Facultatea de Matematică
Calcul integral, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 3 – 4

Capitolul II. Integrale cu parametru

1. Studiaţi convergenţa integralei:
$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right) dx\,.$$

   Rezolvare:

   Folosind substituţia $x^2 = t$ obţinem $x = \sqrt{t}$ şi $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$. Deci
$$I = \int_0^\infty \sin t\, \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

   Această integrală este convergentă aplicând criteriul lui Dirichlet.

   Într-adevăr, $\left|\int_a^b \sin t\,dt\right| = |\cos a - \cos b| \le 2$, pentru orice $a < b$ iar funcţia $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ este monoton descrescătoare şi mărginită pe intervalul $[1,\infty)$. Deci, conform criteriului lui Dirichlet, integrala improprie $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ este convergentă.

   Să observăm că $\int_0^\infty \sin t\,dt$ nu există (deci este divergentă) şi astfel nu putem aplica criteriul lui Abel.

   Pe de altă parte, integrala
$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$
   este convergentă deoarece funcţia $t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ este bine definită pe $(0,1]$ iar punctul 0 nu este punct singular, deoarece $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\sqrt{t} = 0$. Deci funcţia precedentă poate fi prelungită prin continuitate la o funcţia continuă, definită pe $[0,1]$, $\tilde{f}\,(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\,, & \text{dacă } t \in (0,1], \\ 0, & \text{dacă } t = 0 \end{cases}$ iar integralele din cele două funcţii coincid deoarece sunt modificate doar într-un punct, i.e.
$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 \tilde{f}\,(t)\;dt.$$

   Deci integrala $I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ este (C).

2. Arătaţi că integrala
$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$
   este divergentă în cazul $\alpha < 0$.

3. Studiaţi absoluta convergenţă a integralei:
$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$
   în cazul $\alpha > 0$.

4. Studiaţi convergenţa integralei:

$$\int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx \,, \quad \text{unde } \alpha \geq 0, k > 0.$$

Rezolvare:

Această integrală este convergentă aplicând criteriul lui Abel, deoarece $\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$ este convergentă conform criteriului lui Dirichlet iar funcţia $x \mapsto e^{-kx}$ este monotonă şi mărginită pe $[0, \infty)$ cu $\lim_{x\to\infty} e^{-kx} = 0$ pentru orice $k > 0$.

5. Calculaţi următoarea integrală cu parametru:

$$I(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x\sqrt{1-x^2}} dx \,.$$

Rezolvare:

Derivăm integrala cu parametru şi operatorul de derivare comută cu integrala:

$$I'(y) = \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x\sqrt{1-x^2}}\right)'_y dx = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \left(\operatorname{arctg}(xy)\right)'_y dx = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+x^2y^2} x \, dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+x^2y^2} dx \,.$$

Deoarece apare cantitatea $\sqrt{1-x^2}$ este utilă subsituţia $x = \sin t$, deci

$$t = \arcsin x \quad \text{şi} \quad dx = \cos t \, dt.$$

Obţinem

$$I'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \frac{1}{1+y^2\sin^2 t} \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+y^2\sin^2 t} dt.$$

Acum se face substituţia $\operatorname{tg}(t) = r$, deci

$$t = \operatorname{arctg}(r) \quad \text{şi} \quad dt = \frac{1}{1+r^2} dr \,.$$

Folosim formula $\sin t = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$ şi obţinem

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2\frac{r^2}{1+r^2}} \frac{1}{1+r^2} dr = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(y^2+1)r^2} dr = \frac{1}{y^2+1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\right)^2 + r^2} dr$$

$$= \frac{1}{y^2+1} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}} \operatorname{arctg} \frac{r}{\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}} \Bigg|_{r=0}^{r=\infty} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} (\pi/2 - 0) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \,.$$

Deci

$$I'(y) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \quad \Rightarrow \quad I(y) = \frac{\pi}{2} \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) + C$$

Dar, conform definiţiei,

$$I(0) = 0, \text{ deci } C = 0.$$

6. Calculaţi următoarea integrală:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx \,.$$

Rezolvare:

Observăm că

$$\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2} dy$$

şi, deoarece putem schimba ordinea de integrare, obţinem:

$$I = \int_0^1 \left[\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2} dy \right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) dy\,.$$

Deci, conform exerciţiului anterior,

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} dy = \frac{\pi}{2} \ln \left(y + \sqrt{y^2+1} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{\pi}{2} \ln \left(1 + \sqrt{2} \right)\,.$$

7. Calculaţi următoarea integrală:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx\,.$$

Rezolvare:

Observăm că

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\, dy$$

şi, deoarece putem schimba ordinea de integrare, obţinem:

$$I = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}\, dy$$
$$= \ln(1+y) \Big|_{y=a}^{y=b} = \ln \frac{1+b}{1+a}\,.$$

8. Calculaţi următoarea integrală:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx\,.$$

9. Calculaţi următoarea integrală:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx\,.$$

Rezolvare:

Observăm că

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx}\, dt$$

şi, deoarece putem schimba ordinea de integrare, obţinem:

$$I = \int_0^\infty \left((\cos(ax) - \cos(bx)) \int_0^\infty e^{-tx}\, dt \right) dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty (\cos(ax) - \cos(bx))\, e^{-tx}\, dx \right) dt$$

Integrând de două ori prin părţi obţinem

$$\int_0^\infty \cos(ax)\, e^{-tx}\, dx = \frac{t}{t^2+a^2}\,, \quad \text{pentru orice } a > 0, t > 0,$$

deci

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{t}{t^2+a^2} - \frac{t}{t^2+b^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\ln(t^2+a^2) - \ln(t^2+b^2) \right) \Big|_{t=0}^{t=\infty}$$
$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t^2+a^2}{t^2+b^2} \right) \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a^2}{b^2} \right) = \ln \left(\frac{b}{a} \right)\,.$$

10. Calculaţi următoarea integrală cu parametru:

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2 - \sin^2 x\right) dx \ , \ a > 1 \, .$$

Rezolvare:

Derivăm integrala cu parametru şi operatorul de derivare comută cu integrala:

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \left(\ln\left(a^2 - \sin^2 x\right)\right)'_a \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2 - \sin^2 x} 2a \, dx = 2a \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 - \sin^2 x} \, .$$

Se face substituţia $\operatorname{tg}(x) = t$, deci

$$x = \operatorname{arctg}(t) \quad \text{şi} \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt \, .$$

Folosind formula $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ obţinem

$$\begin{aligned} I'(a) &= 2a \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 - \sin^2 x} = 2a \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 2a \int_0^{+\infty} \frac{1}{(a^2-1) t^2 + a^2} dt = 2a \frac{1}{a^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)^2} dt \\ &= \frac{2a}{a^2-1} \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}} \Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} (\pi/2 - 0) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \, . \end{aligned}$$

Deci

$$I'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad \Rightarrow \quad I(a) = \pi \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) + C.$$

11. Folosind valoarea integralei

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \, ,$$

calculaţi integrala

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\left(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos x\right)^2} \, .$$

12. Să se calculeze integrala cu parametru:

$$I(a) = \int_0^{\pi} \frac{1}{a + b\cos x} dx \ , \quad \text{unde } a > b > 0.$$

Apoi derivând în raport cu a integrala cu parametru $I(a)$ să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(a + b\cos x)^2} dx \quad \text{şi} \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{(a + b\cos x)^3} dx.$$

Rezolvare:

$$I(a) = \int_0^{\pi} \frac{1}{a + b\cos x} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{a + b\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{2}{a-b} \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2 + t^2} dt$$

$$= \frac{2}{a-b} \frac{1}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}} \Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{\pi}{2} \, .$$

Derivăm şi obţinem

$$I'(a) = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{a+b\cos x}\right)'_a dx = \int_0^{\pi} \frac{-1}{(a+b\cos x)^2}(1+0)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{-1}{(a+b\cos x)^2} dx\,.$$

Pe de altă parte

$$I'(a) = \left(\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)'_a = \pi\left[\left(a^2-b^2\right)^{-1/2}\right]'_a = \pi\frac{-1}{2}\left(a^2-b^2\right)^{-3/2} 2a.$$

13. Să se calculeze integrala cu parametru:

$$I(a) = \int_0^{\pi} \frac{1}{a+b\cos x}\,dx\ ,\ \text{unde } 0<a<b.$$

14. Să se calculeze integrala cu parametru:

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos x}\,dx\ ,\ \text{unde } a>b>0.$$

Apoi derivând în raport cu a integrala cu parametru $I(a)$ să se calculeze

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos x)^2}\,dx \quad \text{şi} \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos x)^3}\,dx.$$

Rezolvare:

Observăm că $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos x}dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{a+b\cos x}dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos x}dx = 2\cdot\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

15. Să se calculeze integrala cu parametru

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{1}{a+x^2}\,dx$$

Apoi derivând în raport cu a integrala cu parametru $I(a)$ să se calculeze

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx \quad \text{şi} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{(a+x^2)^3}\,dx$$

16. Să se calculeze integrala cu parametru

$$I(a) = \int_0^{c} \frac{1}{a+x^2}\,dx.$$

Apoi derivând în raport cu a integrala cu parametru $I(a)$ să se calculeze

$$\int_0^{c} \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx \quad \text{şi} \quad \int_0^{c} \frac{1}{(a+x^2)^3}\,dx.$$

17. Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Rezolvare:

Ştim că următoarea integrală este convergentă (se aplică criteriul lui Abel)

$$I(\alpha) := \int_0^{\infty} e^{-kx}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx\,, \quad \text{unde } \alpha\ge 0, k>0.$$

Calculăm derivata şi apoi aplicăm metoda de integrare prin părţi:

$$\begin{aligned}
I'(\alpha) &= \int_0^\infty \left(e^{-kx}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\right)'_\alpha dx = \int_0^\infty e^{-kx}\frac{\cos(\alpha x)}{x}\,x\,dx = \int_0^\infty e^{-kx}\cos(\alpha x)\,dx \\
&= \frac{e^{-kx}}{-k}\cos(\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{-k}(-\alpha)\sin(\alpha x)\,dx \\
&= \frac{e^{-kx}}{-k}\cos(\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{\alpha}{k}\int_0^\infty e^{-kx}\sin(\alpha x)\,dx \qquad (1)\\
&= \frac{e^{-kx}}{-k}\cos(\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{\alpha}{k}\left(\frac{e^{-kx}}{-k}\sin(\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{-k}\alpha\cos(\alpha x)\,dx\right) \\
&= \frac{e^{-kx}}{-k}\cos(\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{\alpha}{k^2}e^{-kx}\sin(\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{\alpha^2}{k^2}\int_0^\infty e^{-kx}\cos(\alpha x)\,dx.
\end{aligned}$$

Dar $\frac{e^{-kx}}{-k}\cos(\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{-1}{k}(0-1) = \frac{1}{k}$ iar $\frac{\alpha}{k^2}e^{-kx}\sin(\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\alpha}{k^2}(0-0) = 0$,deci

$$I'(\alpha) = \frac{1}{k} - \frac{\alpha^2}{k^2}I'(\alpha) \quad \Rightarrow \quad I'(\alpha) = \frac{k}{\alpha^2+k^2}.$$

Prin integrare obţinem

$$I(\alpha) = \int \frac{k}{\alpha^2+k^2}\,d\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{k}\right) + C.$$

Dar, conform definiţiei,

$$I(0) = 0, \text{ deci } C = 0.$$

Deci

$$I(1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k}\right) = \int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

şi, trecând la limită,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \lim_{k\to 0_+}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to 0_+}\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin(x)}{x}\,dx \\
&= \int_0^\infty \lim_{k\to 0} e^{-kx}\frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx.
\end{aligned}$$

18. Să se calculeze integrala

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

derivând integrala cu parametru

$$\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin x}{x}\,dx\,, \quad \text{unde } k > 0.$$

19. Calculaţi* următoarea integrală:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\,.$$

Rezolvare:

Folosind substituţia $x = ut$, cu $u > 0$ fixat, obţinem $dx = udt$ şi

$$I = \int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,udt.$$

*Există mai multe metode de a calcula această integrală. Unde dintre ele este cu ajutorul integralei duble (şi a schimbării de variabile în cadrul integralei duble).

Deci, schimbând ordinea de integrare, calculăm pătratul intergalei I :

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right) e^{-u^2}\,du = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,ue^{-u^2}\,dt\right) du$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty ue^{-\left(1+t^2\right)u^2}\,du\right) dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\left(1+t^2\right)u^2}}{-2\left(1+t^2\right)}\Big|_{u=0}^{u=\infty}\right) dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{-1}{2\left(1+t^2\right)}\left(0-1\right)\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctgt}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Obţinem

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

20. Calculaţi **integrala lui Gauss** (sau **integrala Euler–Poisson**):

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx\,.$$

Rezolvare:

Evident,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

21. Calculaţi următoarele integrale:

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right)\,dx \quad \text{şi} \quad \int_0^\infty \cos\left(x^2\right)\,dx\,.$$

Rezolvare:

Folosind substituţia $x^2 = t$ obţinem

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

care este convergentă conform criteriului lui Dirichlet.

Pe de altă parte, folosind valoarea integralei Gaussiane, avem

$$\int_0^\infty e^{-tu^2}\,du = \int_0^\infty e^{-\left(u\sqrt{t}\right)^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^\infty e^{-\left(u\sqrt{t}\right)^2}\,d\left(u\sqrt{t}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

deci

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tu^2}\,du.$$

Deci, schimbând ordinea de integrare, calculăm

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\sin t\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tu^2}\,du\right) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-tu^2}\sin t\,du\right) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-tu^2}\sin t\,dt\right) du.$$

Folosind metoda de integrare prin părţi avem, vezi calculul (1),

$$J := \int_0^\infty e^{-tu^2}\sin t\,dt = \frac{-1}{u^2}\,e^{-u^2t}\sin t\,\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \frac{1}{u^4}\,e^{-u^2t}\cos t\,\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{1}{u^4}\,J\,.$$

Deci

$$J = \frac{1}{1+u^4}\,.$$

Calculând integrala obţinem

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{1+u^4}\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,.$$