldots(z-z_{n-1})$$

în care se ia modulul şi se trece la limită pentru $z\to 1$.

Pe de o parte obţinem

$$\lim_{z\to1}\frac{z^n-1}{z-1}=\lim_{z\to1}\left(1+z+\ldots+z^{n-1}\right)=n$$

iar pe altă parte

$$\lim_{z\to1}\left|(z-z_1)\,(z-z_2)\ldots(z-z_{n-1})\right|=\left|\prod_{k=1}^{n-1}(1-z_k)\right|=\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right|$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{2k\pi}{n}}=\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{2-2\cos\frac{2k\pi}{n}}=\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}\,.$$

Deci

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n2^{n-1}\,.$$