Facultatea de Matematică
Calcul Integral şi Elemente de Analiză Complexă, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 19 – 20

Capitolul X. Integrale Curbilinii: Serii Laurent şi Teorema Reziduurilor

1. Să se determine tipul de singularitate pentru următoarele funcţii în punctele indicate. Să se calculeze şi reziduul[1] în acele puncte.

$(a)\ f(z)=\dfrac{\sin z}{z},\ z=0;\qquad (b)\ f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2},\ z=0;$

$(c)\ f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}},\ z=0;\qquad (d)\ f(z)=e^z\,e^{\frac{1}{z}},\ z=0;$

$(e)\ f(z)=\left(\sin\dfrac{1}{z}\right)^2,\ z=0;\qquad (f)\ f(z)=\dfrac{\operatorname{tg}(z)}{z^2},\ z=0;$

$(g)\ f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z(1-z)^2},\ z\in\{0,1\};\qquad (h)\ f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z^2+4)^3},\ z\in\{-i,\pm 2i\};$

$(i)\ f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^n},\ z\in\{\pm i\};\qquad (j)\ f(z)=\dfrac{z^2\sin\frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)},\ z\in\{0,1,2\}.$

Rezolvare:

(a) Partea principală nu are nici un termen, deci $z=0$ este singularitate aparentă.

(b) Partea principală are o un singur termen, deci $z=0$ este pol de ordin 1 (pol simplu) iar $\text{Rez}(f(z),0)=c_{-1}=1$.

(c) Partea principală are o infinitate de termeni, deci $z=0$ este singularitate esenţială iar $\text{Rez}(f(z),0)=c_{-1}=\dfrac{1}{3!}$.

(d) Partea principală are o infinitate de termeni, deci $z=0$ este singularitate esenţială iar $\text{Rez}(f(z),0)=c_{-1}=\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{1!2!}+\dfrac{1}{2!3!}+\dfrac{1}{3!4!}+\dots$.

(e) Partea principală are o infinitate de termeni, deci $z=0$ este singularitate esenţială.

(f) Avem $f(z)=\dfrac{\sin(z)}{z}\dfrac{1}{z\cos z}$, deci deci $z=0$ este pol simplu iar $\text{Rez}(f(z),0)$ se calculează conform formulei[2] şi se obţine

$$\text{Rez}(f(z),0)=\lim_{z\to 0}[(z-0)f(z)]=\lim_{z\to 0}\left[\frac{\sin(z)}{z}\frac{1}{\cos z}\right]=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1.$$

[1] **Reziduul unei funcţii într-un punct singular.**

- Fie a un punct singular (de tip pol sau singularitate esenţială) pentru funcţia f. Atunci $\text{Rez}(f(z),a)=c_{-1}$, unde c_{-1} este coeficientul termenului $\dfrac{1}{z-a}$ din dezvoltarea Laurent a funcţiei f în jurul punctului a.
- Fie a un punct singular de tip pol de ordin k pentru funcţia f. Atunci

$$\text{Rez}(f(z),a)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^k f(z)\right]^{(k-1)}.$$

[2] **Reziduul unei funcţii într-un pol simplu.**
Fie a un punct singular de tip pol simplu. Atunci, în particular, obţinem formula

$$\text{Rez}(f(z),a)=\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)].$$

(g) $z=0$ este singularitate esenţială şi $z=1$ este pol de ordinul 2 (pol dublu).

(h) $z=-i$ este pol simplu şi $z=\pm 2i$ sunt poli tripli iar[3]

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Rez}\left(f\left(z\right),-i\right)=\lim_{z\to -i}\left[\left(z+i\right)f\left(z\right)\right]=\lim_{z\to -i}\left[\frac{1}{\left(z^2+4\right)^3}\right]=\frac{1}{\left(\left(-i\right)^2+4\right)^3}=\frac{1}{3^3}\,,\\
&\operatorname{Rez}\left(f\left(z\right),2i\right)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2i}\left[\left(z-2i\right)^3 f\left(z\right)\right]''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2i}\left[\frac{1}{\left(z+i\right)\left(z+2i\right)^3}\right]''\,,\\
&\operatorname{Rez}\left(f\left(z\right),-2i\right)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -2i}\left[\left(z+2i\right)^3 f\left(z\right)\right]''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -2i}\left[\frac{1}{\left(z+i\right)\left(z-2i\right)^3}\right]''\,.
\end{aligned}$$

(i) $z=\pm i$ sunt poli simpli iar

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Rez}\left(f\left(z\right),-i\right)=\lim_{z\to -i}\left[\left(z+i\right)f\left(z\right)\right]=\lim_{z\to -i}\left[\frac{1}{\left(z-i\right)^n}\right]=\frac{1}{\left(-2i\right)^n}\,,\\
&\operatorname{Rez}\left(f\left(z\right),i\right)=\lim_{z\to i}\left[\left(z-i\right)f\left(z\right)\right]=\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{\left(z+i\right)^n}\right]=\frac{1}{\left(2i\right)^n}\,.
\end{aligned}$$

(j) $z=0$ este singularitate esenţială şi $z=1,2$ sunt poli simpli iar

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Rez}\left(f\left(z\right),1\right)=\lim_{z\to 1}\left[\left(z-1\right)f\left(z\right)\right]=\lim_{z\to 1}\left[\frac{z^2\sin\frac{1}{z}}{z-2}\right]=-\sin 1\,,\\
&\operatorname{Rez}\left(f\left(z\right),2\right)=\lim_{z\to 2}\left[\left(z-2\right)f\left(z\right)\right]=\lim_{z\to 2}\left[\frac{z^2\sin\frac{1}{z}}{z-1}\right]=4\sin\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, pentru a calcula $\operatorname{Rez}\left(f\left(z\right),0\right)$,

$$\begin{aligned}
&z^2\sin\frac{1}{z}=\frac{z}{1!}-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\ldots\,,\\
&\frac{1}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\\
&=\left(1+z+z^2+z^3+\ldots\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\ldots\right)\\
&=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)z+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)z^2+\ldots\,.
\end{aligned}$$

Deci

$$f\left(z\right)=\left(\frac{z}{1!}-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\ldots\right)\left(\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)z+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)z^2+\ldots\right)$$

şi astfel se poate obţine coeficientul c_{-1} al termenului $\frac{1}{z}$.

2. Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)^2}\,dz\,,$$

unde γ este:

(a) $x^2+4y^2-1=0$; (b) $|z|=1$.

Rezolvare:

Funcţia f are în $z=0$ un pol simplu şi în $z=\pm i$ un pol dublu.

[3] **Reziduul unei funcţii într-un pol triplu.**
Fie a un punct singular de tip pol triplu. Atunci, în particular, obţinem formula

$$\operatorname{Rez}\left(f\left(z\right),a\right)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to a}\left[\left(z-a\right)^3 f\left(z\right)\right]''\,.$$

(a) Curba γ este elipsa $\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$ care mărgineşte un domeniu ce conţine în interior doar polul simplu $z=0$. Deci

$$I=2\pi i\,\mathrm{Rez}\left(f\left(z\right),0\right)=2\pi i\ \lim_{z\to 0}\left[zf\left(z\right)\right]=2\pi i\ \lim_{z\to 0}\left[\frac{e^{iz}}{\left(z^2+1\right)^2}\right]=2\pi i\ \frac{e^0}{1}=2\pi i\,.$$

(b) Curba γ mărgineşte un domeniu ce conţine în interior toţi cei poli. Deci

$$I=2\pi i\ \left[\mathrm{Rez}\left(f\left(z\right),0\right)+\mathrm{Rez}\left(f\left(z\right),i\right)+\mathrm{Rez}\left(f\left(z\right),-i\right)\right]\ ,$$

unde[4]

$$\mathrm{Rez}\left(f\left(z\right),i\right)=\lim_{z\to i}\left[\left(z-i\right)^2f\left(z\right)\right]'=\lim_{z\to i}\left[\frac{e^{iz}}{z\left(z+i\right)^2}\right]'$$

şi

$$\mathrm{Rez}\left(f\left(z\right),-i\right)=\lim_{z\to -i}\left[\left(z+i\right)^2f\left(z\right)\right]'=\lim_{z\to -i}\left[\frac{e^{iz}}{z\left(z-i\right)^2}\right]'.$$

3. Să se calculeze
$$\int_\gamma\frac{z^3}{z^4-1}\,dz\,,$$
unde γ este:

(a) $x^2+16y^2-4=0$; (b) $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rezolvare:

Funcţia f are patru poli simpli $z_{1,2}=\pm1$, $z_{3,4}=\pm i$.

(a) Curba γ este elipsa $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$ care mărgineşte un domeniu ce conţine în interior doar polii simpli $z_{1,2}=\pm1$. Deci[5]

$$I=2\pi i\ \left[\mathrm{Rez}\left(f\left(z\right),-1\right)+\mathrm{Rez}\left(f\left(z\right),1\right)\right]=2\pi i\ \left[\frac{z^3}{4z^3}\Big|_{z=-1}+\frac{z^3}{4z^3}\Big|_{z=1}\right]=2\pi i\ \left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]=\pi i.$$

(b) Curba γ este un cerc care mărgineşte un domeniu ce nu conţine în interior nici un pol. Deci, conform Teoremei Fundamentale a lui Cauchy, integrala este 0.

4. Să se calculeze
$$\int_{|z|=3}\frac{z+2}{\left(z-1\right)\left(z^3+3z^2+3z+1\right)}\,dz\,.$$

5. Să se calculeze
$$\int_{|z|=a}\frac{dz}{z^2-2az+1}\,,\quad \text{unde } a>1.$$

Rezolvare:

[4] **Reziduul unei funcţii într-un pol dublu.**
Fie a un punct singular de tip pol dublu. Atunci, în particular, obţinem formula

$$\mathrm{Rez}\left(f\left(z\right),a\right)=\lim_{z\to a}\left[\left(z-a\right)^2f\left(z\right)\right].$$

[5] **Reziduul unei funcţii într-un pol simplu.**
Avem şi următoarea formulă de calcul a unui reziduu într-un pol simplu:

$$\mathrm{Rez}\left(f\left(z\right),a\right)=\frac{g\left(a\right)}{h'\left(a\right)}\,,$$

unde $f\left(z\right)=\frac{g(z)}{h(z)}$ astfel încât $g\left(a\right)\neq0$, $h\left(a\right)=0$, $h'\left(a\right)\neq0$.

Funcţia f are doi poli simpli $z_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2-1}$. Avem că $\operatorname{Im}(z_{1,2}) = 0$ şi

$$0 < z_1 < a < z_2 \,,$$

deci doar z_1 se află în interiorul domeniului mărginit de cercul $|z| = a$.

Atunci

$$I = 2\pi i \operatorname{Rez}(f(z), z_1) = 2\pi i \, \frac{1}{2z-2a}\Big|_{z=z_1} = -\frac{\pi i}{\sqrt{a^2-1}} \,.$$

6. Să se calculeze

$$\int_{|z|=a} \frac{dz}{(z^2-2az+1)^2} \,, \quad \text{unde } a > 1.$$

Rezolvare:

Funcţia f are doi poli dubli $z_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2-1}$. Avem că $\operatorname{Im}(z_{1,2}) = 0$ şi

$$0 < z_1 < a < z_2 \,,$$

deci doar z_1 se află în interiorul domeniului mărginit de cercul $|z| = a$, adică $|z_1| < a < |z_2|$.

Atunci

$$I = 2\pi i \operatorname{Rez}(f(z), z_1) = 2\pi i \, \lim_{z\to z_1} \left[(z-z_1)^2 f(z)\right]' = 2\pi i \, \lim_{z\to z_1} \left[\frac{1}{(z-z_2)^2}\right]'$$

$$= 2\pi i \, \frac{-2}{(z-z_2)^3}\Big|_{z=z_1} = \frac{-2\pi i}{\sqrt{a^2-1}^3} \,.$$

7. Să se calculeze

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-2aiz+1} \,, \quad \text{unde } a > 0.$$

Rezolvare:

Funcţia f are doi poli simpli $z_{1,2} = i\left(a \pm \sqrt{a^2+1}\right)$. Avem că $\operatorname{Re}(z_{1,2}) = 0$ şi

$$|z_{1,2}| = \left|a \pm \sqrt{a^2+1}\right| .$$

Dar

$$-1 < a - \sqrt{a^2+1} < 0 \quad \text{şi} \quad a + \sqrt{a^2+1} > 1,$$

deci doar z_1 se află în interiorul domeniului mărginit de cercul $|z| = 1$, adică $|z_1| < 1 < |z_2|$.

Atunci

$$I = 2\pi i \operatorname{Rez}(f(z), z_1) = 2\pi i \, \frac{1}{z-z_2}\Big|_{z=z_1} = \frac{-2\pi i}{\sqrt{a^2-1}^3} \,.$$

8. Să se calculeze

$$\int_{|z|=1} \frac{\left(z^2+1\right) dz}{(z^2-2aiz+1)^2} \,, \quad \text{unde } a > 0.$$

Rezolvare:

Funcţia f are doi poli dubli $z_{1,2} = i\left(a \pm \sqrt{a^2+1}\right)$. Avem că $\operatorname{Re}(z_{1,2}) = 0$ şi

$$|z_{1,2}| = \left|a \pm \sqrt{a^2+1}\right| .$$

Dar

$$-1 < a - \sqrt{a^2+1} < 0 \quad \text{şi} \quad a + \sqrt{a^2+1} > 1,$$

deci doar z_1 se află în interiorul domeniului mărginit de cercul $|z| = 1$, adică $|z_1| < 1 < |z_2|$.

Atunci

$$I = 2\pi i \operatorname{Rez}(f(z), z_1) = 2\pi i \, \lim_{z\to z_1} \left[(z-z_1)^2 f(z)\right]' = 2\pi i \, \lim_{z\to z_1} \left[\frac{z^2+1}{(z-z_2)^2}\right]' .$$

9. Să se calculeze
$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2\left(z^4+1\right)}\, dz\,.$$

Rezolvare:

Să observăm că
$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$
deci
$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{1!} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \ldots\,.$$
Deci funcţia $f(z) = \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{z(z^4+1)}$ are doar poli simpli daţi de $z\left(z^4+1\right) = 0$, adică
$$z = 0 \quad \text{şi} \quad z^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi,$$
deci
$$\begin{aligned} z_k &= \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\,, \quad k = \overline{0,3} \\ z_4 &= 0. \end{aligned}$$
Toţi cei cinci poli se află în interiorul domeniului mărginit de cercul $|z| = 2$.
Atunci
$$I = 2\pi i \sum\nolimits_{k=0}^{4} \operatorname{Rez}\left(f(z), z_k\right)\,,$$
unde
$$\operatorname{Rez}\left(f(z), z_k\right) = \frac{\frac{\sin z}{z}}{\left[z\left(z^4+1\right)\right]'}\Big|_{z=z_k} = \frac{\frac{\sin z_k}{z_k}}{5z_k^4+1}\,.$$

10. Să se calculeze
$$\int_{\gamma} \frac{z^{13}}{(z-2)^4\left(z^5+3\right)^2}\, dz\,,$$
unde $\gamma : 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

11. Să se calculeze
$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2}\, dz\,.$$

Rezolvare:

Polii sunt daţi de $z\cos z = 0$, adică
$$z = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iz} = -1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}.$$
Obţinem
$$\frac{2iz - i\pi}{2\pi i} \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Deci doar trei poli se află în interiorul domeniului mărginit de cercul $|z| = 1$:
$$z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{\pi}{2}\,, \quad z_3 = -\frac{\pi}{2}\,.$$
Atunci
$$I = 2\pi i \sum\nolimits_{k=1}^{3} \operatorname{Rez}\left(f(z), z_k\right)\,,$$
unde
$$\operatorname{Rez}\left(f(z), z_k\right) = \frac{\frac{\sin z}{z}}{\left[z\cos z\right]'}\Big|_{z=z_k}\,.$$

12. Să se calculeze

$$\int_{\gamma} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}\, dz\,,$$

unde γ este:

(a) $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$; (b) $|z| = \sqrt{2}$.

Rezolvare:

Să observăm că $z_1 = -1$ este pol simplu iar $z_2 = 0$ este singularitate esenţială.

Cercul $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ conţine doar singularitatea $z_2 = 0$ iar cercul $|z| = \sqrt{2}$ conţine ambele singularităţi.

13. Să se calculeze

$$\int_{|z|=3} \left(1+z+z^2\right)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right) dz\,.$$

14. Să se calculeze integrala reală

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2a\cos t + a^2}\,, \quad \text{unde } |a| \neq 1,$$

folosind teorema reziduurilor.

15. Să se calculeze integrala reală

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\cos t}{5+4\sin t}\, dt\,,$$

folosind teorema reziduurilor.

16. Să se calculeze integrala reală

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}\,,$$

folosind teorema reziduurilor.

17. Să se calculeze integrala reală

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{m-\cos t}\,, \quad \text{unde } m > 1,$$

folosind teorema reziduurilor.

18. Să se calculeze integrala reală

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx\,,$$

folosind teorema reziduurilor.

19. Să se calculeze integrala reală

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}\,,$$

folosind teorema reziduurilor.

20. Să se calculeze integrala reală

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{a^2+x^2}\, dx\,, \quad \text{unde } \alpha, a > 0,$$

folosind teorema reziduurilor.

21. Să se calculeze integrala reală

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2}\, dx\,,$$

folosind teorema reziduurilor.