Facultatea de Matematică
Calcul integral, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 5 – 6

Capitolul III. Integrale curbilinii

1. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:
$$I = \int_{(C)} xyds\,,$$
unde (C) este sfertul din primul cadran al elipsei dată parametric $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

2. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:
$$I = \int_{(C)} yds\,,$$
unde (C) este segmentul parabolei $y^2 = 2px$ de la originea coordonatelor până la $A\,(a,b)$, $a > 0$.

3. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:
$$I = \int_{(C)} xyzds\,,$$
unde (C) este curba din spaţiu $\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, \\ z = \frac{1}{2}t^2, \end{cases}$, $t \in [0,1]$.

4. Să se calculeze următoarea integrală curbilinie de primul tip
$$I = \int_{(C)} ye^{-x}ds$$
unde $(C) : x\,(t) = \ln\left(1+t^2\right)$, $y\,(t) = 2\operatorname{arctg} t - t + 3$, $t \in [0,1]$.

5. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:
$$I = \int_{(C)} xyds\,,$$
unde (C) este sfertul din primul cadran al elipsei dată explicit $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

6. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:
$$I = \int_{(C)} xyds\,,$$
unde $(C) : y = x^2$, $x \in [-1,1]$.

7. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$I = \int_{(C)} y^5 ds \,,$$

unde $(C) : x = \frac{y^4}{4}$, $y \in [0,2]$.

8. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$I = \int_{(C)} (x + y + z)\, ds \,,$$

unde $(C) : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases} , t \in [0, \pi/2]$.

9. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$I = \int_{(C)} \left(x^2 + y^2\right) \ln z \, ds \,,$$

unde $(C) : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases} , t \in [0, 1]$.

10. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$I = \int_{(\overset{\frown}{OA})} \left(x^2 - y^2\right) dx \,,$$

unde $(\overset{\frown}{OA})$ este segmentul parabolei $y = x^2$ cuprins între $x = 0$ şi $x = 2$.

11. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$I = \int_{(\overset{\frown}{OA})} 2xydx + x^2 dy \,,$$

unde $(\overset{\frown}{OA})$ este

$a)$ parabola $y^2 = x$ care uneşte $O\,(0,0)$ cu $A\,(1,1)$;

$b)$ (Temă) dreapta $y = x$ care uneşte $O\,(0,0)$ cu $A\,(1,1)$;

$c)$ (Temă) curba $y = x^3$ care uneşte $O\,(0,0)$ cu $A\,(1,1)$.

12. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$I = \int_{(\overset{\frown}{AB})} x^2 dx + 2xydy \,,$$

unde $(\overset{\frown}{AB})$ este jumătatea superioară a elipsei parcursă în sens trigonometric (se vor folosi ecuaţiile parametrice ale elipsei).

13. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$I = \int_{(\overset{\frown}{AB})} \sqrt{1-x^2}dx + xdy\,,$$

unde $(\overset{\frown}{AB})$ este curba $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ parcursă în sens trigonometric (se vor folosi ecuaţiile parametrice ale elipsei).

14. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$I = \int_{(\overset{\frown}{AB})} xdx + xydy + xyzdz\,,$$

unde $(\overset{\frown}{AB})$ este curba $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t}, \\ z = \sqrt{2}t, \end{cases}$, $t \in [0,1]$.

15. Calculaţi următoarea integrală curbilinie constatând în prealabil că este independentă de drum:

$$I = \int_{(\overset{\frown}{AB})} \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}\,,$$

unde $(\overset{\frown}{AB})$ este arcul de curbă ce uneşte punctul $A(0,-1)$ cu $B(1,0)$.

Indicaţie:
În cazul nostru $P(x,y) = \frac{-y}{(x-y)^2}$ şi $Q(x,y) = \frac{x}{(x-y)^2}$. Se verifică mai întâi condiţiile suficiente şi apoi se rezolvă sistemul care defineşte primitiva F (integrându-se una din ecuaţii). După ce s-a determinat primitiva F se aplică formula lui Leibniz-Newton şi obţin că $I = F(1,0) - F(0,-1)$.

16. Calculaţi următoarea integrală curbilinie constatând în prealabil că este independentă de drum:

$$I = \int_{(\overset{\frown}{AB})} \frac{ydx - xdy}{y^2}\,,$$

unde $(\overset{\frown}{AB})$ este arcul de curbă ce uneşte punctul $A(1,2)$ cu $B(2,1)$.

Indicaţie:
În cazul nostru $P(x,y) = \frac{1}{y}$ şi $Q(x,y) = \frac{-x}{y^2}$. Se verifică mai întâi condiţiile suficiente şi apoi se rezolvă sistemul care defineşte primitiva F (integrându-se una din ecuaţii). După ce s-a determinat primitiva F se aplică formula lui Leibniz-Newton şi obţin că $I = F(2,1) - F(1,2)$.

17. Calculaţi următoarea integrală curbilinie constatând în prealabil că este independentă de drum:

$$I = \int_{(\overset{\frown}{AB})} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,$$

unde $(\overset{\frown}{AB})$ este arcul de curbă ce uneşte punctul $A(1,1,1)$ cu $B(3,4,5)$.
Indicaţie:
În cazul nostru $P(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $Q(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $R(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Se verifică mai întâi condiţiile suficiente şi apoi se rezolvă sistemul care defineşte primitiva F (integrându-se una din ecuaţii). După ce s-a determinat primitiva F se aplică formula lui Leibniz-Newton şi obţin că $I = F(3,4,5) - F(1,1,1)$.

18. Să se studieze dacă următoarele forme diferenţiale sunt exacte şi în caz afirmativ să se calculeze o primitivă a lor:

    a) $\left(4x^3y^3 - 3y^2 + 5\right) dx + \left(3x^4y^2 - 6xy - 4\right) dy.$

    b) $z\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x^2+z^2}\right) dx + \frac{z}{xy^2} dy + \left(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\right) dz.$

19. Să se determine constanta ciclică a următoarei integrale curbilinii în raport cu punctul singular $(0,0)$

$$I = \int \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

20. Determinaţi aria domeniului mărginit de curba

$$(C) : \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

    (aria $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{(C)} xdy - ydx$).

21. Să se calculeze aria elipsei $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.