

Facultatea de Matematică
 Calcul integral și Aplicații, Semestrul I
 Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 3 – 4

Capitolul II. Integrale cu parametru

1. Studiați convergența integralelor*:

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{și} \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx.$$

Rezolvare:

Folosind substituția $x^2 = t$ obținem $x = \sqrt{t}$ și $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$. Deci

$$I = \int_0^{\infty} \sin t \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Această integrală este convergentă aplicând criteriul lui Dirichlet.

Într-adevăr, $\left| \int_a^b \sin t dt \right| = |\cos a - \cos b| \leq 2$, pentru orice $a < b$ iar funcția $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ este monoton descrescătoare și mărginită pe intervalul $[1, \infty)$. Deci, conform criteriului lui Dirichlet, integrala improprie $\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ este convergentă.

Să observăm că $\int_0^{\infty} \sin t dt$ nu există (deci este divergentă) și astfel nu putem aplica criteriul lui Abel.

Pe de altă parte, integrala

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

este convergentă deoarece funcția $t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ este bine definită pe $(0, 1]$ iar punctul 0 nu este punct singular, deoarece $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \sqrt{t} = 0$. Deci funcția precedentă poate fi prelungită prin

continuitate la o funcția continuă, definită pe $[0, 1]$, $\tilde{f}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}, & \text{dacă } t \in (0, 1], \\ 0, & \text{dacă } t = 0 \end{cases}$ iar integralele

din cele două funcții coincid deoarece sunt modificate doar într-un punct, i.e.

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \tilde{f}(t) dt.$$

Deci integrala $I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ este (C).

2. Arătați că integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

este divergentă în cazul $\alpha < 0$.

Rezolvare:

Avem

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx.$$

*Integralele $\int_0^t \sin(x^2) dx$ și $\int_0^t \cos(x^2) dx$ se numesc **integrale Fresnel**.

Evident, integrala $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 x^{-\alpha} \sin x dx$ nu este improprie, dacă $\alpha < 0$, deci este o integrală Riemann, deci (C).

Pe de altă parte,

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} = x^{-\alpha} |\sin x| \geq |\sin x| \geq \sin x, \quad \text{pentru orice } x \geq 1, \alpha < 0$$

iar

$$\int_1^\infty \sin x dx \quad \text{este } (D),$$

deci, conform unui criteriu de comparație, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ este (D).

3. Studiați absoluta convergență a integralei:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

în cazul $\alpha > 0$.

Rezolvare:

Să remarcăm mai întâi că integrala $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ este (C) conform criteriului lui Dirichlet, pentru orice $\alpha > 0$.

A studia absoluta convergență a integralei $\int_1^\infty f(x) dx$ înseamnă a studia convergența integralei $\int_1^\infty |f(x)| dx$.

Dacă $\alpha > 1$, atunci avem

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha},$$

iar

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{este } (C),$$

deci, conform unui criteriu de comparație, $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$ este (C).

În consecință, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ este (AC) în cazul $\alpha > 1$.

În cazul celălalt să observăm mai întâi că

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\cos(2x)}{x^\alpha}.$$

Dar în cazul $\alpha \in (0, 1]$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{este } (D).$$

Pe de altă parte,

$$\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x^\alpha} dx \quad \text{este } (C)$$

conform criteriului lui Dirichlet, pentru orice $\alpha > 0$.

Deci

$$\frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx - \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x^\alpha} dx = (D) - (C) = (D),$$

iar conform unui criteriu de comparație vom obține că $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$ este (D).

În consecință, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ nu este (AC) în cazul $\alpha \in (0, 1]$.

4. Studiați convergența integralei:

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx, \quad \text{unde } \alpha \geq 0, k > 0.$$

Rezolvare:

Această integrală este convergentă aplicând criteriul lui Abel, deoarece $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$ este convergentă conform criteriului lui Dirichlet iar funcția $x \mapsto e^{-kx}$ este monotonă și mărginită pe $[0, \infty)$ cu $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-kx} = 0$ pentru orice $k > 0$.

5. Calculați următoarea integrală cu parametru

$$I(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

și obțineți valoarea integralei

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Rezolvare:

Derivăm integrala cu parametru și operatorul de derivare comută cu integrala:

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x\sqrt{1-x^2}} \right)'_y dx = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} (\operatorname{arctg}(xy))'_y dx = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+x^2y^2} x dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+x^2y^2} dx. \end{aligned}$$

Deoarece apare cantitatea $\sqrt{1-x^2}$ este utilă substituția $x = \sin t$, deci

$$t = \arcsin x \quad \text{și} \quad dx = \cos t dt.$$

Obținem

$$I'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \frac{1}{1+y^2 \sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+y^2 \sin^2 t} dt.$$

Acum se face substituția $\operatorname{tg}(t) = r$, deci

$$t = \operatorname{arctg}(r) \quad \text{și} \quad dt = \frac{1}{1+r^2} dr.$$

Folosim formula $\sin t = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$ și obținem

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2 \frac{r^2}{1+r^2}} \frac{1}{1+r^2} dr = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(y^2+1)r^2} dr = \frac{1}{y^2+1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\right)^2 + r^2} dr \\ &= \frac{1}{y^2+1} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{y^2+1}} \Big|_{r=0}^{r=\infty} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} (\pi/2 - 0) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}. \end{aligned}$$

Deci

$$I'(y) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \quad \Rightarrow \quad I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{y^2+1}) + C$$

Dar, conform definiției,

$$I(0) = 0, \text{ deci } C = 0.$$

6. Calculați următoarea integrală cu parametru

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha t}}{t} \cos t \, dt$$

și obțineți valoarea integralei

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-t}}{t} \cos t \, dt.$$

Rezolvare:

Derivăm integrala cu parametru și operatorul de derivare comută cu integrala:

$$I'(\alpha) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\alpha t}}{t} \cos t \right)'_{\alpha} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t} \cdot t}{t} \cos t \, dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos t \, dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

Deci

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + 1) + C$$

Dar, conform definiției,

$$I(0) = 0, \text{ deci } C = 0.$$

7. Calculați următoarea integrală:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Rezolvare:

Observăm că

$$\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2} dy$$

și, deoarece putem schimba ordinea de integrare, obținem:

$$I = \int_0^1 \left[\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2} dy \right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) dy.$$

Deci, conform exercițiului anterior,

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} dy = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

8. Calculați următoarea integrală:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx, \quad 0 < a < b.$$

Rezolvare:

Metoda I.

Observăm că

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-tx} dt$$

și, deoarece putem schimba ordinea de integrare, obținem:

$$I = \int_0^{\infty} \left((\cos(ax) - \cos(bx)) \int_0^{\infty} e^{-tx} dt \right) dx = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} (\cos(ax) - \cos(bx)) e^{-tx} dx \right) dt$$

Integrând de două ori prin părți obținem

$$\int_0^{\infty} \cos(ax) e^{-tx} dx = \frac{t}{t^2 + a^2}, \quad \text{pentru orice } a > 0, t > 0,$$

deci

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{t}{t^2 + a^2} - \frac{t}{t^2 + b^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\ln(t^2 + a^2) - \ln(t^2 + b^2) \right) \Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t^2 + a^2}{t^2 + b^2} \right) \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a^2}{b^2} \right) = \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Metoda II.

Observăm că integrala dată este de tip Froullani.

Verificăm mai întâi condițiile. Funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = -\cos x$ este o funcție continuă și mărginită. Nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ dar, în schimb, $\int_a^\infty \frac{\cos x}{x} dx$ este (C) (conform criteriului lui Dirichlet).

Deci are loc formula

$$\int_0^\infty \frac{-\cos(bx) + \cos(ax)}{x} dx = -\cos(0) \ln \frac{a}{b} = \ln \frac{b}{a}.$$

9. Calculați următoarele integrale:

$$(a) \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{\arctg(ax) - \arctg(bx)}{x} dx, \quad 0 < a < b.$$

Rezolvare:

Fiecărui exemplu i se pot aplica ambele metode de la Exercițiul 8.

(a) **Metoda I.** Observăm că

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx} dt$$

și apoi schimbăm ordinea de integrare.

Metoda II. Observăm că integrala dată este de tip Froullani cu $f(x) = -e^{-x}$.

Pentru acest exemplu avem și

Metoda III.

Observăm că $\int e^{-ax} da = \frac{e^{-ax}}{-x} + C$, adică

$$\int_a^b e^{-\alpha x} d\alpha = \frac{-e^{-\alpha x}}{x} \Big|_{\alpha=a}^{\alpha=b} = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}.$$

Deoarece putem schimba ordinea de integrare, obținem:

$$I = \int_0^\infty \left(\int_a^b e^{-\alpha x} d\alpha \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \right) d\alpha = \int_a^b \left(\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} \Big|_{x=0}^{x=\infty} \right) d\alpha$$

$$= \int_a^b \frac{1}{-\alpha} (e^{-\infty} - e^0) d\alpha = \int_a^b \frac{1}{\alpha} d\alpha = \ln \frac{b}{a}.$$

10. Calculați următoarea integrală:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx, \quad 0 < a < b.$$

Rezolvare:

Metoda I.

Observăm că $\int \sin(ax) da = \frac{\cos(ax)}{x} + C$, adică

$$\int_a^b \sin(\alpha x) d\alpha = \frac{-\cos(\alpha x)}{x} \Big|_{\alpha=a}^{\alpha=b} = \frac{-\cos(bx) + \cos(ax)}{x}.$$

Deoarece putem schimba ordinea de integrare, obținem:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x} \left(\int_a^b \sin(\alpha x) d\alpha \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx \right) d\alpha$$

Dar, schimbând variabila $y = \alpha x$ și folosind Exercițiul 19, obținem

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2},$$

deci

$$I = \int_a^b \left(\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx \right) d\alpha = \frac{\pi}{2} \int_a^b d\alpha = \frac{\pi}{2} (b - a).$$

Metoda II.

Se folosește metoda de integrare prin părți și apoi Exercițiul 19.

Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty (\cos(ax) - \cos(bx)) \left(\frac{-1}{x} \right)' dx = \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x} \Big|_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \frac{-a \sin(ax) + b \sin(bx)}{x} dx \\ &= (0 - 0) - a \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} dx + b \int_0^\infty \frac{\sin(bx)}{x} dx = \frac{\pi}{2} (b - a), \end{aligned}$$

deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(bx) - \cos(ax)) \cdot \frac{1}{x} = 0$$

iar, folosind L'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-b \sin(bx) + a \sin(ax)}{1} = 0.$$

11. Calculați următoarea integrală:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad 0 < a < b.$$

Rezolvare:

Observăm că

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$$

și, deoarece putem schimba ordinea de integrare, obținem:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy \\ &= \ln(1+y) \Big|_{y=a}^{y=b} = \ln \frac{1+b}{1+a}. \end{aligned}$$

12. Calculați următoarea integrală cu parametru:

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx, \quad a > 1.$$

Rezolvare:

Derivăm integrala cu parametru și operatorul de derivare comută cu integrala:

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} (\ln(a^2 - \sin^2 x))'_a dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2 - \sin^2 x} 2a dx = 2a \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 - \sin^2 x}.$$

Se face substituția $\operatorname{tg}(x) = t$, deci

$$x = \operatorname{arctg}(t) \quad \text{și} \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Folosind formula $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ obținem

$$\begin{aligned} I'(a) &= 2a \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 - \sin^2 x} = 2a \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 2a \int_0^{+\infty} \frac{1}{(a^2-1)t^2 + a^2} dt = 2a \frac{1}{a^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)^2} dt \\ &= \frac{2a}{a^2-1} \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} (\pi/2 - 0) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \end{aligned}$$

Deci

$$I'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad \Rightarrow \quad I(a) = \pi \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + C.$$

13. Folosind valoarea integralei

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab},$$

calculați integrala

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} dx.$$

14. Să se calculeze integrala cu parametru:

$$I(a) = \int_0^\pi \frac{1}{a + b \cos x} dx, \quad \text{unde } a > b > 0.$$

Apoi derivând în raport cu a integrala cu parametru $I(a)$ să se calculeze

$$\int_0^\pi \frac{1}{(a + b \cos x)^2} dx \quad \text{și} \quad \int_0^\pi \frac{1}{(a + b \cos x)^3} dx.$$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^\pi \frac{1}{a + b \cos x} dx = \int_0^\infty \frac{1}{a + b \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{2}{a-b} \int_0^\infty \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2 + t^2} dt \\ &= \frac{2}{a-b} \frac{1}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Derivăm și obținem

$$I'(a) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{a + b \cos x} \right)'_a dx = \int_0^\pi \frac{-1}{(a + b \cos x)^2} (1+0) dx = \int_0^\pi \frac{-1}{(a + b \cos x)^2} dx.$$

Pe de altă parte

$$I'(a) = \left(\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \right)'_a = \pi \left[(a^2-b^2)^{-1/2} \right]'_a = \pi \frac{-1}{2} (a^2-b^2)^{-3/2} 2a.$$

15. Să se calculeze integrala cu parametru:

$$I(a) = \int_0^\pi \frac{1}{a + b \cos x} dx, \quad \text{unde } 0 < a < b.$$

16. Să se calculeze integrala cu parametru:

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos x} dx, \text{ unde } a > b > 0.$$

Apoi derivând în raport cu a integrala cu parametru $I(a)$ să se calculeze

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos x)^2} dx \quad \text{și} \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos x)^3} dx.$$

Rezolvare:

$$\text{Observăm că } \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos x} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{a + b \cos x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos x} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

17. Să se calculeze integrala cu parametru

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{1}{a + x^2} dx, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

Apoi derivând în raport cu a integrala cu parametru $I(a)$ să se calculeze

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(a + x^2)^2} dx \quad \text{și} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{(a + x^2)^3} dx$$

18. Să se calculeze integrala cu parametru

$$I(a) = \int_0^c \frac{1}{a + x^2} dx.$$

Apoi derivând în raport cu a integrala cu parametru $I(a)$ să se calculeze

$$\int_0^c \frac{1}{(a + x^2)^2} dx \quad \text{și} \quad \int_0^c \frac{1}{(a + x^2)^3} dx.$$

19. Să se arate că

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Rezolvare:

Știm că următoarea integrală este convergentă (se aplică criteriul lui Abel funcțiilor e^{-kx} și $\frac{\sin(\alpha x)}{x}$):

$$I(\alpha) := \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx, \quad \text{unde } \alpha \geq 0, k > 0.$$

Calculăm derivata și apoi aplicăm metoda de integrare prin părți:

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_0^{\infty} \left(e^{-kx} \frac{\sin(\alpha x)}{x} \right)'_{\alpha} dx = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\cos(\alpha x)}{x} x dx = \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos(\alpha x) dx \\ &= \frac{e^{-kx}}{-k} \cos(\alpha x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-kx}}{-k} (-\alpha) \sin(\alpha x) dx \\ &= \frac{e^{-kx}}{-k} \cos(\alpha x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{\alpha}{k} \int_0^{\infty} e^{-kx} \sin(\alpha x) dx \\ &= \frac{e^{-kx}}{-k} \cos(\alpha x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{\alpha}{k} \left(\frac{e^{-kx}}{-k} \sin(\alpha x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-kx}}{-k} \alpha \cos(\alpha x) dx \right) \\ &= \frac{e^{-kx}}{-k} \cos(\alpha x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{\alpha}{k^2} e^{-kx} \sin(\alpha x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{\alpha^2}{k^2} \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos(\alpha x) dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Dar $\left. \frac{e^{-kx}}{-k} \cos(\alpha x) \right|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{-1}{k} (0 - 1) = \frac{1}{k}$ iar $\left. \frac{\alpha}{k^2} e^{-kx} \sin(\alpha x) \right|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\alpha}{k^2} (0 - 0) = 0$, deci

$$I'(\alpha) = \frac{1}{k} - \frac{\alpha^2}{k^2} I'(\alpha) \Rightarrow I'(\alpha) = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}.$$

Prin integrare obținem

$$I(\alpha) = \int \frac{k}{\alpha^2 + k^2} d\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{k}\right) + C.$$

Dar, conform definiției,

$$I(0) = 0, \text{ deci } C = 0.$$

Deci

$$I(1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k}\right) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

și, trecând la limită,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{k \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin(x)}{x} dx \\ &= \int_0^\infty \lim_{k \rightarrow 0} e^{-kx} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

20. Să se calculeze integrala

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

derivând integrala cu parametru

$$\int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{unde } k > 0.$$

21. Să se arate că*:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Rezolvare:

Folosind substituția $x = ut$, cu $u > 0$ fixat, obținem $dx = u dt$ și

$$I = \int_0^\infty e^{-u^2 t^2} u dt.$$

Deci, schimbând ordinea de integrare, calculăm pătratul integralei I :

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-u^2} du = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) e^{-u^2} du = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-u^2 t^2} u e^{-u^2} dt \right) du \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty u e^{-(1+t^2)u^2} du \right) dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-(1+t^2)u^2}}{-2(1+t^2)} \Big|_{u=0}^{u=\infty} \right) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{-1}{2(1+t^2)} (0 - 1) dt = \frac{1}{2} \operatorname{arctgt} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Obținem

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*Există mai multe metode de a calcula această integrală. Unde dintre ele este cu ajutorul integralei duble (și a schimbării de variabile în cadrul integralei duble).

22. Să se arate că **integrala lui Gauss** (sau **integrala Euler-Poisson**) are valoarea:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Rezolvare:

Evident,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

23. Calculați următoarele integrale:

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{și} \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx.$$

Rezolvare:

Folosind substituția $x^2 = t$ obținem

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

care este convergentă conform criteriului lui Dirichlet.

Pe de altă parte, folosind valoarea integralei Gaussiane, avem

$$\int_0^{\infty} e^{-tu^2} du = \int_0^{\infty} e^{-(u\sqrt{t})^2} du = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-(u\sqrt{t})^2} d(u\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

deci

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du.$$

Deci, schimbând ordinea de integrare, calculăm

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\sin t \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du \right) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-tu^2} \sin t du \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-tu^2} \sin t dt \right) du. \end{aligned}$$

Folosind metoda de integrare prin părți avem, vezi calculul (1),

$$J := \int_0^{\infty} e^{-tu^2} \sin t dt = \frac{-1}{u^2} e^{-u^2 t} \sin t \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \frac{1}{u^4} e^{-u^2 t} \cos t \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{1}{u^4} J.$$

Deci

$$J = \frac{1}{1 + u^4}.$$

Calculând integrala obținem

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + u^4} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$