Facultatea de Matematică
Calcul Integral şi Elemente de Analiză Complexă, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 17 – 18

Capitolul IX. Integrale curbilinii

1. Să se calculeze
$$\int_\gamma z^2 \operatorname{Im}(z)\ dz,$$
unde γ este segmentul care uneşte punctele $z = 0$ cu $z = 2 + i$.

Rezolvare:

Metoda 1 (calculul integralei curbilinii complexe folosind parametrizarea curbei γ).
Dacă γ este o curbă de clasă C^1 dată parametric de $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, atunci
$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))\ dz(t) = \int_a^b f(z(t))\ z'(t)\ dt.$$
Curba γ are reprezentarea parametrică
$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t}{2}, \quad t \in [0, 2], \end{cases}$$
deci
$$\gamma : z(t) = x(t) + i\,y(t) = t\Big(1 + \frac{i}{2}\Big), \quad t \in [0, 2].$$
Înlocuind obţinem
$$\int_\gamma z^2 \operatorname{Im}(z)\ dz = \int_0^2 t^2 \Big(1 + \frac{i}{2}\Big)^2 \frac{t}{2}\, d\Big[t\Big(1 + \frac{i}{2}\Big)\Big]$$
$$= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{i}{2}\Big)^3 \int_0^2 t^3\, dt = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{i}{2}\Big)^3 \Big(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\Big)$$
$$= 2\Big(1^3 + 3\frac{i}{2} + 3\Big(\frac{i}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{i}{2}\Big)^3\Big) = 2\Big(1 + \frac{3i}{2} - \frac{3}{4} - \frac{i}{8}\Big) = \frac{1}{2} + i\,\frac{11}{4}.$$

Metoda 2 (calculul integralei curbilinii complexe prin reducerea la două integrale curbilinii reale).
Are loc scrierea
$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\ dz &= \int_\gamma (u(x,y) + iv(x,y))\ d(x+iy) \\ &= \int_\gamma (u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy) + i\int_\gamma (v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy),\end{aligned}$$
deci integrala curbilinie complexă se poate reduce la calculul a două integrale curbilinii reale.
În cazul nostru obţinem
$$\int_\gamma z^2 \operatorname{Im}(z)\ dz = \int_\gamma \left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) y\, d(x+iy)$$
$$= \int_\gamma \left[\left(x^2 y - y^3\right) dx - 2xy^2 dy\right] + i\int_\gamma \left[2xy^2 dx + \left(x^2 y - y^3\right) dy\right],$$

unde γ are reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t}{2}, \quad t \in [0,2]. \end{cases}$$

Calculăm

$$I_1 = \int_\gamma \left[\left(x^2y - y^3\right)dx - 2xy^2dy\right] = \int_0^2 \left[\left(t^2\frac{t}{2} - \left(\frac{t}{2}\right)^3\right) - 2t\left(\frac{t}{2}\right)^2\frac{1}{2}\right]dt$$

$$= \int_0^2 \left[\left(\frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{8}\right) - \frac{t^3}{4}\right]dt = \int_0^2 \frac{t^3}{8}dt = \frac{1}{8}\left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

şi

$$I_2 = \int_\gamma \left[2xy^2dx + \left(x^2y - y^3\right)dy\right] = \int_0^2 \left[2t\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(t^2\frac{t}{2} - \left(\frac{t}{2}\right)^3\right)\frac{1}{2}\right]dt$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{t^3}{2} + \left(\frac{t^3}{4} - \frac{t^3}{16}\right)\right]dt = \int_0^2 \frac{11}{16}t^3dt = \frac{11}{16}\left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{11}{4}.$$

Deci

$$\int_\gamma z^2 \operatorname{Im}(z)\ dz = \frac{1}{2} + i\,\frac{11}{4}.$$

2. Să se calculeze

$$\int_\gamma z\,|z|\ dz, \quad \text{unde } \gamma : |z| = 1.$$

Rezolvare:

Curba γ este un cerc cu centrul $O(0,0)$ şi de rază 1. Folosind parametrizarea cercului

$$\begin{cases} x(\theta) = x_O + \rho\cos\theta \\ y(\theta) = y_O + \rho\sin\theta, \quad \rho = 1, \quad \theta \in [0,2\pi], \end{cases}$$

obţinem

$$\gamma : z(\theta) = x(\theta) + i\,y(\theta) = \cos\theta + i\,\sin\theta = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0,2\pi].$$

Înlocuind obţinem

$$\int_\gamma z\,|z|\ dz = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\left|e^{i\theta}\right|\ d\left(e^{i\theta}\right) = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\,e^{i\theta}\,id\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{2i\theta}\,d\theta = i\,\frac{e^{2i\theta}}{2i}\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{1}{2}\left(e^{4i\pi} - e^0\right) = 0.$$

3. Să se calculeze

$$\int_\gamma |z|\,dz,$$

unde γ este:

(a) segmentul $[-i,i]$;

(b) semicercul cu extremităţile i şi $-i$ astfel încât $\operatorname{Re}(z) \geq 0$.

Rezolvare:

(a) Curba γ are parametrizarea

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t, \quad t \in [-1,1], \end{cases}$$

deci

$$\gamma : z\left(t\right) = i\,t, \quad t \in \left[-1,1\right].$$

(b) Curba γ are parametrizarea

$$\begin{cases} x\left(\theta\right) = \cos\theta \\ y\left(\theta\right) = \sin\theta\,, \quad \theta \in \left[-\pi/2, \pi/2\right], \end{cases}$$

deci

$$\gamma : z\left(\theta\right) = e^{i\theta}, \quad \theta \in \left[-\pi/2, \pi/2\right].$$

Menţionăm că valoarea integralei va depinde de drumul ales care uneşte punctele $-i$ cu i.

4. Să se calculeze

$$\int_\gamma z^3\, dz,$$

unde γ este segmentul care uneşte punctele $z = 0$ cu $z = i$.

Rezolvare:

Curba γ are reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x\left(t\right) = 0 \\ y\left(t\right) = t\,, \quad t \in \left[0,1\right], \end{cases}$$

deci

$$\gamma : z\left(t\right) = x\left(t\right) + i\,y\left(t\right) = it, \quad t \in \left[0,1\right].$$

Înlocuind obţinem

$$\int_\gamma z^3\, dz = \int_0^1 \left(it\right)^3\, d\left(it\right) = i^4 \int_0^1 t^3\, dt = \frac{1}{4}\,.$$

5. Să se calculeze

$$\int_\gamma |z|\, dz\,, \quad \text{unde } \gamma : z\left(t\right) = e^{\pi i(1-t)}, t \in \left[0, \pi/2\right].$$

Rezolvare:

Curba γ este dată parametric, deci

$$\int_\gamma |z|\, dz = \int_0^{\pi/2} \left|e^{\pi i(1-t)}\right| d\big(e^{\pi i(1-t)}\big) = -\pi i \int_0^{\pi/2} e^{\pi i(1-t)} dt$$

$$= -\pi i\, \frac{e^{\pi i(1-t)}}{-\pi i}\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = e^{\pi i}\big(e^{-i\pi^2/2} - 1\big) = e^{-i\pi^2/2} - 1,$$

deoarece $\left|e^{\pi i(1-t)}\right| = \sqrt{\cos^2\left(\pi\left(1-t\right)\right) + \sin^2\left(\pi\left(1-t\right)\right)} = 1.$

6. Să se calculeze

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz,$$

unde γ este segmentul care uneşte punctele $z = -i$ cu $z = i$.

Rezolvare:

Curba γ are reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x\left(t\right) = 0 \\ y\left(t\right) = t\,, \quad t \in \left[-1,1\right], \end{cases}$$

deci

$$\gamma : z(t) = x(t) + i\, y(t) = it, \quad t \in [-1, 1].$$

Înlocuind obţinem

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_{-1}^{1} (-it)\ d(it) = -i^2 \Big(\frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \Big) = 0.$$

7. Să se calculeze

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz,$$

unde $\gamma : z(t) = t^2 + it$ parcursă de la $z = 0$ la $z = 4 + 2i$.

Rezolvare:

Curba γ are reprezentarea parametrică

$$\gamma : z(t) = t^2 + it, \quad t \in [0, 2],$$

deci

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_0^2 \overline{t^2 + it}\, d\left(t^2 + it\right) = \int_0^2 \left(t^2 - it\right)\ (2t + i)\, dt$$
$$= \int_0^2 \left(2t^3 - 2it^2 + it^2 - i^2 t\right) dt = \int_0^2 \left(2t^3 + t - it^2\right) dt = \left(2\,\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - i\,\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = 10 - i\,\frac{8}{3}.$$

8. Să se calculeze

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz,$$

unde γ este segmentul care uneşte punctele $z = 0$ şi $z = 2i$ reunit cu segmentul care uneşte punctele $z = 2i$ şi $z = 4 + 2i$.

Rezolvare:

Curba $\gamma = \widehat{OA} \cup \widehat{AB}$, unde $A\,(z = 2i) = A\,(0, 2)$ iar $B\,(z = 4 + 2i) = B\,(4, 2)$, deci

$$\widehat{OA} : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t, \quad t \in [0, 2], \end{cases} \qquad \text{şi} \quad \widehat{AB} : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2, \quad t \in [0, 4], \end{cases}$$

adică

$$\widehat{OA} : z(t) = it, \qquad t \in [0, 2] \quad \text{şi} \quad \widehat{AB} : z(t) = t + 2i, \qquad t \in [0, 4].$$

Metoda 1.
Obţinem

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_{\widehat{OA}} \bar{z}\, dz + \int_{\widehat{AB}} \bar{z}\, dz$$

iar

$$\int_{\widehat{OA}} \bar{z}\, dz = \int_0^2 \overline{it}\, d(it) = -i^2 \int_0^2 t\, dt = 2,$$
$$\int_{\widehat{AB}} \bar{z}\, dz = \int_0^4 \overline{t + 2i}\, d(t + 2i) = \int_0^4 (t - 2i)\ dt = 8 - 8i,$$

deci

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = 10 - 8i.$$

Metoda 2.
Să observăm că putem calcula integrala şi astfel:

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_\gamma (x - iy)\ d(x + iy) = \int_\gamma (xdx + ydy) + i \int_\gamma (xdy - ydx).$$

Parametrizarea segmentului $\overset{\frown}{OA}$ implică

$$x = 0, \quad dx = 0,$$

iar pe $\overset{\frown}{AB}$ avem

$$dy = 0.$$

Deci

$$\int_{\overset{\frown}{OA}} \bar{z}\, dz = \int_{\overset{\frown}{OA}} y dy \quad \text{şi} \quad \int_{\overset{\frown}{AB}} \bar{z}\, dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} x dx - i \int_{\overset{\frown}{AB}} y dx.$$

Obţinem

$$\int_{\overset{\frown}{OA}} \bar{z}\, dz = \int_0^2 t dt = 2\,,$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \bar{z}\, dz = \int_0^4 t dt - i \int_0^4 2 dt = 8 - 8i\,,$$

deci

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = 10 - 8i\,.$$

9. Să se calculeze

$$\int_\gamma z^n dz, \quad n \in \mathbb{N},$$

unde γ este curba care mărgineşte domeniul $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2, y > 0\right\}$.

Rezolvare:

Curba $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, unde $\gamma_1 = \{(x, y) : x \in [-a, a]\,, y = 0\}$, $\gamma_2 = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0\right\}$. Avem parametrizările

$$\begin{cases} x\,(t) = t \\ y\,(t) = 0, \quad t \in [-a, a]\,, \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x\,(\theta) = a \cos \theta \\ y\,(\theta) = a \sin \theta\,, \quad \theta \in [0, \pi]\,, \end{cases}$$

deci

$$\gamma_1 : z\,(t) = t, \quad t \in [-a, a] \quad \text{şi} \quad \gamma_2 : z\,(\theta) = a e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \pi]\,.$$

Înlocuind obţinem

$$\begin{aligned} \int_\gamma z^n dz &= \int_{\gamma_1} z^n dz + \int_{\gamma_2} z^n dz = \int_{-a}^a t^n\, dt + a^n \int_0^\pi e^{ni\theta}\, d\left(a e^{i\theta}\right) \\ &= \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_{t=-a}^{t=a} + i a^{n+1} \int_0^\pi e^{(n+1)i\theta}\, d\theta = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_{t=-a}^{t=a} + i a^{n+1}\, \frac{e^{(n+1)i\theta}}{(n+1)\, i} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= \frac{a^{n+1}}{n+1} \left(1 - (-1)^{n+1}\right) + \frac{a^{n+1}}{n+1} \left(e^{(n+1)i\pi} - e^0\right) \\ &= \frac{a^{n+1}}{n+1} \left(1 - (-1)^{n+1}\right) + \frac{a^{n+1}}{n+1} \left(\cos\left((n+1)\,\pi\right) - 1\right) = 0\,, \end{aligned}$$

deoarece $\cos(k\pi) = (-1)^k$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

10. Să se calculeze

$$\int_\gamma \left(12 z^2 - 4iz\right)\, dz,$$

unde γ este o curbă care uneşte punctele $z = 1 + i$ şi $z = 2 + 3i$.

Rezolvare:

Metoda 1 (integrala curbilinie complexă în cazul unui integrand olomorf este independentă de drum).

Să observăm că în cazul general al integralei

$$\int_{\gamma} f(z)\ dz\,,$$

unde γ este o curbă dată de clasă C^1 care uneşte punctele $A(x_A, y_A)$ cu $B(x_B, y_B)$ iar f este o funcţie olomorfă de un domeniu D care conţine curba γ avem

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)\ dz &= \int_{\gamma}(u(x,y)+iv(x,y))\ d(x+iy)\\ &= \int_{\gamma}(u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy) + i\int_{\gamma}(v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy)\,.\end{aligned}$$

Deoarece funcţia f satisface condiţiile Cauchy-Riemann

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\ ,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,, \quad \forall (x,y)\in D,\end{cases}$$

obţinem, echivalent, că au loc condiţiile specifice ca cele două integrale curbilinii reale să fie independente de drum:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}(u(x,y)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-v(x,y))\ ,\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}(v(x,y)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(u(x,y))\,, \quad \forall (x,y)\in D.\end{cases}$$

Deci există primitivele F_1 şi F_2 astfel încât

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = u(x,y)\,,\\[2mm] \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = -v(x,y)\end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases}\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = v(x,y)\,,\\[2mm] \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = u(x,y)\,,\end{cases}$$

iar integrala devine

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)\ dz &= F_1(x,y)\Big|_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} + i\,F_2(x,y)\Big|_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)}\\ &= [F_1(x_B,y_B) - F_1(x_A,y_A)] + i\ [F_2(x_B,y_B) - F_2(x_A,y_A)]\,.\end{aligned}$$

Deci, în cazul unei funcţii olomorfe, integrala curbilinie complexă este independentă de drum.

Evident, în cazul unei curbe închise, integrala curbilinie complexă dintr-o funcţie olomorfă este nulă (am obţinut astfel un caz particular al Teoremei Fundamentale a lui Cauchy[1]).

[1] **Teorema Fundamentală a lui Cauchy.** Fie D un domeniu deschis şi mărginit cu frontiera dată de curba γ care este formată dintr-un număr finit de curbe simple, închise şi netede. Presupunem că funcţia f este olomorfă de $D\cup\gamma = \bar{D}$. Atunci

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Observaţie. Uneori **Teorema Fundamentală a lui Cauchy** este enunţată separat pentru domenii **simplu conexe** şi domenii **multiplu conexe**.

Definiţie. Reamintim că un domeniu $D\subset\mathbb{C}$ se numeşte simplu conex dacă orice curbă simplă închisă $\gamma\subset D$ are proprietatea că domeniul mărginit de γ este tot în D. Un domeniu care nu este simplu conex se numeşte multiplu conex.

Exemple de mulţimi simplu conexe: **mulţimile convexe** (de exemplu, discul $B(a,r) = \{|z-a|<r\}$ şi semiplanul $\{\operatorname{Re} z>0\}$) şi **mulţimile stelate** (de exemplu, $\mathbb{R}^2$ din care se elimină o semidreaptă).

Exemple de mulţimi multiplu conexe: exteriorul unui disc $\mathbb{R}^2\setminus\overline{B(a,r)} = \{|z-a|>r\}\,,$ **coroana circulară** $\{r_1<|z-a|<r_2\}\,,$ **un disc din care se scot două discuri interioare** $B(a,r)\setminus\left(\overline{B(a_1,r_1)}\cup\overline{B(a_2,r_2)}\right)$.

În cazul exemplului nostru avem

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \left(12z^2-4iz\right)\,dz=\int_\gamma \left(12\left(x^2-y^2+2ixy\right)-4i\left(x+iy\right)\right)\,d\left(x+iy\right)\\
&=\int_\gamma \left[\left(12x^2-12y^2+4y\right)+i\left(24xy-4x\right)\right]\,d\left(x+iy\right)\\
&=\int_\gamma \left(\left(12x^2-12y^2+4y\right)dx-\left(24xy-4x\right)dy\right)+i\int_\gamma \left(\left(24xy-4x\right)dx+\left(12x^2-12y^2+4y\right)dy\right).
\end{aligned}$$

Am obţinut două integrale curbilinii şi observăm că fiecare dintre ele este independentă de drum, deoarece

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(12x^2-12y^2+4y\right)=-24y+4=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\left(24xy-4x\right)\right)$$

iar

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(24xy-4x\right)=24x=\frac{\partial}{\partial x}\left(12x^2-12y^2+4y\right).$$

Prin urmare

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \left(\left(12x^2-12y^2+4y\right)dx-\left(24xy-4x\right)dy\right)+i\int_\gamma \left(\left(24xy-4x\right)dx+\left(12x^2-12y^2+4y\right)dy\right)\\
&=F_1\left(x,y\right)\Big|_{(1,1)}^{(2,3)}+iF_2\left(x,y\right)\Big|_{(1,1)}^{(2,3)},
\end{aligned}$$

unde primitivele sunt date de calculul standard de la integrale curbilinii reale:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x}\left(x,y\right)=12x^2-12y^2+4y,\\[2mm] \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\left(x,y\right)=-\left(24xy-4x\right)\end{cases}\quad\text{şi}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial F_2}{\partial x}\left(x,y\right)=24xy-4x,\\[2mm] \dfrac{\partial F_2}{\partial y}\left(x,y\right)=12x^2-12y^2+4y,\end{cases}$$

deci

$$\begin{aligned}
F_1\left(x,y\right)&=4x^3-12xy^2+4xy+C_1,\quad C_1\in\mathbb{R},\\
F_2\left(x,y\right)&=12x^2y-2x^2-4y^3+2y^2+C_2,\quad C_2\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

adică o primitivă integrandului $\left(12z^2-4iz\right)$ este

$$\left(4x^3-12xy^2+4xy\right)+i\left(12x^2y-2x^2-4y^3+2y^2\right)+C,\quad C\in\mathbb{C}. \tag{1}$$

Integrala din enunţ devine

$$\int_\gamma \left(12z^2-4iz\right)\,dz=F_1\left(2,3\right)-F_1\left(1,1\right)+i\left(F_2\left(2,3\right)-F_2\left(1,1\right)\right).$$

Metoda 2 (integrala curbilinie complexă calculată cu ajutorul primitivei).

Funcţia $f\left(z\right)=12z^2-4iz$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$, deci f admite primitive[2] pe $\mathbb{C}$. Dacă γ este curba care uneşte punctele $z_1=1+i$ şi $z_2=2+3i$, atunci

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \left(12z^2-4iz\right)\,dz=\left(4\,z^3-2\,i\,z^2\right)\Big|_{z_1}^{z_2}\\
&=4\left(2+3i\right)^3-2i\,\left(2+3i\right)^2-4\left(1+i\right)^3+2i\,\left(1+i\right)^2=-156+38i\,.
\end{aligned}$$

Făcând calculele observăm că primitiva precedentă coincide cu cea dată de relaţia (1), adică

$$4z^3-2i\,z^2=\left(4x^3-12xy^2+4xy\right)+i\,\left(12x^2y-2x^2-4y^3+2y^2\right)+C,\quad C\in\mathbb{C}.$$

[2] **Teoremă.** Orice funcţie olomorfă pe un domeniu simplu conex D admite primitive pe D.

11. Să se calculeze
$$\int_\gamma \left(z^2 - iz\right) dz,$$
unde γ este o elipsă de semiaxe 2 şi 3.

Rezolvare:

Să observăm că domeniul mărginit de elipsa γ este un domeniu simplu conex.

Metoda 1.

Se poate aplica Teorema Fundamentală a lui Cauchy deoarece funcţia $f(z) = z^2 - iz$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$ iar curba γ este închisă. Obţinem $\int_\gamma \left(z^2 - iz\right) dz = 0$.

Metoda 2.

Folosind parametrizarea elipsei $\gamma : \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ avem
$$\begin{cases} x(\theta) = x_O + 2\cos\theta \\ y(\theta) = y_O + 3\sin\theta\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,, \end{cases}$$
deci
$$\gamma : z(\theta) = 2\cos\theta + i\,3\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$
Înlocuind obţinem
$$\int_\gamma \left(z^2 - iz\right)\, dz = \int_0^{2\pi} \Big((2\cos\theta + i\,3\sin\theta)^2 - i\,(2\cos\theta + i\,3\sin\theta) \Big)\, d\,(2\cos\theta + i\,3\sin\theta)$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\left(4\cos^2\theta - 9\sin^2\theta\right) + 12\sin\theta\cos\theta - 2i\,\cos\theta + 3\sin\theta \right) \left(-2\sin\theta + 3i\,\cos\theta\right) d\theta.$$

Metoda 3.

Funcţia $f(z) = z^2 - iz$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$, deci f admite primitive pe $\mathbb{C}$. Având în vedere că γ este o o curbă închisă (capătul iniţial z_1 coincide cu capătul final z_2) obţinem:
$$\int_\gamma \left(z^2 - iz\right)\, dz = \left(\frac{z^3}{3} - i\,\frac{z^2}{2}\right)\Big|_{z_1}^{z_2} = 0\,.$$

12. Să se calculeze
$$\int_\gamma (z - a)^n\, dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$
unde γ este un cerc de centru a şi de rază r.

Rezolvare:

Să observăm că domeniul mărginit de cercul γ este un domeniu simplu conex.

Metoda 1.

Curba γ este dată de $|z - a| = r$, deci are reprezentarea parametrică
$$\begin{cases} x(\theta) = x_a + \rho\cos\theta \\ y(\theta) = y_a + \rho\sin\theta\,, \quad \rho = r, \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$
şi obţinem
$$\gamma : z(\theta) = x(\theta) + i\,y(\theta) = x_a + r\cos\theta + i\,y_a + i\,r\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$
adică **cercul** $|z - a| = r$ **are reprezentarea parametrică**
$$\gamma : z(\theta) = a + re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Înlocuind obţinem, în cazul $n \neq -1$,

$$\int_\gamma (z-a)^n \, dz = \int_0^{2\pi} \left(re^{i\theta}\right)^n \, d\left(re^{i\theta}\right) = \int_0^{2\pi} r^n e^{ni\theta} \, re^{i\theta} \, id\theta$$
$$= i\, r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\theta} \, d\theta = i\, r^{n+1} \, \frac{e^{(n+1)i\theta}}{(n+1)\, i} \Big|_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1} \left(e^{i\,(n+1)\,2\pi} - e^0\right) = 0.$$

În cazul $n = -1$:

$$\int_\gamma (z-a)^n \, dz = \int_\gamma \frac{1}{z-a} \, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} \, d\left(re^{i\theta}\right) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} \, re^{i\theta} \, id\theta$$
$$= i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \, .$$

Metoda 2.

Să observăm că în cazul $n \geq 0$ se poate aplica Teorema Fundamentală a lui Cauchy deoarece funcţia $f(z) = (z-a)^n$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$ iar curba γ este închisă. Obţinem $\int_\gamma (z-a)^n \, dz = 0, \forall n \geq 0$.

Pentru $n \leq -1$ se poate aplica **Formula Integrală a lui Cauchy**[3].

Într-adevăr, dacă notăm $f(z) = 1$, atunci pentru $n = -1$

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a} \, dz = 2\pi i \, f(a) = 2\pi i$$

iar pentru $n \leq -2$ sau echivalent $k := -n \geq 2$

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-a)^k} \, dz = \frac{2\pi i}{(k-1)!} \, f^{(k-1)}(a) = 0 \, .$$

13. Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \, ,$$

unde $\gamma : |z| = r$, cu $|a| \neq r$.

Rezolvare:

Să observăm că în cazul $|a| > r$ se poate aplica Teorema Fundamentală a lui Cauchy deoarece funcţia $f(z) = \frac{1}{z-a}$ este olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, deci şi pe interiorul cercului γ care este curbă închisă. Obţinem $\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 0$.

Dacă $|a| < r$, atunci se poate aplica Formula Integrală a lui Cauchy. Într-adevăr,

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a} \, dz = 2\pi i \, f(a) = 2\pi i,$$

unde $f(z) = 1$.

[3] **Formula Integrală a lui Cauchy.** Fie D un domeniu deschis şi mărginit cu frontiera dată de curba γ care este formată dintr-un număr finit de curbe simple, închise şi netede. Presupunem că funcţia f este olomorfă de $D \cup \gamma = \bar{D}$. Atunci

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} \, dz \, , \quad \forall a \in D.$$

Observaţie. Se poate arăta că dacă f este olomorfă de D, atunci f este de clasă C^∞ pe D. În condiţiile de mai sus are loc şi formula

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz \, , \quad \forall a \in D, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

14. Să se calculeze
$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz\,,\quad \text{unde } \gamma : |z| = 3.$$

Rezolvare:

Putem aplica Formula Integrală a lui Cauchy, deoarece punctul $a = -1$ se află în interiorul cercului $|z| = 3$ iar integrandul este de tipul $\frac{f(z)}{(z-a)^4}$, unde $f(z) = e^{2z}$. Deci
$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z+1)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!}\,f^{(3)}(-1) = \frac{8\pi i}{3}\,e^{-2}.$$

15. Să se calculeze
$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sh}(z)}{(z-\pi i)^4}\,dz,\quad \text{unde } \gamma : |z-2i| = 2.$$

Rezolvare:

Putem aplica Formula Integrală a lui Cauchy, deoarece punctul $a = \pi i$ se află în interiorul cercului γ de centru $A(z = 2i) = A(0,2)$ şi rază $R = 2$ iar integrandul este de tipul $\frac{f(z)}{(z-a)^4}$, unde $f(z) = \operatorname{sh}(z) := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$. Deci
$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\pi i)^4}\,dz &= \frac{2\pi i}{3!}\,f^{(3)}(\pi i) = \frac{2\pi i}{3!}\,\operatorname{ch}(\pi i) = \frac{2\pi i}{3!}\,\frac{e^{\pi i} + e^{-\pi i}}{2}\\ &= \frac{\pi i}{6}\,(\cos\pi + i\sin\pi + \cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = -\frac{\pi i}{3}\,.\end{aligned}$$
deoarece $\operatorname{sh}'(z) = \operatorname{ch}(z) := \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh}''(z) = \operatorname{sh}(z)$, $\operatorname{sh}'''(z) = \operatorname{ch}(z)$.

16. Să se calculeze
$$\int_\gamma \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{(z+i)^4}\,dz,$$
unde $\gamma : |z + 2i| = 2$.

Rezolvare:

Se aplică Formula Integrală a lui Cauchy deoarece punctul $a = -i$ aparţine interiorului cercului γ (cu centrul $C(z = 2i) = C(0,2)$ şi de rază $R = 2$) iar integrandul este de tipul $\frac{f(z)}{(z+i)^4}$, unde $f(z) = \operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi z}{2}\right)$ este olomorfă în interiorului curbei γ. În concluzie
$$\int_\gamma \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{(z+i)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!}\,\left[\operatorname{ch}\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right]^{(3)}\Big|_{z=-i} = \frac{2\pi i}{3!}\,\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \operatorname{sh}\Big(-i\,\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi^4 i}{24}\,\frac{e^{-\pi/2} - e^{\pi/2}}{2} = \frac{\pi^4 i}{24}\,(-i)\,.$$

17. Să se calculeze
$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,dz,\quad \text{unde } \gamma : |z| = 3.$$

Rezolvare:

Putem aplica Formula Integrală a lui Cauchy, deoarece punctele $a_1 = 1$ şi $a_2 = 2$ se află în interiorul cercului $|z| = 3$ iar integrandul este de tipul $\frac{f(z)}{z-a_k}$.
Deoarece putem descompune în două fracţii simple
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\,,$$

obţinem scrierea

$$\int_\gamma \frac{\sin\left(\pi z^2\right)+\cos\left(\pi z^2\right)}{(z-1)(z-2)}\,dz=\int_\gamma \frac{\sin\left(\pi z^2\right)+\cos\left(\pi z^2\right)}{z-2}\,dz-\int_\gamma \frac{\sin\left(\pi z^2\right)+\cos\left(\pi z^2\right)}{z-1}\,dz\,.$$

Dacă notăm cu $f(z)=\sin\left(\pi z^2\right)+\cos\left(\pi z^2\right)$, atunci

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-2}\,dz=2\pi i\,f(2)\quad \text{iar}\quad \int_\gamma \frac{f(z)}{z-1}\,dz=2\pi i\,f(1)\,,$$

deci

$$\int_\gamma \frac{\sin\left(\pi z^2\right)+\cos\left(\pi z^2\right)}{(z-1)(z-2)}\,dz=2\pi i\,\left(f(2)-f(1)\right)$$
$$=2\pi i\,\left(\sin(4\pi)+\cos(4\pi)-\sin(\pi)-\cos(\pi)\right)=4\pi i\,.$$

18. Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{zdz}{z^4-1}\,,\quad \text{unde } \gamma:|z-a|=a,\quad \text{cu } a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1/2\}\,.$$

Rezolvare:

Dacă $a\in(0,1/2)$, atunci se poate aplica Teorema Fundamentală a lui Cauchy deoarece funcţia $f(z)=\frac{z}{z^4-1}$ este olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus\{\pm1,\pm i\}$, deci şi pe interiorul cercului γ (care este o curbă închisă ce nu conţine punctele $\pm1,\pm i$). Obţinem $\displaystyle\int_\gamma \frac{zdz}{z^4-1}=0.$

Dacă $a\in(1/2,+\infty)$, atunci se poate aplica Formula Integrală a lui Cauchy deoarece punctul $z_0=1$ aparţine interiorului cercului γ. Deci, notând cu $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z^2+1)}$, obţinem

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-1}\,dz=2\pi i\,f(1)=\frac{\pi i}{2}\,.$$

19. Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{z^n}{z-a}\,dz\,,\quad n\in\mathbb{N},a\neq1,\quad \text{unde } \gamma:|z|=1.$$

Rezolvare:

Dacă $|a|>1$, atunci se poate aplica Teorema Fundamentală a lui Cauchy deoarece funcţia $f(z)=\frac{z^n}{z-a}$ este olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, deci şi pe interiorul cercului γ (care este o curbă închisă ce nu conţine punctul a). Obţinem $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^n}{z-a}\,dz=0.$

Dacă $|a|<1$, atunci se poate aplica Formula Integrală a lui Cauchy deoarece punctul $z_0=a$ aparţine interiorului cercului γ. Deci, notând cu $f(z)=z^n$, obţinem

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz=2\pi i\,f(a)=2\pi i\,a^n\,.$$

20. Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}\,,\quad n\in\mathbb{N}^*,\quad \text{unde } \gamma:x^2+y^2-\lambda y=0,\quad \text{cu } \lambda>1.$$

Rezolvare:

Curba $\gamma:x^2+(y-\lambda/2)^2=(\lambda/2)^2$ este cercul cu centrul $C(0,\lambda/2)$ şi rază $R=\lambda/2$.

Deoarece $\lambda > 1$ obţinem că punctul $a = i$ aparţine interiorului cercului γ. Deci putem aplica Formula Integrală a lui Cauchy deoarece integrandul este de tipul $\frac{f(z)}{(z-i)^n}$, unde $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^n}$ este olomorfă în interiorului cercului γ. În concluzie

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \int_\gamma \frac{\frac{1}{(z+i)^n}}{(z-i)^n}\, dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\, f^{(n-1)}(i)$$
$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot (-1)^{n-1}\, n(n+1)\ldots(2n-2)\,(z+i)^{-2n+1}\Big|_{z=i} = \frac{\pi i}{(n-1)!} \cdot \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{2^{2n-2}}\,.$$

21. Să se calculeze
$$\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-4)^2}\, dz,$$
unde $\gamma : x^2 + y^2 - \lambda x = 0$, cu $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$.

Rezolvare:

Curba $\gamma : (x - \lambda/2)^2 + y^2 = (\lambda/2)^2$ este cercul cu centrul $C(\lambda/2, 0)$ şi rază $R = \lambda/2$.
Dacă $\lambda < 2$, atunci $a = 2$ este în afara domeniului mărginit de cercul γ, deci se poate aplica Teorema Fundamentală a lui Cauchy şi se obţine că integrala este nulă.
Dacă $\lambda > 2$, atunci $a = 2$ este în interiorul cercului γ, deci se poate aplica Formula Integrală a lui Cauchy:
$$\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-4)^2}\, dz = \int_\gamma \frac{\frac{\cos(\pi z)}{(z+2)^2}}{(z-2)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{\cos(\pi z)}{(z+2)^2}\right]' \Big|_{z=2}.$$

22. Să se calculeze
$$\int_\gamma \frac{z^4 - z}{(z-i)^3}\, dz,$$
unde γ este dată de $z(t) = 2(\cos t + i \sin t)$, cu $t \in [0, 2\pi]$.

Rezolvare:

Deoarece $a = i$ este în interiorul cercului γ, se poate aplica Formula Integrală a lui Cauchy:
$$\int_\gamma \frac{z^4 - z}{(z-i)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} \left[z^4 - z\right]'' \Big|_{z=i}.$$

23. Să se calculeze
$$\int_\gamma \frac{z}{z+i}\, dz,$$
unde $\gamma : |z| = 2$.

Rezolvare:

Deoarece $a = -i$ este în interiorul cercului γ, se poate aplica Formula Integrală a lui Cauchy:
$$\int_\gamma \frac{z}{z+i}\, dz = 2\pi i\, z\Big|_{z=-i} = 2\pi\,.$$

24. Să se calculeze
$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}\, dz,$$
unde $\gamma : |z - i| = 1/2$.

Rezolvare:

Deoarece $a = i$ este în interiorul cercului γ, se poate aplica Formula Integrală a lui Cauchy:

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)^2}\,dz = \int_\gamma \frac{\frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{e^{iz}}{z\left(z+i\right)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}.$$

25. Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^n}\,dz, \quad \gamma : |z| = 1.$$

Rezolvare:

Deoarece $a = 0$ este în interiorul cercului γ, se poate aplica Formula Integrală a lui Cauchy:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^n}\,dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\left[e^z\right]^{(n-1)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

26. Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{|z|^2 + e^z \sin z}{z}\,dz\,, \quad \text{unde } \gamma : |z| = 1.$$

Rezolvare:

Observăm că

$$\int_\gamma \frac{|z|^2 + e^z \sin z}{z}\,dz = \int_\gamma \frac{|z|^2}{z}\,dz + \int_\gamma \frac{e^z \sin z}{z}\,dz = \int_\gamma \bar{z}\,dz + \int_\gamma \frac{e^z \sin z}{z}\,dz.$$

Pentru prima integrală folosim parametrizarea cercului $\gamma : z\left(\theta\right) = e^{i\theta}, \quad$ unde $\theta \in [0, 2\pi]$. Deci

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\,d\left(e^{i\theta}\right) = i\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\,e^{i\theta}\,d\theta = 2\pi i.$$

Pentru a doua integrală putem aplica Formula Integrală a lui Cauchy, deoarece punctul $a = 0$ se află în interiorul cercului $|z| = 1$ iar integrandul este de tipul $\frac{f(z)}{z-a}$, unde $f\left(z\right) = e^z \sin z$. Deci

$$\int_\gamma \frac{f\left(z\right)}{z}\,dz = 2\pi i\, f\left(0\right) = 0.$$

27. Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{dz}{z\left(e^{\pi z} - 1\right)}, \quad \text{unde } \gamma : |z| = 1.$$

Rezolvare:

Să observăm că

$$\frac{e^{\pi z} - 1}{\pi z} \to 1, \quad \text{dacă } z \to 0,$$

deci se poate aplica Formula Integrală a lui Cauchy deoarece punctul $a = 0$ aparţine interiorului cercului γ iar

$$f\left(z\right) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^{\pi z} - 1}, & \text{dacă } 0 < |z| < 1, \\ \dfrac{1}{\pi}, & \text{dacă } z = 0. \end{cases}$$

este olomorfă pe interiorul curbei γ.

Obţinem

$$\int_\gamma \frac{f\left(z\right)}{z^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\,f'\left(0\right).$$

28. Să se calculeze

$$\int_\gamma zdz,$$

unde γ este elipsa de semiaxe a şi b din primul cadran.

Rezolvare:

Metoda 1.
Curba $\gamma = \overset{\frown}{AB} = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x,y \geq 0\right\}$ are parametrizarea

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta \\ y(\theta) = b\sin\theta\,, \quad \theta \in [0,\pi/2]\,, \end{cases}$$

deci

$$\gamma : z(\theta) = a\cos\theta + i\,b\sin\theta, \quad \theta \in [0,\pi/2]\,.$$

Înlocuind obţinem

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma z\,dz = \int_0^{\pi/2} (a\cos\theta + i\,b\sin\theta)\ d(a\cos\theta + i\,b\sin\theta) \\
&= \int_0^{\pi/2} (a\cos\theta + i\,b\sin\theta)\ (-a\sin\theta + i\,b\cos\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\left(-a^2\sin\theta\cos\theta - b^2\sin\theta\cos\theta\right) + i\ \left(ab\cos^2\theta - ab\sin^2\theta\right)\right)\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(-\left(a^2+b^2\right)\sin\theta\cos\theta + i\,ab\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right)\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(-\left(a^2+b^2\right)\frac{\sin(2\theta)}{2} + i\,ab\,\frac{\cos(2\theta)}{2}\right)\ d\theta = \left(a^2+b^2\right)\frac{\cos(2\theta)}{4}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} + i\,ab\,\frac{\sin(2\theta)}{4}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\,.
\end{aligned}$$

Metoda 2.
Se poate aplica Teorema Fundamentală a lui Cauchy deoarece funcţia $f(z) = z$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$. Obţinem $\int_\Gamma z\,dz = 0$, unde Γ este curba închisă care mărgineşte sfertul de interior de elipsă din primul cadran, adică $\Gamma = \gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$, unde $\gamma = \overset{\frown}{AB} = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x,y \geq 0\right\}$, $\gamma_1 = \overset{\frown}{BO}$ este segmentul care uneşte $B(0,b)$ cu $O(0,0)$ iar $\gamma_2 = \overset{\frown}{OA}$ este segmentul care uneşte $O(0,0)$ cu $A(a,0)$. Deci avem

$$\overset{\frown}{BO} : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t\,, \quad t \in [b,0]\,, \end{cases} \quad \text{şi} \quad \overset{\frown}{OA} : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0\,, \quad t \in [0,a]\,, \end{cases}$$

adică

$$\overset{\frown}{BO} : z(t) = it, \qquad t \in [b,0] \quad \text{şi} \quad \overset{\frown}{OA} : z(t) = t, \qquad t \in [0,a]\,.$$

Conform Teoremei Fundamentale a lui Cauchy

$$\int_{\gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2} z\,dz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_\gamma z\,dz = \int_{\bar{\gamma}_1} z\,dz + \int_{\bar{\gamma}_2} z\,dz\,,$$

unde curbele $\bar{\gamma}_1$ şi $\bar{\gamma}_2$ sunt curbele γ_1 şi respectiv γ_2 parcurse în sens opus, adică $\bar{\gamma}_1 = \overset{\frown}{OB}$ şi $\bar{\gamma}_2 = \overset{\frown}{AO}$.

Deci

$$\int_{\widehat{OB}} z\,dz = \int_{\widehat{OB}} (x+iy)\ d(x+iy) = \int_{\widehat{OB}} (xdx - ydy) + i\int_{\gamma} (ydx + xdy) = -\int_{\widehat{OB}} ydy,$$
$$\int_{\widehat{AO}} z\,dz = \int_{\widehat{AO}} xdx,$$

deoarece pe $\widehat{OB}$

$$x = 0, \quad dx = 0$$

iar pe $\widehat{AO}$

$$y = 0, \quad dy = 0.$$

Obţinem

$$\int_{\gamma} z\,dz = -\int_{\widehat{OB}} ydy + \int_{\widehat{AO}} xdx = -\int_0^b tdt + \int_a^0 tdt = -\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right).$$

Metoda 3.

Funcţia $f(z) = z$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$, deci f admite primitive pe $\mathbb{C}$:

$$\int_{\gamma} z\,dz = \frac{z^2}{2}\Big|_{A(a,0)}^{B(0,b)} = \frac{z^2}{2}\Big|_{z=a}^{z=ib} = -\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\ .$$

29. Să se calculeze

$$\int_{\gamma} (iz+2)\,dz,$$

unde γ este curba care mărgineşte domeniul $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Rezolvare:

Să observăm că domeniul D nu este un simplu conex.

Curba γ este o reuniune două cercuri, adică $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, unde

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \sin\theta\,, \quad \theta \in [2\pi, 0]\,, \end{cases} \quad \text{şi} \quad \gamma_1 : \begin{cases} x(\theta) = 2\cos\theta \\ y(\theta) = 2\sin\theta\,, \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

(am considerat sensul frontierei γ dat de convenţia ca domeniul D să rămână în stânga), deci

$$\gamma_1 : z(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [2\pi, 0] \quad \text{şi} \quad \gamma_2 : z(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Metoda 1.

Înlocuind partea reală şi partea imaginară obţinem

$$\int_{\gamma} (iz+2)\ dz = \int_{\gamma_1} (iz+2)\ dz + \int_{\gamma_2} (iz+2)\ dz$$
$$= \int_{2\pi}^{0} (i\cos\theta - \sin\theta + 2)\ d(\cos\theta + i\ \sin\theta) + \int_0^{2\pi} (i\,2\cos\theta - 2\sin\theta + 2)\ d(2\cos\theta + i\,2\sin\theta)\,.$$

Metoda 2.

Conform Teoremei Fundamentale a lui Cauchy $\int_{\gamma} (iz+2)\ dz = 0$, deoarece funcţia $f(z) = iz+2$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$.

Metoda 3.

Funcţia $f(z) = iz+2$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$, deci f admite primitive pe $\mathbb{C}$:

$$\int_{\gamma} (iz+2)\ dz = \int_{\gamma_1} (iz+2)\ dz + \int_{\gamma_2} (iz+2)\ dz = \left(i\frac{z^2}{2} + 2z\right)\Big|_{\gamma_1} + \left(i\frac{z^2}{2} + 2z\right)\Big|_{\gamma_2} = 0,$$

deoarece γ_1 şi γ_2 sunt curbe închise.

30. Să se calculeze
$$\int_\gamma \frac{zdz}{z^2-1}\,, \quad \text{unde } \gamma : |z| = a, \quad \text{cu } a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\,.$$

Rezolvare:

Dacă $a \in (0,1)$, atunci se poate aplica Teorema Fundamentală a lui Cauchy deoarece funcţia $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$ este olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus\{\pm 1\}$, deci şi pe interiorul cercului γ (care este o curbă închisă ce nu conţine punctele ± 1). Obţinem $\displaystyle\int_\gamma \frac{zdz}{z^2-1} = 0$.

Pentru $a \in (1, +\infty)$ se poate aplica Formula Integrală a lui Cauchy deoarece punctele $z_{1,2} = \pm 1$ aparţin interiorului cercului γ .

Metoda 1.

Evident, putem descompune în fracţii simple
$$\frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right)$$
şi obţinem
$$\int_\gamma \frac{zdz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{dz}{z+1}\,,$$
iar pentru fiecare integrală în parte aplicăm Formula Integrală a lui Cauchy şi obţinem
$$\int_\gamma \frac{zdz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot 1\Big|_{z=1} + \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot 1\Big|_{z=-1} = \pi i + \pi i = 2\pi i\,.$$

Metoda 2.

Prezentăm în continuare o metodă alternativă de calcul[4].

Să considerăm două cercuri centrate în punctele ± 1 şi de raze suficient de mici astfel încât să nu intersecteze cercul $|z| = a > 1$. Deci să notăm
$$\gamma_1 : |z+1| = r_1 \quad \text{şi} \quad \gamma_2 : |z-1| = r_2$$
iar cu
$$D := B(0,a) \setminus \left(\overline{B(0,r_1)} \cup \overline{B(0,r_2)}\right)$$
domeniul deschis care e mărginit de curba $\gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ (iar curbele $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ sunt parcurse astfel încât domeniul D marginit de ele să rămână în stânga; prin urmare γ are sens direct trigonometric iar γ_1 şi γ_2 au sens invers trigonometric).

Să observăm că domeniul D mărginit de curbele $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ nu este un simplu conex.

Deci conform Teoremei Fundamentale a lui Cauchy[5]
$$\int_{\gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2} \frac{zdz}{z^2-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_\gamma \frac{zdz}{z^2-1} + \int_{\gamma_1} \frac{zdz}{z^2-1} + \int_{\gamma_2} \frac{zdz}{z^2-1} = 0\,,$$
adică
$$\int_\gamma \frac{zdz}{z^2-1} = \int_{\bar\gamma_1} \frac{zdz}{z^2-1} + \int_{\bar\gamma_2} \frac{zdz}{z^2-1}\,,$$

[4] Această metodă de calcul reprezintă, de fapt, demonstraţia **Teoremei Reziduurilor**.

[5] Considerăm următorul caz particular al Teoremei Fundamentale a lui Cauchy: fie un domeniu deschis D care este (multiplu conex) mărginit cu frontiera dată de reuniunea a trei curbe γ_k , $k = \overline{1,3}$, simple, închise şi netede. Presupunem că funcţia f este olomorfă de $D \cup (\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3) = \bar{D}$. Atunci
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0.$$
Având în vedere că cele trei integrale curbilinii depind de sensul de parcurgere al curbei γ_k , $k = \overline{1,3}$, precizăm că, **prin convenţie, sensul de parcurgere al curbelor γ_k care mărginesc domeniul mărginit D este luat astfel încât domeniul D să rămână în stânga.**

unde curbele $\bar{\gamma}_1$ şi $\bar{\gamma}_2$ sunt curbele γ_1 şi respectiv γ_2 parcurse în sens opus, deci au sens direct trigonometric.

Acum, pentru a calcula integralele avem două metode: fie folosind parametrizarea curbelor fie cu Formula Integrală a lui Cauchy.

Astfel avem:

fie

$$\bar{\gamma}_1 : z(\theta) = -1 + r_1 e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{şi} \quad \bar{\gamma}_2 : z(\theta) = 1 + r_2 e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

iar (conform şi Teoremei Fundamentale a lui Cauchy)

$$\int_{\bar{\gamma}_1} \frac{zdz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\int_{\bar{\gamma}_1} \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2}\int_{\bar{\gamma}_1} \frac{dz}{z+1} = 0 + \frac{1}{2}\int_{\bar{\gamma}_1} \frac{dz}{z+1} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r_1 e^{i\theta}}\, d\left(r_1 e^{i\theta}\right) = \pi i$$
$$\int_{\bar{\gamma}_2} \frac{zdz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\int_{\bar{\gamma}_2} \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2}\int_{\bar{\gamma}_2} \frac{dz}{z+1} = \frac{1}{2}\int_{\bar{\gamma}_2} \frac{dz}{z-1} + 0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r_2 e^{i\theta}}\, d\left(r_2 e^{i\theta}\right) = \pi i$$

fie

$$\int_{\bar{\gamma}_1} \frac{zdz}{z^2-1} = \int_{\bar{\gamma}_1} \frac{\frac{z}{z-1}}{z+1}\, dz = 2\pi i \, \frac{z}{z-1}\Big|_{z=-1} = \pi i$$
$$\int_{\bar{\gamma}_2} \frac{zdz}{z^2-1} = \int_{\bar{\gamma}_2} \frac{\frac{z}{z+1}}{z-1}\, dz = 2\pi i \, \frac{z}{z+1}\Big|_{z=1} = \pi i.$$

31. Să se calculeze
$$\int_\gamma \frac{z\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz,$$
unde γ este o curbă închisă, simplă şi netedă pe porţiuni.

Rezolvare:

Să notăm cu D domeniul dat de interiorul curbei γ.

Dacă $\pm 1 \notin D$, atunci se aplică Teorema Fundamentală a lui Cauchy deoarece funcţia $f(z) = \frac{z\cos(\pi z)}{z^2-1}$ este olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus\{\pm 1\}$, deci şi pe interiorul curbei γ (care este o curbă închisă ce nu conţine punctele ± 1). Obţinem $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz = 0.$

Dacă $-1 \in D, 1 \notin D$, atunci se aplică Formula Integrală a lui Cauchy deoarece punctul $a = -1$ aparţine interiorului curbei γ iar integrandul este de tipul $\frac{f(z)}{z+1}$, unde $f(z) = \dfrac{z\cos(\pi z)}{z-1}$ este olomorfă în interiorului curbei γ. În concluzie

$$\int_\gamma \frac{z\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz = \int_\gamma \frac{\frac{z\cos(\pi z)}{z-1}}{z+1}\, dz = 2\pi i\, f(-1) = 2\pi i\, \frac{1}{-2} = -\pi i\,.$$

Dacă $1 \in D, -1 \notin D$, atunci se aplică Formula Integrală a lui Cauchy deoarece punctul $a = 1$ aparţine interiorului curbei γ iar integrandul este de tipul $\frac{f(z)}{z-1}$, unde $f(z) = \dfrac{z\cos(\pi z)}{z+1}$ este olomorfă în interiorului curbei γ. În concluzie

$$\int_\gamma \frac{z\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz = \int_\gamma \frac{\frac{z\cos(\pi z)}{z+1}}{z-1}\, dz = 2\pi i\, f(1) = 2\pi i\, \frac{-1}{2} = -\pi i\,.$$

Dacă $\pm 1 \in D$, atunci se aplică Formula Integrală a lui Cauchy deoarece punctele ± 1 aparţin interiorului curbei γ .

Pentru aceasta să considerăm două cercuri centrate în punctele ± 1 şi de raze suficient de mici astfel încât să nu intersecteze curba γ. Deci să notăm

$$\gamma_1 : |z+1| = r_1 \quad \text{şi} \quad \gamma_2 : |z-1| = r_2$$

iar cu

$$\Delta := D \setminus \left(\overline{B(0,r_1)} \cup \overline{B(0,r_2)}\right)$$

domeniul deschis care e mărginit de curba $\gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ (iar curbele $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ sunt parcurse astfel încât domeniul D marginit de ele să rămână în stânga; prin urmare γ are sens direct trigonometric iar γ_1 şi γ_2 au sens invers trigonometric).

Să observăm că domeniul D mărginit de curbele $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ nu este un simplu conex.

Deci conform Teoremei Fundamentale a lui Cauchy

$$\int_{\gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2} \frac{z\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\gamma} \frac{z\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz = \int_{\bar{\gamma}_1} \frac{z\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz + \int_{\bar{\gamma}_2} \frac{z\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz\,,$$

unde curbele $\bar{\gamma}_1$ şi $\bar{\gamma}_2$ sunt curbele γ_1 şi respectiv γ_2 parcurse în sens opus, deci au sens direct trigonometric.

Acum, pentru a calcula integralele folosim Formula Integrală a lui Cauchy.

Astfel avem

$$\int_{\bar{\gamma}_1} \frac{z\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz = \int_{\bar{\gamma}_1} \frac{\frac{z\cos(\pi z)}{z-1}}{z+1}\,dz = 2\pi i\,\frac{z\cos(\pi z)}{z-1}\Big|_{z=-1} = -\pi i$$

$$\int_{\bar{\gamma}_2} \frac{z\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz = \int_{\bar{\gamma}_2} \frac{\frac{z\cos(\pi z)}{z+1}}{z-1}\,dz = 2\pi i\,\frac{z\cos(\pi z)}{z+1}\Big|_{z=1} = -\pi i.$$

32. Să se calculeze

$$\int_{\gamma} \frac{z^{100}\,e^{i\pi z}}{z^2+1}\,dz, \quad \gamma : 4x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Rezolvare:

Să observăm că γ este elipsa $\dfrac{x^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ care conţine punctele $\pm i$.

Se aplică Torema Fundamentală a lui Cauchy şi Formula Integrală a lui Cauchy (vezi Problema 30). Astfel putem scrie:

$$\int_{\gamma} \frac{z^{100}\,e^{i\pi z}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\,\frac{z^{100}\,e^{i\pi z}}{z-i}\Big|_{z=-i} + 2\pi i\,\frac{z^{100}\,e^{i\pi z}}{z+i}\Big|_{z=i} = -2\pi\ \mathrm{sh}(\pi)\,.$$

33. Să se calculeze

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1}\,, \quad \gamma : |z| = R.$$

Rezolvare:

Dacă $R < 1$, atunci se aplică Teorema Fundamentală a lui Cauchy deoarece funcţia $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ este olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$, deci şi pe interiorul curbei γ (care este o curbă închisă ce nu conţine punctele $\pm i$). Obţinem $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1}\,dz = 0$.

Dacă $R > 1$, atunci se aplică Formula Integrală a lui Cauchy (vezi Problema 30):

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i\,\frac{1}{z-i}\Big|_{z=-i} + 2\pi i\,\frac{1}{z+i}\Big|_{z=i} = 0.$$

34. Să se calculeze

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^n(1-z)^m}\,dz, \quad \gamma : |z| = 2.$$

Rezolvare:

Să observăm că cercul γ conţine punctele 0 şi 1.

Se aplică Torema Fundamentală a lui Cauchy şi Formula Integrală a lui Cauchy (vezi Problema 30). Astfel putem scrie:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^n(1-z)^m}\,dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\left[\frac{1}{(1-z)^m}\right]^{(n-1)}\Big|_{z=0} + \frac{2\pi i}{(m-1)!}\left[\frac{1}{z^n}\right]^{(m-1)}\Big|_{z=1}.$$