Facultatea de Matematică
Calcul integral şi Aplicaţii, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 3 – 4

Capitolul II. Integrale cu parametru

1. Studiaţi convergenţa integralelor*:

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right) dx \quad \text{şi} \quad \int_0^\infty \cos\left(x^2\right) dx.$$

Rezolvare:

Folosind substituţia $x^2 = t$ obţinem $x = \sqrt{t}$ şi $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$. Deci

$$I = \int_0^\infty \sin t \,\frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Această integrală este convergentă aplicând criteriul lui Dirichlet.

Într-adevăr, $\left|\int_a^b \sin t\, dt\right| = |\cos a - \cos b| \le 2$, pentru orice $a < b$ iar funcţia $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ este monoton descrescătoare şi mărginită pe intervalul $[1, \infty)$. Deci, conform criteriului lui Dirichlet, integrala improprie $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ este convergentă.

Să observăm că $\int_0^\infty \sin t\, dt$ nu există (deci este divergentă) şi astfel nu putem aplica criteriul lui Abel.

Pe de altă parte, integrala

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

este convergentă deoarece funcţia $t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ este bine definită pe $(0,1]$ iar punctul 0 nu este punct singular, deoarece $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\sqrt{t} = 0$. Deci funcţia precedentă poate fi prelungită prin continuitate la o funcţia continuă, definită pe $[0,1]$, $\tilde{f}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}, & \text{dacă } t \in (0,1], \\ 0, & \text{dacă } t = 0 \end{cases}$ iar integralele din cele două funcţii coincid deoarece sunt modificate doar într-un punct, i.e.

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^1 \tilde{f}(t)\, dt.$$

Deci integrala $I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ este (C).

2. Arătaţi că integrala

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

este divergentă în cazul $\alpha < 0$.

Rezolvare:

Avem

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx.$$

*Integralele $\int_0^t \sin\left(x^2\right) dx$ şi $\int_0^t \cos\left(x^2\right) dx$ se numesc **integrale Fresnel**.

Evident, integrala $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 x^{-\alpha} \sin x dx$ nu este improprie, dacă $\alpha < 0$, deci este o integrală Riemann, deci (C) .

Pe de altă parte,

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} = x^{-\alpha} |\sin x| \geq |\sin x| \geq \sin x, \quad \text{pentru orice } x \geq 1, \alpha < 0$$

iar

$$\int_1^\infty \sin x dx \quad \text{este } (D) ,$$

deci, conform unui criteriu de comparaţie, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ este (D) .

3. Studiaţi absoluta convergenţă a integralei:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

în cazul $\alpha > 0$.

Rezolvare:

Să remarcăm mai întâi că integrala $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ este (C) conform criteriului lui Dirichlet, pentru orice $\alpha > 0$.

A studia absoluta convergenţă a integralei $\int_1^\infty f(x)\, dx$ înseamnă a studia convergenţa integralei $\int_1^\infty |f(x)|\, dx$.

Dacă $\alpha > 1$, atunci avem

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha} ,$$

iar

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{este } (C) ,$$

deci, conform unui criteriu de comparaţie, $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$ este (C) .

În consecinţă, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ este (AC) în cazul $\alpha > 1$.

În cazul celălalt să observăm mai întâi că

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\cos(2x)}{x^\alpha} .$$

Dar în cazul $\alpha \in (0, 1]$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{este } (D) .$$

Pe de altă parte,

$$\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x^\alpha} dx \quad \text{este } (C)$$

conform criteriului lui Dirichlet, pentru orice $\alpha > 0$.

Deci

$$\frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx - \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x^\alpha} dx = (D) - (C) = (D) ,$$

iar conform unui criteriu de comparaţie vom obţine că $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$ este (D) .

În consecinţă, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ nu este (AC) în cazul $\alpha \in (0, 1]$.

4. Studiaţi convergenţa integralei:

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx\,,\quad \text{unde } \alpha\geq 0, k>0.$$

Rezolvare:

Această integrală este convergentă aplicând criteriul lui Abel, deoarece $\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx$ este convergentă conform criteriului lui Dirichlet iar funcţia $x\mapsto e^{-kx}$ este monotonă şi mărginită pe $[0,\infty)$ cu $\lim_{x\to\infty} e^{-kx}=0$ pentru orice $k>0$.

5. Calculaţi următoarea integrală cu parametru

$$I(y)=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

şi obţineţi valoarea integralei

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

Rezolvare:

Derivăm integrala cu parametru şi operatorul de derivare comută cu integrala:

$$I'(y)=\int_0^1\left(\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x\sqrt{1-x^2}}\right)'_y dx=\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\left(\operatorname{arctg}(xy)\right)'_y dx=\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{1+x^2y^2}\,x\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{1+x^2y^2}dx\,.$$

Deoarece apare cantitatea $\sqrt{1-x^2}$ este utilă subsituţia $x=\sin t$, deci

$$t=\arcsin x\quad \text{şi}\quad dx=\cos t\,dt.$$

Obţinem

$$I'(y)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,\frac{1}{1+y^2\sin^2 t}\cos t\,dt=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+y^2\sin^2 t}\,dt.$$

Acum se face substituţia $\operatorname{tg}(t)=r$, deci

$$t=\operatorname{arctg}(r)\quad \text{şi}\quad dt=\frac{1}{1+r^2}dr\,.$$

Folosim formula $\sin t=\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$ şi obţinem

$$I'(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2\frac{r^2}{1+r^2}}\,\frac{1}{1+r^2}\,dr=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(y^2+1)\,r^2}\,dr=\frac{1}{y^2+1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\right)^2+r^2}\,dr$$

$$=\frac{1}{y^2+1}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}}\operatorname{arctg}\frac{r}{\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}}\Bigg|_{r=0}^{r=\infty}=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,(\pi/2-0)=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,.$$

Deci

$$I'(y)=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\quad\Rightarrow\quad I(y)=\frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)+C$$

Dar, conform definiţiei,

$$I(0)=0, \text{ deci } C=0.$$

6. Calculaţi următoarea integrală cu parametru

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha t}}{t} \cos t \, dt$$

şi obţineţi valoarea integralei

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-t}}{t} \cos t \, dt \, .$$

Rezolvare:

Derivăm integrala cu parametru şi operatorul de derivare comută cu integrala:

$$I'(\alpha) = \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-\alpha t}}{t} \cos t \right)'_\alpha dt = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} \cdot t}{t} \cos t \, dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos t \, dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \, .$$

Deci

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \ln \left(\alpha^2 + 1 \right) + C$$

Dar, conform definiţiei,

$$I(0) = 0, \text{ deci } C = 0.$$

7. Calculaţi următoarea integrală:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x\sqrt{1 - x^2}} \, dx \, .$$

Rezolvare:

Observăm că

$$\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 y^2} dy$$

şi, deoarece putem schimba ordinea de integrare, obţinem:

$$I = \int_0^1 \left[\left(\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 y^2} dy \right) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right] dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 y^2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx \right) dy \, .$$

Deci, conform exerciţiului anterior,

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} dy = \frac{\pi}{2} \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{\pi}{2} \ln \left(1 + \sqrt{2} \right) \, .$$

8. Calculaţi următoarea integrală:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} \, dx \, , \quad 0 < a < b.$$

Rezolvare:

Metoda I.

Observăm că

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx} \, dt$$

şi, deoarece putem schimba ordinea de integrare, obţinem:

$$I = \int_0^\infty \left((\cos(ax) - \cos(bx)) \int_0^\infty e^{-tx} \, dt \right) dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty (\cos(ax) - \cos(bx)) \, e^{-tx} \, dx \right) dt$$

Integrând de două ori prin părţi obţinem

$$\int_0^\infty \cos(ax) \, e^{-tx} \, dx = \frac{t}{t^2 + a^2} \, , \quad \text{pentru orice } a > 0, t > 0,$$

deci

$$I=\int_0^\infty\left(\frac{t}{t^2+a^2}-\frac{t}{t^2+b^2}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\ln\left(t^2+a^2\right)-\ln\left(t^2+b^2\right)\right)\Big|_{t=0}^{t=\infty}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+a^2}{t^2+b^2}\right)\Big|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{a^2}{b^2}\right)=\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Metoda II.

Observăm că integrala dată este de tip Froullani.

Verificăm mai întâi condiţiile. Funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=-\cos x$ este o funcţie continuă şi mărginită. Nu există $\lim_{x\to\infty}f(x)$ dar, în schimb, $\int_a^\infty\frac{\cos x}{x}dx$ este (C) (conform criteriului lui Dirichlet).

Deci are loc formula

$$\int_0^\infty\frac{-\cos(bx)+\cos(ax)}{x}dx=-\cos(0)\ln\frac{a}{b}=\ln\frac{b}{a}.$$

9. Calculaţi următoarele integrale:

$(a)\ \int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\,,\quad(b)\ \int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}(ax)-\operatorname{arctg}(bx)}{x}dx\,,\quad 0<a<b.$

Rezolvare:

Fiecărui exemplu i se pot aplica ambele metode de la Exerciţiul 8.

(a) **Metoda I.** Observăm că

$$\frac{1}{x}=\int_0^\infty e^{-tx}\,dt$$

şi apoi schimbăm ordinea de integrare.

Metoda II. Observăm că integrala dată este de tip Froullani cu $f(x)=-e^{-x}$.

Pentru acest exemplu avem şi

Metoda III.

Observăm că $\displaystyle\int e^{-ax}da=\frac{e^{-ax}}{-x}+C$, adică

$$\int_a^b e^{-\alpha x}\,d\alpha=\frac{-e^{-\alpha x}}{x}\Big|_{\alpha=a}^{\alpha=b}=\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}.$$

Deoarece putem schimba ordinea de integrare, obţinem:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^\infty\left(\int_a^b e^{-\alpha x}\,d\alpha\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx\right)d\alpha=\int_a^b\left(\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\Big|_{x=0}^{x=\infty}\right)d\alpha\\&=\int_a^b\frac{1}{-\alpha}\left(e^{-\infty}-e^0\right)d\alpha=\int_a^b\frac{1}{\alpha}d\alpha=\ln\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

10. Calculaţi următoarea integrală:

$$\int_0^\infty\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}dx\,,\quad 0<a<b.$$

Rezolvare:

Metoda I.

Observăm că $\displaystyle\int\sin(ax)\,da=\frac{\cos(ax)}{x}+C$, adică

$$\int_a^b\sin(\alpha x)\ d\alpha=\frac{-\cos(\alpha x)}{x}\Big|_{\alpha=a}^{\alpha=b}=\frac{-\cos(bx)+\cos(ax)}{x}.$$

Deoarece putem schimba ordinea de integrare, obţinem:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\int_a^b \sin(\alpha x)\, d\alpha\right) dx = \int_a^b \left(\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx\right) d\alpha$$

Dar, schimbând variabila $y = \alpha x$ şi folosind Exerciţiul 19, obţinem

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}\,,$$

deci

$$I = \int_a^b \left(\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx\right) d\alpha = \frac{\pi}{2}\int_a^b d\alpha = \frac{\pi}{2}(b-a)\,.$$

Metoda II.

Se foloseşte metoda de integrare prin părţi şi apoi Exerciţiul 19.

Avem

$$I = \int_0^\infty (\cos(ax) - \cos(bx))\left(\frac{-1}{x}\right)' dx = \frac{\cos(bx)-\cos(ax)}{x}\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \frac{-a\sin(ax) + b\sin(bx)}{x}\, dx$$

$$= (0-0) - a\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\, dx + b\int_0^\infty \frac{\sin(bx)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}(b-a)\,,$$

deoarece

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(bx)-\cos(ax)}{x} = \lim_{x\to\infty}(\cos(bx)-\cos(ax))\cdot\frac{1}{x} = 0$$

iar, folosind L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(bx)-\cos(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-b\sin(bx)+a\sin(ax)}{1} = 0.$$

11. Calculaţi următoarea integrală:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx\,, \quad 0 < a < b.$$

Rezolvare:

Observăm că

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\, dy$$

şi, deoarece putem schimba ordinea de integrare, obţinem:

$$I = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\, dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx\right) dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}\, dy$$

$$= \ln(1+y)\Big|_{y=a}^{y=b} = \ln\frac{1+b}{1+a}\,.$$

12. Calculaţi următoarea integrală cu parametru:

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2 - \sin^2 x\right) dx\,,\ a > 1\,.$$

Rezolvare:

Derivăm integrala cu parametru şi operatorul de derivare comută cu integrala:

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \left(\ln\left(a^2-\sin^2 x\right)\right)'_a dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2-\sin^2 x} 2a\, dx = 2a\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2-\sin^2 x}\,.$$

Se face substituţia $\mathrm{tg}\,(x) = t$, deci

$$x = \mathrm{arctg}\,(t) \quad \text{şi} \quad dx = \frac{1}{1+t^2}dt\,.$$

Folosind formula $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ obţinem

$$I'(a) = 2a\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 - \sin^2 x} = 2a\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= 2a\int_0^{+\infty} \frac{1}{(a^2-1)\,t^2 + a^2}dt = 2a\frac{1}{a^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)^2}dt$$

$$= \frac{2a}{a^2-1}\frac{1}{\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\,(\pi/2 - 0) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

Deci

$$I'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad \Rightarrow \quad I(a) = \pi \ln\left(a + \sqrt{a^2-1}\right) + C.$$

13. Folosind valoarea integralei

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab}\,,$$

calculaţi integrala

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)^2}\,dx\,.$$

14. Să se calculeze integrala cu parametru:

$$I(a) = \int_0^{\pi} \frac{1}{a + b\cos x}\,dx\,, \quad \text{unde } a > b > 0.$$

Apoi derivând în raport cu a integrala cu parametru $I(a)$ să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+b\cos x)^2}dx \quad \text{şi} \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{(a+b\cos x)^3}dx.$$

Rezolvare:

$$I(a) = \int_0^{\pi} \frac{1}{a+b\cos x}dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{a + b\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \frac{2}{a-b}\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2 + t^2}\,dt$$

$$= \frac{2}{a-b}\frac{1}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{\pi}{2}\,.$$

Derivăm şi obţinem

$$I'(a) = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{a+b\cos x}\right)'_a dx = \int_0^{\pi} \frac{-1}{(a+b\cos x)^2}\,(1+0)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{-1}{(a+b\cos x)^2}dx\,.$$

Pe de altă parte

$$I'(a) = \left(\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)'_a = \pi\left[\left(a^2-b^2\right)^{-1/2}\right]'_a = \pi\frac{-1}{2}\left(a^2-b^2\right)^{-3/2}2a.$$

15. Să se calculeze integrala cu parametru:

$$I(a) = \int_0^{\pi} \frac{1}{a+b\cos x}\,dx\,, \text{ unde } 0 < a < b.$$

16. Să se calculeze integrala cu parametru:

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos x}\, dx \text{ , unde } a > b > 0.$$

Apoi derivând în raport cu a integrala cu parametru $I(a)$ să se calculeze

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b\cos x)^2}\, dx \quad \text{şi} \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b\cos x)^3}\, dx.$$

Rezolvare:

Observăm că $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos x} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{a+b\cos x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos x} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

17. Să se calculeze integrala cu parametru

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{1}{a + x^2}\, dx, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

Apoi derivând în raport cu a integrala cu parametru $I(a)$ să se calculeze

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(a + x^2)^2}\, dx \quad \text{şi} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{(a + x^2)^3}\, dx$$

18. Să se calculeze integrala cu parametru

$$I(a) = \int_0^{c} \frac{1}{a + x^2}\, dx.$$

Apoi derivând în raport cu a integrala cu parametru $I(a)$ să se calculeze

$$\int_0^{c} \frac{1}{(a + x^2)^2}\, dx \quad \text{şi} \quad \int_0^{c} \frac{1}{(a + x^2)^3}\, dx.$$

19. Să se arate că

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$

Rezolvare:

Ştim că următoarea integrală este convergentă (se aplică criteriul lui Abel funcţiilor e^{-kx} şi $\frac{\sin(\alpha x)}{x}$):

$$I(\alpha) := \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx\,, \quad \text{unde } \alpha \geq 0, k > 0.$$

Calculăm derivata şi apoi aplicăm metoda de integrare prin părţi:

$$\begin{aligned}
I'(\alpha) &= \int_0^{\infty} \left(e^{-kx} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\right)'_{\alpha} dx = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\cos(\alpha x)}{x}\, x\, dx = \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos(\alpha x)\, dx \\
&= \frac{e^{-kx}}{-k} \cos(\alpha x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-kx}}{-k} (-\alpha) \sin(\alpha x)\, dx \\
&= \frac{e^{-kx}}{-k} \cos(\alpha x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{\alpha}{k} \int_0^{\infty} e^{-kx} \sin(\alpha x)\, dx \qquad (1) \\
&= \frac{e^{-kx}}{-k} \cos(\alpha x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{\alpha}{k} \left(\frac{e^{-kx}}{-k} \sin(\alpha x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-kx}}{-k} \alpha \cos(\alpha x)\, dx \right) \\
&= \frac{e^{-kx}}{-k} \cos(\alpha x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{\alpha}{k^2} e^{-kx} \sin(\alpha x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{\alpha^2}{k^2} \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos(\alpha x)\, dx.
\end{aligned}$$

Dar $\frac{e^{-kx}}{-k}\cos(\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{-1}{k}(0-1)=\frac{1}{k}$ iar $\frac{\alpha}{k^2}e^{-kx}\sin(\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{\alpha}{k^2}(0-0)=0$,deci

$$I'(\alpha)=\frac{1}{k}-\frac{\alpha^2}{k^2}I'(\alpha)\quad\Rightarrow\quad I'(\alpha)=\frac{k}{\alpha^2+k^2}\,.$$

Prin integrare obţinem

$$I(\alpha)=\int\frac{k}{\alpha^2+k^2}\,d\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{k}\right)+C.$$

Dar, conform definiţiei,

$$I(0)=0,\text{ deci } C=0.$$

Deci

$$I(1)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k}\right)=\int_0^\infty e^{-kx}\,\frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

şi, trecând la limită,

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{k\to0_+}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k}\right)=\lim_{k\to0_+}\int_0^\infty e^{-kx}\,\frac{\sin(x)}{x}\,dx$$
$$=\int_0^\infty\lim_{k\to0}e^{-kx}\,\frac{\sin(x)}{x}\,dx=\int_0^\infty\frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

20. Să se calculeze integrala

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$$

derivând integrala cu parametru

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx\,,\quad \text{unde } k>0.$$

21. Să se arate că*:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Rezolvare:

Folosind substituţia $x=ut$, cu $u>0$ fixat, obţinem $dx=udt$ şi

$$I=\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,udt.$$

Deci, schimbând ordinea de integrare, calculăm pătratul intergalei I :

$$I^2=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\cdot\int_0^\infty e^{-u^2}\,du=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)e^{-u^2}\,du=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,ue^{-u^2}\,dt\right)du$$
$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty ue^{-\left(1+t^2\right)u^2}\,du\right)dt=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\left(1+t^2\right)u^2}}{-2\left(1+t^2\right)}\Big|_{u=0}^{u=\infty}\right)dt$$
$$=\int_0^\infty\frac{-1}{2\left(1+t^2\right)}(0-1)\,dt=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t\Big|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{\pi}{4}\,.$$

Obţinem

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

*Există mai multe metode de a calcula această integrală. Unde dintre ele este cu ajutorul integralei duble (şi a schimbării de variabile în cadrul integralei duble).

22. Să se arate că **integrala lui Gauss** (sau **integrala Euler–Poisson**) are valoarea:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Rezolvare:

Evident,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

23. Calculaţi următoarele integrale:

$$\int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right)\,dx \quad \text{şi} \quad \int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right)\,dx\,.$$

Rezolvare:

Folosind substituţia $x^2 = t$ obţinem

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

care este convergentă conform criteriului lui Dirichlet.

Pe de altă parte, folosind valoarea integralei Gaussiane, avem

$$\int_0^{\infty} e^{-tu^2}\,du = \int_0^{\infty} e^{-\left(u\sqrt{t}\right)^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{\infty} e^{-\left(u\sqrt{t}\right)^2}\,d\left(u\sqrt{t}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

deci

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-tu^2}\,du.$$

Deci, schimbând ordinea de integrare, calculăm

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\sin t\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-tu^2}\,du\right)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-tu^2}\sin t\,du\right)dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-tu^2}\sin t\,dt\right)du.$$

Folosind metoda de integrare prin părţi avem, vezi calculul (1),

$$J := \int_0^{\infty} e^{-tu^2}\sin t\,dt = \frac{-1}{u^2}\,e^{-u^2 t}\sin t\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \frac{1}{u^4}\,e^{-u^2 t}\cos t\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{1}{u^4}\,J\,.$$

Deci

$$J = \frac{1}{1+u^4}\,.$$

Calculând integrala obţinem

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+u^4}\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,.$$