Facultatea de Matematică
Calcul integral, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminariile 7 – 8

Capitolul IV. Integrala dublă

1. Să se calculeze următoarea integrală dublă pe un domeniu dreptunghiular

$$I = \iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy\,,$$

unde D este dreptunghiul $D = [2,5] \times [0,1]$.

2. Să se calculeze următoarea integrală dublă pe un domeniu dreptunghiular

$$I = \iint_D \left(5xy^2 - 2x^3\right) dxdy\,,$$

unde D este dreptunghiul $D = [1,3] \times [2,5]$.

Rezolvare:

Avem următoarea reducere a integralei duble la două integrale simple:

$$I = \int_1^3 \left(\int_2^5 \left(5xy^2 - 2x^3\right) dy \right) dx = \int_2^5 \left(\int_1^3 \left(5xy^2 - 2x^3\right) dx \right) dy.$$

Vom calcula integrala $\int_2^5 \left(5xy^2 - 2x^3\right) dy$ şi vom ţine cont de faptul că **atunci când integrăm în raport cu o variabilă vom considera cealaltă variabilă drept constantă**. Astfel

$$\int_2^5 \left(5xy^2 - 2x^3\right) dy = \left(5x\frac{y^3}{3} - 2x^3 y\right)\Bigg|_{y=2}^{y=5} = \left(5x \cdot \frac{5^3}{3} - 2x^3 \cdot 5\right) - \left(5x \cdot \frac{2^3}{3} - 2x^3 \cdot 2\right) =$$
$$= \left(\frac{5^4}{3}x - 10x^3\right) - \left(\frac{40}{3}x - 4x^3\right) = \frac{585}{3}x - 6x^3.$$

Deci

$$I = \int_1^3 \left(\frac{585}{3}x - 6x^3\right) dx = \left(\frac{585}{3}\frac{x^2}{2} - 6\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=3} = \cdots$$

Temă: de calculat integrala I folosind reducerea

$$I = \int_2^5 \left(\int_1^3 \left(5xy^2 - 2x^3\right) dx \right) dy = \cdots$$

3. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$I = \iint_D y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dxdy\,,$$

unde D este discul $x^2 + y^2 \le R^2$.

4. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$I = \iint_D \left(x^2 + y\right) dxdy\,,$$

unde D este domeniul mărginit de parabolele $y = x^2$ şi $y^2 = x$.

Rezolvare:

Desenăm mai întâi domeniul şi observăm că este simplu în raport cu ambele axe. **Explicităm domeniul: luăm $x \in [0,1]$ arbitrar şi prin x ducem o paralelă la axa Oy care va intersecta domeniul D în curbele** $\varphi_1(x) = x^2$ şi $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$. Deci obţinem explicitarea

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\right\}.$$

Aplicăm teorema de reducere şi obţinem

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right) dy\right) dx$$

şi calculăm mai întâi

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right) dy = \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} = \left(x^2\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}^2}{2}\right) - \left(x^2x^2 + \frac{\left(x^2\right)^2}{2}\right)$$

$$= \left(x^2\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}^2}{2}\right) - \left(x^2 \cdot x^2 + \frac{\left(x^2\right)^2}{2}\right) = x^2\sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{3x^4}{2} = x^{5/2} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^4\,,$$

deci

$$I = \int_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^4\right) dx = \left(\frac{x^{5/2+1}}{5/2+1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{x5}{5}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}\,.$$

Temă: de calculat aceeaşi integrală I folosind faptul că domeniul D este simplu în raport cu axa Ox. Avem explicitarea $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le \sqrt{y}\right\}$.

5. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$I = \iint_D \left(|x| + |y|\right) dxdy\,,$$

unde D este domeniul dat de $|x| + |y| \le 1$.

Rezolvare:

În cadranul I domeniul devine $D_1 : x + y \le 1$ şi $x, y \ge 0$ (deci D_1 este mărginit de dreptele $y = -x + 1, x = 0, y = 0$).

În cadranul II domeniul devine $D_2 : -x + y \le 1$ şi $x \le 0, y \ge 0$ (deci D_2 este mărginit de dreptele $y = x + 1, x = 0, y = 0$).

În cadranul III domeniul devine $D_3 : -x - y \le 1$ şi $x, y \le 0$ (deci D_3 este mărginit de dreptele $y = -x - 1, x = 0, y = 0$).

În cadranul IV domeniul devine $D_4 : x - y \le 1$ şi $x \ge 0, y \le 0$ (deci D_4 este mărginit de dreptele $y = x - 1, x = 0, y = 0$).

Atunci $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ şi

$$I = \iint_{D_1} \left(|x| + |y|\right) dxdy + \iint_{D_2} \left(|x| + |y|\right) dxdy + \iint_{D_3} \left(|x| + |y|\right) dxdy + \iint_{D_4} \left(|x| + |y|\right) dxdy,$$

unde

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ 0\le y\le -x+1\right\}, \\ D_2 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 0,\ 0\le y\le x+1\right\}, \\ D_3 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 0,\ -x-1\le y\le 0\right\}, \\ D_4 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ x-1\le y\le 0\right\}. \end{aligned}$$

6. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$I=\iint_D (1-y)\ dxdy\,,$$

unde D este domeniul dat de $x^2+(y-1)^2\le 1$, $y\le x^2$ şi $x\ge 0$.
Rezolvare:

Obţinem explicitarea

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ 1-\sqrt{1-x^2}\le y\le x^2\right\}.$$

Aplicăm teorema de reducere şi obţinem

$$I=\int_0^1\left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2}(1-y)\ dy\right)dx.$$

Calculăm mai întâi

$$\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2}(1-y)\ dy=\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1-\sqrt{1-x^2}}^{y=x^2}.$$

7. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$I=\iint_D xy\,dxdy\,,$$

unde D este domeniul mărginit de $xy=1$ şi $x+y=\frac{5}{2}$.
Rezolvare:

Obţinem explicitarea

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}\le x\le 2,\ \frac{1}{x}\le y\le \frac{5}{2}-x\right\}.$$

Aplicăm teorema de reducere şi obţinem

$$I=\int_{1/2}^{2}\left(\int_{1/x}^{-x+5/2}xy\,dy\right)dx.$$

Calculăm mai întâi

$$\int_{1/x}^{-x+5/2}xy\,dy=x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1/x}^{y=-x+5/2}=\frac{1}{2}x\left[\left(-x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{x^2}\right]=\ldots.$$

8. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$I=\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy\,,$$

unde D este domeniul dat de $x\in[-1,1]\,,y\in[0,1]$.
Rezolvare:

Aplicăm teorema de reducere şi obţinem

$$I=\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1}\sqrt{|y-x^2|}\,dy\right)dx.$$

Deoarece $x\in[-1,1]$,

$$\int_{0}^{1}\sqrt{|y-x^2|}\,dy=\left.\frac{\left|y-x^2\right|^{3/2}}{3/2}\right|_{y=0}^{y=1}=\frac{2}{3}\left(\left|1-x^2\right|^{3/2}-\left|-x^2\right|^{3/2}\right)=\frac{2}{3}\left(\left(1-x^2\right)^{3/2}-|x|^3\right).$$

Deci

$$I=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\left(\left(1-x^2\right)^{3/2}-|x|^3\right)dx=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{3/2}dx-\int_{-1}^{0}\left(-x^3\right)dx-\int_{0}^{1}x^3dx.$$

Dacă privim integrala $\int\left(1-x^2\right)^{3/2}dx$ ca integrală binomă, atunci suntem în cazul al treilea. Deci este utilă substituţia

$$\frac{1-x^2}{x^2}=t^2\Leftrightarrow x=\left(t^2+1\right)^{-1/2}\Rightarrow dx=\frac{-1}{2}\left(t^2+1\right)^{-3/2}\cdot 2tdt=-t\left(t^2+1\right)^{-3/2}dt.$$

Deci

$$\begin{aligned}\int\left(1-x^2\right)^{3/2}dx &= \int\left[1-\left(\left(t^2+1\right)^{-1/2}\right)^2\right]^{3/2}(-t)\left(t^2+1\right)^{-3/2}dt\\ &= -\int\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^{3/2}t\left(t^2+1\right)^{-3/2}dt=-\int t^4\left(t^2+1\right)^{-3}dt=\ldots\end{aligned}$$

Sau putem calcula integrala $\int\left(1-x^2\right)^{3/2}dx$ folosind substituţia trigonometrică

$$x=\sin t\Rightarrow dx=\cos t dt.$$

Deci

$$\int\left(1-x^2\right)^{3/2}dx=\int\left(1-\sin^2 t\right)^{3/2}\cos t dt=\int\cos^4 t\,dt,$$

pentru care folosim, de două ori, formula

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos(2t)}{2}.$$

9. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$I=\iint_D\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,$$

unde D este domeniul mărginit de $x=0, y=1, y=2$ şi $y=x$.

Rezolvare:

Desenăm mai întâi domeniul şi observăm că este simplu în raport cu axa Ox. **Explicităm domeniul: luăm $y\in[1,2]$ arbitrar şi prin y ducem o paralelă la axa Ox care va intersecta domeniul D în curbele** $\varphi_1(y)=0$ şi $\varphi_2(y)=y$. Deci obţinem explicitarea

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:1\le y\le 2,\ 0\le x\le y\right\}.$$

Aplicăm teorema de reducere şi obţinem

$$I=\int_{1}^{2}\left(\int_{0}^{y}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\right)dy.$$

Calculăm mai întâi

$$\int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = \int_0^y x\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x\,dx = x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=y} - \int_0^y \sqrt{x^2+y^2}\,dx$$
$$= y\sqrt{2y^2} - \int_0^y \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = y\sqrt{2y^2} - \int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - \int_0^y \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,,$$

deci

$$2\int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = y\sqrt{2y^2} - y^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{x=0}^{x=y} = y^2\sqrt{2} - y^2\ln\left(\frac{y+\sqrt{2y^2}}{\sqrt{y^2}}\right)$$
$$= y^2\sqrt{2} - y^2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\,.$$

Obţinem

$$I = \int_1^2 \left[\frac{1}{2}y^2\sqrt{2} - \frac{1}{2}y^2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]dy = \frac{\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}\,\frac{y^3}{3}\Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{7\left[\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]}{6}\,.$$

Temă: Domeniul D nu este simplu în raport cu axa Oy, dar calculaţi aceeaşi integrală I folosind faptul că domeniul D se poate descompune în două subdomenii care sunt simple în raport cu axa Oy.

Deci

$$I = \iint_{D_1} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy + \iint_{D_2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\,,$$

unde $D_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2\right\}$ şi $D_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 2,\ x\le y\le 2\right\}$.

10. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x}}\,dxdy\,,$$

unde D este domeniul dat de $y^2\le 8x, y\le 2x$ şi $y+4x\le 24$.

Rezolvare:

Domeniul D nu este simplu în raport cu axa Oy, dar se poate descompune în trei subdomenii care sunt simple în raport cu axa Oy.

Deci

$$I = \iint_{D_1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dxdy + \iint_{D_2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dxdy + \iint_{D_3} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dxdy\,,$$

unde

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ -\sqrt{8x}\le y\le 2x\right\},\\ D_2 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2\le x\le 9/2,\ -\sqrt{8x}\le y\le \sqrt{8x}\right\},\\ D_3 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 9/2\le x\le 8,\ -\sqrt{8x}\le y\le -4x+24\right\}. \end{aligned}$$

11. Să se calculeze următoarea integrală dublă:

$$I = \iint_D y\,dxdy\,,$$

unde D este domeniul din primul cadran dat de $x^2+y^2\ge 2x, y^2\le 8x$ şi $x\le 2$.

Rezolvare:

Domeniul D nu este simplu în raport cu axa Oy, dar se poate descompune în două subdomenii care sunt simple în raport cu axa Oy.

Deci
$$I=\iint_{D_1} y\,dxdy+\iint_{D_2} y\,dxdy\,,$$
unde
$$\begin{aligned}D_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 2,\ -\sqrt{2x}\le y\le -\sqrt{2x-x^2}\right\},\\ D_2 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 2,\ \sqrt{2x}\le y\le \sqrt{2x-x^2}\right\}.\end{aligned}$$

12. Să se calculeze următoarea integrală dublă
$$I=\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy\,,$$
unde D este domeniul mărginit de curbele $x=2, y=x$ şi $xy=1$.

13. Să se calculeze aria domeniului D mărginit de parabola $y=x^2-1$ şi de dreapta $y=x+1$.
Rezolvare:

Trebuie explicitat domeniul D care este simplu în raport cu Oy (în raport cu axa Ox nu este simplu): $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -1\le x\le 2,\ x^2-1\le y\le x+1\right\}$, deci
$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \iint_D dxdy=\int_{-1}^{2}\left(\int_{x^2-1}^{x+1}dy\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(y|_{y=x^2-1}^{y=x+1}\right)dy=\int_{-1}^{2}\left(x+1-x^2+1\right)dx\\ &= \left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=2}=\cdots\end{aligned}$$

14. Să se calculeze următoarea integrală dublă:
$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\,,$$
unde D este domeniul dat de: $4x^2+y^2\le 4, x^2+y^2\ge 1$ şi $y\ge 0$.
Rezolvare:

Domeniul D este simplu în raport cu axa Oy :
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -1\le x\le 1,\ \sqrt{1-x^2}\le y\le 2\sqrt{1-x^2}\right\}.$$

15. Calculaţi următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă:
$$I=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy\,,$$
unde D este domeniul: $x^2+y^2\ge x$ şi $x^2+y^2\le 2x$.
Rezolvare:

Pentru a desena domeniul trebuie mai întâi să luam curbele date de egalităţi:
$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= x\Leftrightarrow (x-1/2)^2+y^2=1/4,\\ x^2+y^2 &= 2x\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1.\end{aligned}$$

Deci domeniul este dat de exteriorul ($\ge$) cercului $(x-1/2)^2+y^2=1/4$ de centrul $C\,(1/2,0)$ şi rază $1/2$, şi de interiorul ($\le$) cercului $(x-1)^2+y^2=1$ de centrul $C\,(1,0)$ şi rază 1. Observăm că domeniul nu este simplu în raport cu nici o axă. Putem descompune domeniul în două domenii simple în raport cu axa Oy sau putem folosi **coordonatele polare** (date de coordonatele parametrice ale cercului)
$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\ \ \rho\in[0,R]\,,\ \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$$

Jacobianul în cazul trecerii la coordonate polare este dat de:

$$J(\rho,\theta)=\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\overset{def}{=}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=\rho$$

Trebuie să determinăm domeniile exacte pentru noile variabile polare (ρ,θ). Folosim inegalităţile domeniului dat D

$$x^2+y^2\geq x\Rightarrow(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2\geq\rho\cos\theta\Leftrightarrow\rho^2\geq\rho\cos\theta\Leftrightarrow\rho\geq\cos\theta$$

respectiv

$$x^2+y^2\leq 2x\Rightarrow(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2\leq 2\rho\cos\theta\Leftrightarrow\rho^2\leq 2\rho\cos\theta\Leftrightarrow\rho\leq 2\cos\theta$$

În ceea ce priveşte unghiul θ deducem din graficul domeniului D că $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$. Deci

$$\Delta=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2:\theta\in[-\pi/2,\pi/2]\,,\rho\in[\cos\theta,2\cos\theta]\right\}$$

Integrala dublă devine

$$\begin{aligned}I&=\iint_\Delta\left((\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2\right)\ |J(\rho,\theta)|\ d\rho d\theta=\iint_\Delta\rho^2\ \rho\ d\rho d\theta=\iint_\Delta\rho^3\ d\rho d\theta\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}\rho^3\ d\rho\right)d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{\rho=\cos\theta}^{\rho=2\cos\theta}d\theta=\frac{15}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\ d\theta,\end{aligned}$$

pentru care folosim, de două ori, formula

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}.$$

16. Calculaţi următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă:

$$\iint_{(D)}\left(x^2+y^2\right)dxdy,$$

unde D este domeniul mărginit de curba $x^2+y^2=2$.

Rezolvare:

Observ mai întâi că D este interiorul cercului (discul) dat de

$$x^2+y^2\leq\left(\sqrt{2}\right)^2.$$

Se trece la coordonate polare (ρ,θ) date de

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta.\end{cases}$$

Jacobianul transformării este $J=\rho$.

Din inegalitatea care dă pe D vom obţine domeniul noii variabile $\rho:$

$$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\leq 2\quad\Leftrightarrow\quad\rho^2\leq 2\quad\Leftrightarrow\quad\rho\in\left[0,\sqrt{2}\right].$$

Din desen avem că $\theta\in[0,2\pi]$.

Deci noul domeniu $\Delta:\begin{cases}0\leq\theta\leq 2\pi,\\ 0\leq\rho\leq\sqrt{2}.\end{cases}$.

Conform schimbării de variabilă şi a teoremei de reducere vom obţine că

$$I=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}\left(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\right)\rho\,d\rho\right]d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3d\rho.$$

17. Calculaţi următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă:

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy\,,$$

unde D este domeniul din primul cadran limitat de $x^2 + y^2 = a^2, y = x\sqrt{3}$ şi $x = y\sqrt{3}$.

Rezolvare:

Observ mai întâi că D este interiorul cercului (discul) dat de

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

astfel încât $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\, x \leq y \leq x\sqrt{3}\,.$

Se trece la coordonate polare (ρ, θ) şi, din inegalitatea care dă pe D, vom obţine domeniul pentru ρ :

$$\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \leq a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 \leq a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \in [0, a]\,.$$

Din desen avem că $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, unde θ_1, θ_2 sunt unghiurile făcute de dreptele $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\, x$ şi respectiv $y = x\sqrt{3}$ cu axa Ox. Deci $\operatorname{tg}(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $\operatorname{tg}(\theta_2) = \sqrt{3}\,.$

Obţinem noul domeniu $\Delta : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq a, \\ \dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}\,. \end{cases}$

Conform schimbării de variabilă şi a teoremei de reducere vom obţine că

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left[\int_0^a \left(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\right)\, \rho\, d\rho\right] d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta \cdot \int_0^a \rho^3 d\rho\,.$$

18. Calculaţi următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă:

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2 + y^2} dxdy\,,$$

unde D este domeniul dat de $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4\pi^2, \\ x^2 + y^2 \geq \pi^2. \end{cases}$

Rezolvare:

Se trece la coordonate polare (ρ, θ) şi, din inegalitatea care dă pe D, vom obţine domeniul pentru ρ :

$$\pi^2 \leq \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \leq 4\pi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \pi^2 \leq \rho^2 \leq 4\pi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \in [\pi, 2\pi]\,.$$

Din desen avem că $\theta \in [0, 2\pi]$.

Obţinem noul domeniu $\Delta : \begin{cases} \pi \leq \rho \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\,. \end{cases}$.

Conform schimbării de variabilă şi a teoremei de reducere vom obţine că

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_\pi^{2\pi} \sin\left(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\right)\, \rho\, d\rho\right] d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta \cdot \int_0^a \rho\sin\left(\rho^2\right) d\rho\,.$$

19. Calculaţi următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă:

$$\iint_{(D)} \frac{y^2}{x^2}\, dxdy,$$

unde $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$.

Rezolvare:

Observ mai întâi că D este exteriorul cercului

$$x^2 + y^2 \geq 1$$

intersectat cu interiorul cercului

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1.$$

Se trece la coordonate polare (ρ, θ) şi, din inegalitatea care dă pe D, vom obţine domeniul noii variabile ρ :

$$1 \leq \rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta \leq 2\rho\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq \rho^2 \leq 2\rho\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \rho \in [1, 2\cos\theta].$$

Observăm că trebuie impusă condiţia

$$2\cos\theta \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right].$$

Pe de altă parte, din desen avem că $\theta \in [-\theta_1, \theta_2]$, unde θ_1, θ_2 sunt unghiurile făcute de dreptele $y = -\sqrt{3}\,x$ şi respectiv $y = x\sqrt{3}$ cu axa Ox. Deci $\operatorname{tg}(\theta_2) = \sqrt{3}$.

Deci noul domeniu $\Delta : \begin{cases} -\dfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}\,, \\ 1 \leq \rho \leq 2\cos\theta\,. \end{cases}$.

Conform schimbării de variabilă şi a teoremei de reducere vom obţine că

$$I = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[\int_1^{2\cos\theta} \operatorname{tg}^2(\theta)\ \rho\, d\rho\right] d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2(\theta)\left[4\cos^2\theta - 1\right] d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left[4\sin^2\theta - \operatorname{tg}^2(\theta)\right] d\theta.$$

Deci trebuie calculate primitiva

$$\int \sin^2\theta\, d\theta$$

folosind formula $\sin^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, precum şi primitiva

$$\int \operatorname{tg}^2(\theta)\ d\theta$$

folosind subtituţia $\operatorname{tg}(\theta) = t$ şi formulele $\sin\theta = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ şi $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

20. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze aria domeniului D din primul cadran mărginit de curbele $\begin{cases} xy = p \\ xy = q \end{cases}$ şi $\begin{cases} y = ax \\ y = bx \end{cases}$, cu $0 < p < q$, $0 < a < b$.

Rezolvare:

Trebuie calculată aria dată de integrala

$$\mathcal{A} = \iint_D dxdy.$$

Vom face schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} xy = u, \\ y/x = v, \end{cases}$$

deci echivalent obţinem

$$\begin{cases} x = \sqrt{u/v} = u^{1/2}v^{-1/2}, \\ y = \sqrt{uv} = u^{1/2}v^{1/2},\ u \in [p,q]\,,\ v \in [a,b]\,. \end{cases}$$

Jacobianul este dat de $J = \dfrac{1}{2v}$ iar domeniul Δ este deci dreptunghiular

$$\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [p,q]\,,\ v \in [a,b]\right\} = [p,q] \times [a,b]\,.$$

21. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze aria domeniului D mărginit de curbele $\begin{cases} y^2 = px \\ y^2 = qx \end{cases}$ şi $\begin{cases} x^2 = ay \\ x^2 = by \end{cases}$, cu $0 < p < q$, $0 < a < b$.

22. Folosind coordonatele polare generalizate să se calculeze aria domeniului D mărginit de elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,.$

    Rezolvare:

    Trebuie calculată aria dată de integrala

$$\mathcal{A} = \iint_D dxdy.$$

Se trece la coordonate polare generalizate (ρ, θ) date de

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta, \\ y = b\rho\sin\theta. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este $J = ab\rho$.

Din inegalitatea care dă pe D vom obţine domeniul noii variabile ρ :

$$\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \in [0,1]\,.$$

Din desen avem că $\theta \in [0, 2\pi]\,.$

Deci noul domeniu $\Delta : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq \rho \leq 1. \end{cases}$.

23. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze integrala

$$\iint_D \arcsin\sqrt{x+y}\,dxdy\,,$$

unde D este domeniul mărginit de $x + y = 0, x + y = 1$ şi $y = -1, y = 1$.

Rezolvare:

Vom face schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} x + y = u, \\ y = v \end{cases}$$

deci echivalent obţinem

$$\begin{cases} x = u - v, \\ y = v, \quad u \in [0,1]\,,\ v \in [-1,1]\,. \end{cases}$$

Jacobianul este dat de $J = 1$ iar domeniul Δ este deci dreptunghiular

$$\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0,1]\,, \quad v \in [-1,1]\right\} = [0,1] \times [-1,1]\,.$$

24. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze integrala

$$\iint_D (x+y)^4 (x-y)^2 \ dxdy\,,$$

unde D este domeniul mărginit de $x + y = -1, x + y = 1$ şi $x - y = -3, x - y = -1$.

Rezolvare:

Vom face schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} x + y = u, \\ x - y = v \end{cases}$$

deci echivalent obţinem

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v), \\ y = \frac{1}{2}(u-v), \quad u \in [-1,1], \ v \in [-3,-1]. \end{cases}$$

25. Transformaţi următoarea integrală curbilinie folosind fomula lui Green:

$$I = \oint_{(C)} \sqrt{x^2+y^2}dx + y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy,$$

unde (C) este curba închisă $x^2+y^2=1$.

Rezolvare:

Formula lui Green: dacă curba închisă (C) mărgineşte domeniul D atunci are loc

$$I = \int_{(C)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

26. Aplicaţi formula lui Green pentru calculul integralei curbilinii

$$I = \oint_{(C)} 2\left(x^2+y^2\right)dx + (x+y)^2\,dy,$$

unde (C) este triunghiul dat de intersecţia dreptelor $x=1, y=x$ şi $y=4-x$.

27. Aplicaţi formula lui Green pentru calculul integralei curbilinii

$$I = \oint_{(C)} (x+y)^2\,dx - \left(x^2+y^2\right)dy,$$

unde (C) este triunghiul cu vârfurile $A(1,0), B(0,1)$ şi $O(0,0)$.

28. Calculaţi următoarea integrală dublă schimbând convenabil ordinea de integrare

$$I = \iint\limits_D \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dxdy,$$

unde D este dreptunghiul $D = [0,1] \times [0,1]$.

Rezolvare:

Avem următoarea reducere a integralei duble la două integrale simple:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dy\right)dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dx\right)dy.$$

Vom calcula integrala $\int_0^1 \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dy$ şi vom ţine cont de faptul că **atunci când integrăm în raport cu o variabilă vom considera cealaltă variabilă drept constantă**. Astfel

$$\int_0^1 \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+x^2+y^2\right)^{-3/2} \cdot \left(1+x^2+y^2\right)'_y\,dy =$$

$=$ (folosind prima metodă de schimbare de variabilă) $=$

$$= \frac{1}{2}\left.\frac{\left(1+x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right|_{y=0}^{y=1} = -\left[\left(2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Deci

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \right) dx$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right) \right] \Big|_{x=0}^{x=1} = \ln \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}} \Bigg|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \ln \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{2} \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} .$$

Observăm că dacă vom calcula mai întâi $\displaystyle\int_0^1 \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}} dx = y \int_0^1 \left(1+x^2+y^2\right)^{-3/2} dx$ atunci calculul integralei în raport cu dx este mai dificil.

29. Să se găsească volumul unui corp mărginit de planul XOY şi de planele $x=0, x=a$ şi $y=0, y=b$ şi superior de suprafaţa $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$.

    Rezolvare:

    Avem

$$I = \iint\limits_{(D)} f(x,y)\, dxdy,$$

    unde $z = f(x,y)$ şi $D = [0,a] \times [0,b]$ (dreptunghi). Deci

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(D)} \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dxdy = \int_0^a \left(\int_0^b \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^a \left(\left(\frac{x^2}{2p} \cdot y + \frac{1}{2q} \cdot \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=b} \right) dx = \int_0^a \left(\frac{bx^2}{2p} + \frac{b^3}{6q} \right) dx \\ &= \left(\frac{b}{2p} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{b^3}{6q} \cdot x \right) \Bigg|_{x=0}^{x=a} = \frac{a^3 b}{6p} + \frac{ab^3}{6q} . \end{aligned}$$

30. Calculaţi următoarea integrală dublă făcând o schimbare de variabilă convenabilă:

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} ,$$

    unde D este domeniul: $x^2+y^2 \leq 2y$.

    Rezolvare:

    Observ mai întâi că D este interiorul cercului

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

    Se trece la coordonate polare (ρ, θ) şi, din inegalitatea care dă pe D, vom obţine noul domeniu $\Delta : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 2\sin\theta \end{cases}$. Conform schimbării de variabilă şi a reducerii vom obţine că

$$I = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{1+4\sin^2\theta} d\theta$$

    care se va rezolva cu substituţia

$$\operatorname{tg}(\theta) = t$$

    şi cu formulele trigonometrice

$$\sin(\theta) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} , \quad \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} .$$

31. Făcând o schimbare de variabilă convenabilă să se calculeze integrala

$$I=\iint_D \frac{dxdy}{\left(1+b^2x^2+a^2y^2\right)^2}\,,$$

unde D este domeniul: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$.

Rezolvare:

Observ mai întâi că D este dat de interiorul elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Se trece la coordonate polare generalizate (ρ,θ) date de ecuaţiile $\begin{cases} x=a\rho\cos\theta \\ y=b\rho\sin\theta \end{cases}$ şi, din inegalitatea care dă pe D, vom obţine noul domeniu $\Delta:\begin{cases} 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 0\leq\rho\leq 1 \end{cases}$. Conform schimbării de variabilă şi a reducerii vom obţine că

$$I=2\pi\int_0^1 \frac{ab\rho}{\left(1+a^2b^2\rho^2\right)^2}d\rho\,.$$

32. Calculaţi

$$I=\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy\,,$$

unde D este sfertul din primul cadran al discului $x^2+y^2\leq 1$.

33. Calculaţi

$$I=\iint\limits_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy\,,$$

unde D este sfertul din primul cadran al interiorului elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$.

34. Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate ale plăcii $D=\{x+y\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}$ dacă densitatea este $\mu(x,y)=xy$.

Rezolvare:

Masa m a plăcii D este dată de

$$m=\iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy$$

iar coordonatele centrului de greutate $G(x_G,y_G)$ sunt date de

$$\begin{cases} x_G=\frac{1}{m}\iint_D x\mu(x,y)\,dxdy\,, \\ y_G=\frac{1}{m}\iint_D y\mu(x,y)\,dxdy\,. \end{cases}.$$

35. Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate ale plăcii $D=\left\{x^2+y^2\leq a^2, x^2+y^2\geq ax, y\geq 0\right\}$ dacă densitatea este $\mu(x,y)=1$.

Rezolvare:

Observ că D este dat de interiorul cercului $x^2+y^2=a^2$ şi de exteriorul cercului $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$. Se trece la coordonate polare (ρ,θ) şi, din inegalitatea care dă pe D, vom obţine noul domeniu $\Delta:\begin{cases} 0\leq\theta\leq\pi/2\,, \\ a\cos\theta\leq\rho\leq a. \end{cases}.$

36. Să se calculeze volumul corpului mărginit de planele $x = 0, y = 0, z = 0$, de cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$ şi superior de către paraboloidul hiperbolic $5z = xy$.

Rezolvare:

Volumul este dat de

$$\mathcal{V} = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy\,,$$

unde $z = f(x, y)$ este ecuaţia suprafeţei ce mărgineşte superior volumul, iar $(x, y) \in D$ unde D este proiecţia suprafeţei pe planul XOY. În cazul nostru D este sfertul de disc $x^2 + y^2 \le R^2$, $x, y \ge 0$.

37. Să se calculeze următoarea integrală dublă pe un domeniu dreptunghiular

$$I = \iint\limits_D \cos(x + y)\, dxdy\,,$$

unde D este dreptunghiul $D = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

38. Să se calculeze următoarea integrală dublă pe un domeniu dreptunghiular

$$I = \iint\limits_D x\cos(xy)\, dxdy\,,$$

unde D este dreptunghiul $D = [1, 2] \times [0, \pi]$.

39. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$I = \iint\limits_D (x + 2y)\, dxdy\,,$$

unde D este domeniul mărginit de curbele $y = 2x$, $y = 3 - x^2$ şi $x = 0$.

40. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$I = \iint\limits_D (2x + 5y)\, dxdy\,,$$

unde D este domeniul mărginit de curbele $y = 0$, $y = 4$, $x = 4$ şi $y = x^2$.

41. Să se calculeze volumul cilindroidului

$$\mathcal{C} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 25,\ y \le \frac{3}{4}x,\ z \le xy\right\}$$

(este corpul mărginit superior de către paraboloidul hiperbolic $z = xy$ şi cu proiecţia pe planul $x0y$ dată de porţiunea de disc $x^2 + y^2 \le 25,\ y \le \frac{3}{4}x$).

42. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$I = \iint\limits_D (1 + x)\, dxdy\,,$$

unde

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge |x|\,,\ y \le \frac{1}{2}x + 2\right\}.$$

43. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$I = \iint_D \frac{y}{1+x} dxdy\,,$$

unde D este domeniul mărginit de curbele $x^2 + y^2 = 25$ şi $x^2 + y^2 - \frac{25}{4}x = 0$.

44. Să se calculeze următoarea integrală dublă

$$I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy\,,$$

unde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{3}x,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

45. Să se transforme integrala dublă $\iint_{(D)} f(x,y)\,dxdy$ în integrale iterate, unde D este domeniul mărginit de cercurile $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$.

Rezolvare:

Amintim mai întâi **ecuaţia generală a unui cerc** cu centru în $C(a,b)$ şi de rază r :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

În cazul nostru, primul cerc $(\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x\right) + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ este cu centrul în $C_1(1,0)$ şi de rază $r_1 = 1$.

Al doilea cerc $(\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 = 4x \Leftrightarrow \left(x^2 - 4x\right) + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$ este cu centrul în $C_2(2,0)$ şi de rază $r_1 = 2$.

Ducem prin $x = 2$ o paralelă la axa Oy şi astfel domeniul D se va împărţi în trei subdomenii: $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ şi fiecare subdomeniu D_i este simplu în raport cu Oy. Are loc

$$I = \iint_{(D_1)} f(x,y)\,dxdy + \iint_{(D_2)} f(x,y)\,dxdy + \iint_{(D_3)} f(x,y)\,dxdy$$

Trebuie explicitat fiecare subdomeniu. În acest sens vom scrie ecuaţiile explicite ale cercurilor:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{C}_1) &: \quad x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow y^2 = 2x - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2x - x^2} \\
(\mathcal{C}_2) &: \quad x^2 + y^2 = 4x \Leftrightarrow y^2 = 4x - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4x - x^2}
\end{aligned}$$

deci obţinem

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ \sqrt{2x - x^2} \le y \le \sqrt{4x - x^2}\right\} \\
D_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ -\sqrt{4x - x^2} \le y \le -\sqrt{2x - x^2}\right\} \\
D_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 4,\ -\sqrt{4x - x^2} \le y \le \sqrt{4x - x^2}\right\}
\end{aligned}$$

În acest caz integralele sunt date de

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{(D_1)} f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx, \\
I_2 &= \iint_{(D_2)} f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx, \\
I_3 &= \iint_{(D_3)} f(x,y)\,dxdy = \int_2^4 \left(\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx.
\end{aligned}$$