Facultatea de Matematică
Calcul integral, Semestrul I
Lector dr. Lucian MATICIUC

Seminar recapitulativ

Integrala definită. Primitive

1. Să se arate că

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,, & \text{dacă } f \text{ este funcţie pară,} \\ 0\,, & \text{dacă } f \text{ este funcţie impară.} \end{cases}$$

Rezolvare:

Astfel avem conform proprietăţii de aditivitate că

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Acum dacă f este pară, adică

$$f(-x) = f(x)\ ,\ \forall\, x \in [-a, a]\,,$$

atunci în prima integrală fac schimbarea de variabilă

$$x = -y \Leftrightarrow y = -x$$

De aici obţinem că $dx = -dy$ precum şi noile limite de integrare: dacă $x = -a$ atunci $y = a$ şi dacă $x = 0$ atunci $y = 0$.

Deci integrala devine, conform schimbării de variabilă,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)\,(-dy) = \int_{a}^{0} f(y)\,(-dy) = -\int_{a}^{0} f(y)\,dy$$

Dar, conform unei convenţii

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int_{b}^{a} f(x)\,dx$$

deci

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(y)\,dy = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

de unde obţinem că

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Dacă f este impară, adică

$$f(-x) = -f(x)\ ,\ \forall\, x \in [-a, a]\ ,$$

atunci în prima integrală fac aceeaşi schimbarea de variabilă

$$x = -y \Leftrightarrow y = -x$$

De aici obţinem $dx = -dy$ şi limitele de integrare devin: dacă $x = -a$ atunci $y = a$ şi dacă $x = 0$ atunci $y = 0$.

Deci integrala devine, conform schimbării de variabilă,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)(-dy) = \int_{a}^{0} -f(y)(-dy) = \int_{a}^{0} f(y)\,dy = -\int_{0}^{a} f(y)\,dy = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

deci

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(y)\,dy = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Obţinem deci că

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

2. Arătaţi, folosind paritatea funcţiei de sub integrală, că

$a)\ \int_{-1}^{1} \frac{\text{arctg}x}{e^x + e^{-x}}dx = 0$, $b)\ \int_{-1/2}^{1/2} (\cos x) \ln \frac{1+x}{1-x}dx = 0$,

$c)\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin x \cdot \text{tg}^2 x = 0$, $d)\ \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{1+x^2}dx = 0$

Rezolvare:

Aplic exerciţiul anterior. Astfel vom arăta că funcţiile care se integrează sunt impare.

Pentru aceasta folosim paritatea funcţiilor trigonometrice:

$$\sin(-x) = -\sin x\ ,\ \ \cos(-x) = \cos x$$
$$\text{tg}(-x) = -\text{tg}x\ ,\ \text{arctg}(-x) = -\text{arctg}x$$

$a)$ Notăm cu $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\text{arctg}x}{e^x+e^{-x}}$.

$$f(-x) = \frac{\text{arctg}(-x)}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{-\text{arctg}x}{e^{-x} + e^x} = -f(x)$$

$b), c), d)$ Temă (se va folosi şi faptul că $\ln y^{-1} = -\ln y$, $\forall\ y > 0$).

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcţie continuă şi periodică de perioadă $T > 0$. Să se arate că are loc

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx\ ,\ \forall\ a \in \mathbb{R}$$

şi apoi să se calculeze:

$a)\ \int_{0}^{2n\pi} |\sin x|\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, $b)\ \int_{0}^{2n\pi} |\cos x|\,dx$, $n \in \mathbb{N}$

Rezolvare:

Funcţia f periodică înseamnă că $f(x+T) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Avem conform proprietăţii de aditivitate că

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{T} f(x)\,dx + \int_{T}^{a+T} f(x)\,dx$$

În ultima integrală fac schimbarea de variabilă

$$x = y + T \Leftrightarrow y = x - T$$

De aici obţinem $dx = dy$ şi limitele de integrare devin: dacă $x = T$ atunci $y = 0$ şi dacă $x = a + T$ atunci $y = a$. Deci integrala devine, conform schimbării de variabilă,

$$\int_{T}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(y+T)\,dy = \int_{0}^{a} f(y)\,dy = -\int_{a}^{0} f(y)\,dy$$

deci
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

a) Ştim că sin şi cos sunt periodice de periodice de perioadă 2π

$$\begin{aligned} \sin(x+2\pi) &= \sin x\ ,\ \forall\ x\in\mathbb{R} \\ \cos(x+2\pi) &= \cos x\ ,\ \forall\ x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

deci evident şi funcţiile $|\sin x|$, $|\cos x|$.

Conform celor de mai sus, avem că

$$\int_0^{2n\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx + \int_{2\pi}^{4\pi} |\sin x|\,dx + \cdots + \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} |\sin x|\,dx =$$
$$= \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx + \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx + \cdots + \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = n\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$$

Iar

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx &= \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = \\ &= (-\cos x)\big|_0^{\pi} - (-\cos x)\big|_{\pi}^{2\pi} = 4 \end{aligned}$$

deci
$$\int_0^{2n\pi} |\sin x|\,dx = n\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 4n$$

b) Temă

4. Să se calculeze următoarele integrale (folosind tabelul):

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$, *b*) $\int \sqrt{2px}dx$, *c*) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$, *d*) $\int \frac{dx}{5+x^2}$, *e*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$, *f*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$,

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$, *h*) $\int \frac{dx}{a-x}$, *i*) $\int \frac{dx}{3x^2+5}$, *j*) $\int \frac{dx}{7x^2-8}$, *k*) $\int \sqrt{2-3x}dx$, *l*) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$,

m) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$, *n*) $\int \frac{3}{5x^2+7}dx$.

5. Să se calculeze următoarele integrale (folosind **metoda de integrare prin părţi**):

a) $\int \left(x^2+5x\right)e^{2x}dx$, *b*) $\int e^{ax}\sin(bx)\ dx$, *c*) $\int x^2\sin x\ dx$, *d*) $\int \ln^3 x\ dx$, *e*) $\int x^3\ln^2 x\ dx$

f) $\int \sqrt{x^2+a}dx$, $a\in\mathbb{R}$, *g*) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$, *h*) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \int x^{-3}\ln x dx = \int \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)'\ln x dx =$ ...

Rezolvare:

Dacă f şi g sunt funcţii cu derivatele continue pe domeniul de definiţie I atunci are loc formula de integrare prin părţi:
$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx.$$

$a)$ Folosim $e^{2x} = \frac{1}{2}\left(e^{2x}\right)'$:

$$\int \left(x^2+5x\right) e^{2x} dx = \int \left(x^2+5x\right) \frac{1}{2}\left(e^{2x}\right)' dx = \left(x^2+5x\right)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int \left(x^2+5x\right)' e^{2x} dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^2+5x\right)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x+5)\, e^{2x} dx = \text{aplicăm încă o dată}$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^2+5x\right)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x+5)\,\frac{1}{2}\left(e^{2x}\right)' dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^2+5x\right)e^{2x} - \frac{1}{2}\left((2x+5)\,\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x+5)' e^{2x} dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^2+5x\right)e^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2x+5)\, e^{2x} - \frac{1}{2}\int 2e^{2x} dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^2+5x\right)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x+5)\, e^{2x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C\ , \quad C\in\mathbb{R}$$

$b)$ Folosim $e^{ax} = \frac{1}{a}\left(e^{ax}\right)'$:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\ dx = \int \frac{1}{a}\left(e^{ax}\right)'\sin(bx)\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \int \frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin(bx)\right)' dx =$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\, dx = \text{aplicăm încă o dată}$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int \frac{1}{a}\left(e^{ax}\right)'\cos(bx)\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\cos(bx) - \int e^{ax}\left(\cos(bx)\right)' dx\right) =$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\cos(bx) + \int b e^{ax}\sin(bx)\, dx\right) =$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\, dx$$

Deci

$$\int e^{ax}\sin(bx)\ dx + \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) + C\ , \quad C\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int e^{ax}\sin(bx)\ dx = \frac{a^2}{a^2+b}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx)\right) + C,\ C\in\mathbb{R}$$

Observaţie: putem pleca şi de la $\sin(bx) = \frac{-1}{b}\left(\cos(bx)\right)'$

$c)$ Temă (folosim $\sin x = -\left(\cos x\right)'$).

$d)$

$$\int \ln^3 x\ dx = \int x' \ln^3 x\ dx = x\ln^3 x - \int x\left(\ln^3 x\right)' dx =$$
$$= x\ln^3 x - 3\int x\ln^2 x\frac{1}{x}dx = x\ln^3 x - 3\int \ln^2 x\ dx = \text{aplicăm încă o dată}$$
$$= x\ln^3 x - 3\int x'\ln^2 x\ dx = x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - \int x\left(\ln^2 x\right)' dx\right) =$$
$$= x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2\int x\ln x\frac{1}{x}dx\right) = x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2\int \ln x dx\right) =$$
$$= x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int x\left(\ln x\right)' dx\right)\right) =$$
$$= x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - x\right)\right) + C\ , \quad C\in\mathbb{R}$$

$e)$ Temă (folosim $x^3 = \frac{1}{4}\left(x^4\right)'$)

$f)$

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{x^2+a}dx = (\text{raţionalizare}) = \int \frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}dx = \\
&= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx + \int \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}dx = \int x\left(\sqrt{x^2+a}\right)' dx + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| = \\
&= a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + \left(x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}dx\right) \\
&= a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + x\sqrt{x^2+a} - I
\end{aligned}$$

Deci

$$I = \int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C\ ,\ C\in\mathbb{R}$$

$g), h), i), j), k)$ Temă.

6. (Temă) Să se calculeze următoarele integrale folosind metoda de integrare prin părţi:

$a)\ \int \left(x^3+2x\right)e^{5x}dx\ ,\quad b)\ \int e^{ax}\sin(bx)\ dx\ ,\quad c)\ \int e^{ax}\cos(bx)\ dx\ ,\quad d)\ \int e^{3x}\sin(4x)\ dx\ ,$

$e)\ \int e^{4x}\cos(3x)\ dx\ ,\quad f)\ \int x^3\cos x\ dx\ ,\quad g)\ \int x^3\sin(5x)\ dx\ ,\quad h)\ \int x^3\cos(5x)\ dx\ ,$

$i)\ \int \ln x dx\ ,\quad j)\ \int x^2\ln^3 x\ dx\ ,\quad k)\ \int \sqrt{x^2+5}dx\ ,\quad l)\ \int \sqrt{x^2-5}dx\ ,\quad m)\ \int \sqrt{5-x^2}dx$

$n)\ \int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx,\quad o)\ \int \left(x^2+5x+6\right)\cos(2x)\,dx,\quad p)\ \int \left(x^2-2x+3\right)\ln x dx.$

7. Folosind **prima metodă de schimbare de variabilă** să se calculeze:

$a)\ \int \frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx\ ,\quad b)\ \int \frac{1}{x\ln^2 x}dx\ ,\quad c)\ \int \frac{1}{x\ln^5 x}dx\ ,$

$d)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx\ ,\quad e)\ \int_2^3 \sqrt{6x-x^2-5}\ dx\ ,\quad f)\ \int \sqrt{x^2+x+1}dx$

Rezolvare:

Aplic prima metodă de schimbare de variabilă:

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = F(u(x)) + C,\ C\in\mathbb{R},$$

unde F este o primitivă a lui funcţiei f.

De asemenea are loc şi în cazul integralei definite:

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\,dy = F(y)\Big|_{y=u(a)}^{y=u(b)} = F(u(b)) - F(u(a))\ .$$

$a)$ Observ că $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\arccos x)'$, deci

$$\int \frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \left(\sqrt{1-x^2}\right)' dx + \int \arccos x\,(-\arccos x)'\,dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} - \int \arccos x\,(\arccos x)'\,dx = -\sqrt{1-x^2} - \int \arccos x\ d(\arccos x)\,.$$

Acum dacă notăm

$$y \overset{not}{=} \arccos x \Rightarrow dy = (\arccos x)'\,dx$$

deci integrala devine

$$\int \frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} - \int y dy =$$
$$= -\sqrt{1-x^2} - \frac{y^2}{2} + C = -\sqrt{1-x^2} - \frac{(\arccos x)^2}{2} + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

b) Observ că $\frac{1}{x} = (\ln x)'$ şi voi nota $y \overset{not}{=} \ln x \Rightarrow dy = (\ln x)' \, dx$

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x}dx = \int \frac{1}{\ln^2 x}(\ln x)' \, dx = \int \frac{1}{y^2}dy = \int y^{-2}dy =$$
$$= \frac{y^{-3}}{-3} + C = \frac{(\ln x)^{-3}}{-3} + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

c) Temă

d) Observ că $\cos x = (\sin x)'$ şi voi nota $y \overset{not}{=} \sin x \Rightarrow dy = (\sin x)' \, dx$ şi limitele de integrare devin: dacă $x = 0$ atunci $y = \sin 0 = 0$ şi dacă $x = \pi/2$ atunci $y = \sin \pi/2 = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2 x}(\sin x)' \, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy = \text{arctg} y|_0^1 = \text{arctg}1 - \text{arctg}0 = \pi/4 - 0$$

e) Folosim **forma canonică a trinomului de gradul** 2

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

unde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Deci

$$6x - x^2 - 5 = -x^2 + 6x - 5 = -\left(x + \tfrac{6}{-2}\right)^2 + \tfrac{-(36-20)}{-4}$$
$$= -(x-3)^2 + 4 = 4 - (x-3)^2$$

şi

$$\int_2^3 \sqrt{6x - x^2 - 5}dx = \int_2^3 \sqrt{4 - (x-3)^2}dx = \int_2^3 \sqrt{4 - (x-3)^2}\,(x-3)' \, dx =$$

Notez $y \overset{not}{=} x - 3 \Rightarrow dy = (x-3)' \, dx$ şi limitele de integrare devin: dacă $x = 2$ atunci $y = -1$ şi dacă $x = 3$ atunci $y = 0$.

$$\int_2^3 \sqrt{6x - x^2 - 5}dx = \int_{-1}^0 \sqrt{4 - y^2}dy$$

Pentru a calcula ultima integrală vezi exerciţiile precedente.

f) Temă.

8. (Temă) Folosind prima metodă de schimbare de variabilă să se calculeze:

$$a)\int \frac{\cos x}{\sin x}dx \ , \quad b)\int \frac{\sin x}{\cos x}dx \ , \quad c)\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx \ , \quad d)\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$$

$$e)\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} \ , \quad f)\int x^2 e^{x^3}dx, \quad g)\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx.$$

9. (Temă)

(*i*) Aduceţi la forma canonică următoarele trinoame de gradul al doilea:

a) $f(x) = 4x - x^2 + 5$, *b*) $f(x) = x^2 + 3x - 5$, *c*) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, *d*) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

e) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, *f*) $f(x) = x^2 - x - 1$, *g*) $f(x) = 2 + 3x - 2x^2$, *h*) $f(x) = x^2 + 2x + 2$,

i) $f(x) = x^2 + 2x + 5$, *j*) $f(x) = 3x^2 - x + 1$, *k*) $f(x) = 2 + 3x - 2x^2$, *l*) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

(ii) Calculaţi diferenţialele $df(x)$ ale următoarelor funcţii de o variabilă:

$a)$ $f(x) = \sin^2 x$, $b)$ $f(x) = \ln x$, $c)$ $f(x) = \ln^2 x$, $d)$ $f(x) = x^3$, $e)$ $f(x) = \sqrt{x}$,

$f)$ $f(x) = \cos x$, $g)$ $f(x) = e^{3x}$, $h)$ $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$, $i)$ $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $j)$ $f(x) = \mathrm{tg} x$.

10. Folosind **a doua metodă de schimbare de variabilă** să se calculeze integralele:

$a)$ $\int \cos^2 \sqrt{x} dx$, $b)$ $\int_0^1 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$, $c)$ $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $d)$ $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$.

Rezolvare:

Aplic **a doua metodă de schimbare de variabilă**: *Dacă facem schimbarea de variabilă*

$$x = u(y)$$

atunci

$$dx = u'(y)\,dy\ , \quad y = u^{-1}(x)$$

unde u^{-1} *este inversa funcţiei* u*, şi integrala devine*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(y))\,u'(y)\,dy$$

$a)$ Vom nota $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$ deci $dx = 2ydy$ şi integrala devine

$$\int \cos^2 \sqrt{x} dx = \int \cos^2 y \ 2ydy = 2 \int y \cos^2 y \ dy$$

Pentru calculul acestei integrale vezi metoda de integrare prin părţi. La sfârşit se va înlocui $y = \sqrt{x}$.

$b)$ Avem **substituţiile trigonometrice**:

1. Dacă integrala conţine termenul $\sqrt{a^2 - x^2}$ atunci este utilă substituţia $x = a \sin y$ sau $x = a \cos y$

2. Dacă integrala conţine termenul $\sqrt{x^2 - a^2}$ atunci este utilă substituţia $x = a\ \mathrm{ch} y$

3. Dacă integrala conţine termenul $\sqrt{x^2 + a^2}$ atunci este utilă substituţia $x = a\ \mathrm{sh} y$

unde

$$\mathrm{sh} x \overset{def}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ , \quad \mathrm{ch} x \overset{def}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

şi evident avem

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1\ , \quad (\mathrm{sh} x)' = \mathrm{ch} x\ , \quad (\mathrm{ch} x)' = \mathrm{sh} x.$$

În cazul nostru este utilă substituţia $x = 2 \sin y$ (de asemenea e utilă şi substituţia $x = 2 \cos y$). Deci

$$dx = (2 \sin y)' \, dy = 2 \cos y dy$$

şi

$$x = 2 \sin y \Leftrightarrow y = \arcsin x/2.$$

Limitele de integrare devin: dacă $x = 0$ atunci $y = \arcsin 0 = 0$ şi dacă $x = 1$ atunci $y = \arcsin 1/2 = \pi/6$. Atunci integrala devine

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \int_0^{\pi/6} 4 \sin^2 y \sqrt{4 - 4 \sin^2 y} 2 \cos y dy =$$

$$= 16 \int_0^{\pi/6} \sin^2 y \sqrt{1 - \sin^2 y} \cos y dy = 16 \int_0^{\pi/6} \sin^2 y \cos^2 y dy$$

Avem formulele

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$
$$\sin(2y) = 2\sin y\cos y \Rightarrow \sin y \cos y = \tfrac{\sin 2y}{2}$$
$$\cos(2y) = 2\cos^2 y - 1 \Rightarrow \cos^2 y = \tfrac{1+\cos 2y}{2}$$
$$\cos(2y) = 1 - 2\sin^2 y \Rightarrow \sin^2 y = \tfrac{1-\cos 2y}{2}$$

Deci

$$\int_0^1 x^2\sqrt{4-x^2}dx = 16\int_0^{\pi/6}(\sin y\cos y)^2 dy = 4\int_0^{\pi/6}\sin^2 2y dy =$$
$$= 4\int_0^{\pi/6}\frac{1-\cos 4y}{2}dy = 2\int_0^{\pi/6}dy - 2\int_0^{\pi/6}\cos 4y dy = \left(2y - 2\frac{\sin 4y}{4}\right)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

c) Temă.

d) În acest caz este utilă substituţia $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Deci

$$dx = \left(a\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)' dy = a\frac{e^y + e^{-y}}{2}dy$$

şi

$$x^2 + a^2 = \left(a\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 + a^2 = a^2\left(\frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4} + 1\right) = a^2\frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4} = \left(a\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2.$$

Deci

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx = \int a\frac{e^y+e^{-y}}{2}a\frac{e^y+e^{-y}}{2}dy = \frac{a^2}{4}\int\left(e^y+e^{-y}\right)^2 dy = \frac{a^2}{4}\int\left(e^{2y}+e^{-2y}+2\right)dy$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(\frac{e^{2y}}{2} + \frac{e^{-2y}}{-2} + 2y\right) + C\ ,\ C\in\mathbb{R}$$

11. Să se calculeze următoarele **integrale din funcţii ce conţin un trinom de gradul al doilea:**

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2-5x+7}$, *b*) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$, *c*) $\displaystyle\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$, *d*) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx$,

e) $\displaystyle\int\sqrt{a+x^2}dx$, *f*) $\displaystyle\int\sqrt{1-2x-x^2}dx$, *g*) $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2-x+1}$, *h*) $\displaystyle\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx.$

12. (Temă) Să se calculeze următoarele **integrale din funcţii raţionale**:

a) $\displaystyle\int\frac{1}{x-a}dx$, *b*) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$, $\alpha\neq 1$, *c*) $\displaystyle\int\frac{1}{ax-b}dx$, *d*) $\displaystyle\int\frac{1}{(ax+b)^\alpha}dx$,

e) $\displaystyle\int\frac{1}{2x^2-4x+8}dx$, *f*) $\displaystyle\int\frac{1}{2x^2-5x+3}dx$, *g*) $\displaystyle\int\frac{4x-5}{x^2-2x+10}dx$,

h) $\displaystyle\int\frac{-x+5}{x^2+x-2}dx$, *i*) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx = \int\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}\right)dx$,

j) $\displaystyle\int\frac{3x^2+x-4}{x^3+5x^2+9x+5}dx = \int\left(\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+4x+5}\right)dx.$

13. Să se calculeze următoarele **integrale din funcţii raţionale**:

a) $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^4-1}dx$, *b*) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+1}dx$, *c*) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3-2x^2+x}dx$, *d*) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+6x^2+11x+6}dx$

Rezolvare:

Dacă integrala este dintr-o funcţie raţională atunci:

Pasul I: **dacă gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului atunci mai întâi se împart polinoamele până se ajunge ca gradul numărătorului să fie mai mic strict decât gradul numitorului.**

Pasul II: **apoi se vor căuta divizorii numitorului şi se va descompune fracţia în fracţii simple.**

a)

$$\frac{x^4}{x^4-1} = \frac{x^4-1+1}{x^4-1} = \frac{x^4-1}{x^4-1} + \frac{1}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} =$$
$$= 1 + \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = 1 + \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

Descompunerea în fracţii simple înseamnă să căută constantele a, b, c, d a.î. să aibă loc

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Aducând la acelaşi numitor obţin

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a(x+1)\left(x^2+1\right)+b(x-1)\left(x^2+1\right)+(cx+d)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = a\,(x+1)\left(x^2+1\right) + b\,(x-1)\left(x^2+1\right) + (cx+d)\,(x-1)\,(x+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = (a+b+c)\,x^3 + (a-b+d)\,x^2 + (a+b-c)\,x + (a-b-d) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+d=0 \\ a+b-c=0 \\ a-b-d=1 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obţin $a = 1/4, b = -1/4, c = 0, d = -1/2$ deci are loc

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}\right)$$

adică

$$\int \frac{x^4}{x^4-1}dx = \int dx + \int \frac{1}{(x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)}dx = x + \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}\right)dx =$$
$$= x + \frac{1}{4}\left(\ln(x-1) - \ln(x+1) - 2\mathrm{arctg}x\right) + C$$

b)

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = a\left(x^2-x+1\right) + (x+1)\,(bx+c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = (a+b)\,x^2 + (-a+b+c)\,x + (a+c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=0 \\ a+c=1 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obţin $a = 1/3, b = -1/3, c = 2/3$ deci are loc

$$\frac{1}{(x+1)\,(x^2-x+1)} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-1/3x+2/3}{x^2-x+1}$$

adică

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

Acum avem $\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \int \frac{x}{x^2-x+1}dx - \int \frac{2}{x^2-x+1}dx$. Pentru acestea două se vor face calcule standard. Mai întâi, pentru prima, se formează la numărător derivata numitorului adică

$$\int \frac{x}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-x+1}dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x-1+1}{x^2-x+1}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2-x+1\right)'}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1/2)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}dx =$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\tfrac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} + C$$

$c)$ Temă: $\frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ unde a, b, c trebuie determinaţi...

$d)$ Temă: Rădăcinile întregi ale lui $x^3+6x^2+11x+6=0$ se găsesc printre divizorii termenului liber...

14. **(Temă)** Să se calculeze următoarele **integrale din funcţii raţionale**:

$$a)\int \frac{1}{\left(x^3-1\right)^2}dx\ ,\quad b)\int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3}dx\ ,\quad c)\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}\ ,\quad d)\int \frac{dx}{x(x+1)^2},$$

$$e)\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}\ ,\quad f)\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx\ ,\quad g)\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}\ .$$

15. Să se calculeze următoarele **integrale din funcţii iraţionale**:

$$a)\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx\ ,\quad b)\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx\ ,\quad c)\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx\ ,\quad d)\int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$$

Rezolvare:

Fie integralele de forma $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, ...\right)dx$ unde R este o expresie raţională. Aceste integrale se reduc la integrale raţionale cu ajutorul substituţiei

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$$

unde s este cel mai mic multiplu comun al numitorilor $q_1, q_2, ...$

$a)$ Apare termenul $\sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2}$ deci este utilă substituţia

$$x+1 = t^2 \Leftrightarrow x = t^2-1 \Rightarrow dx = 2tdt$$

deci integrala devine

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{t+2}{(t^2)^2-t}2tdt =$$
$$= 2\int \frac{t^2+2t}{t^4-t}dt = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}dt = 2\int \frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}dt$$

şi am ajuns la integrala dintr-o funcţie raţională. Descompunem în fracţii simple

$$\frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1}$$

cu a, b, c determinaţi aducând la acelaşi numitor şi identificând coeficienţii. Obţin $a = 1.b = -1, c = -1$ şi integrala se reduce la integrale simple.

$$I = 2\int \tfrac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}dt = 2\int \left(\tfrac{1}{t-1} - \tfrac{t+1}{t^2+t+1}\right) dt =$$
$$= 2\left(\ln(t-1) - \int \tfrac{t+1}{t^2+t+1}dt\right)$$

Mai întâi
$$\int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt = \int \frac{t}{t^2+t+1}dt + \int \frac{1}{t^2+t+1}dt$$

iar acestea se fac prin calcule standard. La sfârşit se va înlocui $t = (x+1)^{1/2}$.

b) Temă: Apare $\sqrt{x} = x^{1/2}$ şi $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ deci se va face substituţia $x = t^6$ unde 6 este cel mai mic multiplu comun al numitorilor 2 şi 3.*c*), *d*) Temă.

16. Să se calculeze următoarele integrale din funcţii iraţionale (**integrale binome**):

$$a)\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx\ ,\quad b)\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{\sqrt[4]{x^5}}dx\ ,\quad c)\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx\ ,\quad d)\int \frac{1}{x\sqrt[3]{1+x^5}}dx\ ,$$

$$e)\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}dx\ ,\quad f)\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}\ ,\ g)\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{5/3}}$$

Rezolvare:

Fie integralele de forma $\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$ unde $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Aceste integrale se reduc la integrale raţionale doar în următoarele trei situaţii (cu ajutorul substituţiilor respective):

i) **Dacă p este număr întreg.**

ii) **Dacă $\dfrac{m+1}{n}$ este număr întreg şi în acest caz este utilă substituţia $a + bx^n = t^s$ unde s este numitorul lui p.**

iii) **Dacă $\dfrac{m+1}{n} + p$ este număr întreg şi în acest caz este utilă substituţia $\dfrac{a+bx^n}{x^n} = t^s$ unde s este numitorul lui p.**

a) $\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 = x^{1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^2$ deci $m = 1/2$, $n = 1/3$, $p = 2$ deci suntem în prima situaţie şi, evident, merge substituţia $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5dt$ deci integrala devine

$$\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \int \left(t^6\right)^{1/2}\left(1+\left(t^6\right)^{1/3}\right)^2 6t^5dt =$$
$$= \int \left(t^6\right)^{1/2}\left(1+\left(t^6\right)^{1/3}\right)^2 6t^5dt = \int t^3\left(1+t^2\right)^2 6t^5dt =$$
$$= \int t^3\left(1+t^2\right)^2 6t^5dt$$

şi obţin integrala dintr-o funcţie polinomială...

b) Temă: $\frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{\sqrt[4]{x^5}} = x^{-5/4}\left(1+x^{1/3}\right)^3$ deci $m = -5/4$, $n = 1/3$, $p = 3$ deci suntem în prima situaţie şi merge substituţia $x = ... \Rightarrow dx = ...dt$ deci integrala devine...

c) $\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}$ deci $m = -1/2$, $n = 1/4$, $p = 1/3$ şi

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-1/2+1}{1/4} = 2 \in \mathbb{Z}$$

deci suntem în a doua situaţie şi merge substituţia

$$1 + x^{1/4} = t^3 \Leftrightarrow x^{1/4} = t^3 - 1 \Leftrightarrow x = \left(t^3 - 1\right)^4 \Rightarrow dx = 4\left(t^3 - 1\right)^3 3t^2 dt$$

deci integrala devine

$$\begin{aligned} &\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2}\left(1 + x^{1/4}\right)^{1/3} dx = \\ &= \int \left(\left(t^3 - 1\right)^4\right)^{-1/2} \left(t^3\right)^{1/3} 12t^2 \left(t^3 - 1\right)^3 dt = \\ &= 12 \int \left(t^3 - 1\right)^{-2} tt^2 \left(t^3 - 1\right)^3 dt = 12 \int \left(t^3 - 1\right) t^3 dt = \\ &= 12 \int \left(t^6 - t^3\right) dt = 12\left(t^7/7 - t^4/4\right) + C \end{aligned}$$

şi acum se înlocuieşte t cu $\left(1 + x^{1/4}\right)^{1/3}$.

d), e) Temă, suntem în situaţia ii).

f), g) Temă, suntem în situaţia iii).

17. Să se calculeze următoarele integrale din funcţii trigonometrice:

$a)\ \int \sin^2 x \cos^3 x dx\ ,\quad b)\ \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx\ ,\quad c)\ \int \frac{1}{\sin x + \mathrm{tg} x} dx\ ,\quad d)\ \int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx\ ,$

$e)\ \int \frac{1}{\cos^4 x} dx\ ,\ f)\ \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$

Rezolvare:

Fie integralele de forma $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ **unde** $R(a, b)$ **este o expresie raţională în** a **şi** b. **Aceste integrale se reduc la integrale raţionale cu ajutorul următoarelor substiţituţii:**

i) **Dacă** $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ **atunci este utilă substituţia** $\cos x = t$.

ii) **Dacă** $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ **atunci este utilă substituţia** $\sin x = t$.

iii) **Dacă** $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ **atunci este utilă substituţia** $\mathrm{tg} x = t$.

iv) **Substituţia universală** $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$.

În cazul integralelor din funcţii trigonometrice sunt utile următoarele formule trigonometrice

$$\begin{aligned} &\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \\ &\sin x \cos x = \tfrac{\sin 2x}{2}\ ,\quad \sin^2 x = \tfrac{1 - \cos 2x}{2}\ ,\quad \cos^2 x = \tfrac{1 + \cos 2x}{2}\ , \\ &\sin x = \tfrac{2t}{1 + t^2}\ ,\ \cos x = \tfrac{1 - t^2}{1 + t^2}\ ,\ \text{unde } t = \mathrm{tg}\tfrac{x}{2}\ , \\ &\sin x = \tfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\ ,\ \cos x = \tfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\ ,\ \text{unde } t = \mathrm{tg} x\ . \end{aligned}$$

a) Avem că $R(\sin x, \cos x) = \sin^2 x \cos^3 x$ deci

$$R(\sin x, -\cos x) = \sin^2 x\left(-\cos x\right)^3 = -\sin^2 x \cos^3 x = -R(\sin x, \cos x)$$

adică suntem în cazul ii). Este utilă substituţia $\sin x = t$

$$\begin{aligned} &\textstyle\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \\ &= \textstyle\int \sin^2 x \cos^2 x \left(\sin x\right)' dx = \int \sin^2 x\left(1 - \sin^2 x\right) d(\sin x) \end{aligned}$$

deci $\sin x = t \Rightarrow dt = d(\sin x) = (\sin x)' \, dx$ adică

$$I = \int t^2 \left(1 - t^2\right) dt = \int \left(t^2 - t^4\right) dt = t^3/3 - t^5/5$$

unde t trebuie înlocuit cu $\sin x$.

b) Temă: $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$ este impară în $\sin x$, deci cazul *i*)

c) $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x + \mathrm{tg} x}$. În acest caz vom folosi substituţia universală (în cazul integralelor trigonometrice):

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \mathrm{arctg} t \Leftrightarrow x = 2\mathrm{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Deci, folosind şi formulele trigonometrice respective, are loc

$$\int \frac{1}{\sin x + \mathrm{tg} x} dx = \int \frac{1}{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}} \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2t}{1-t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{2t\left(\frac{1-t^2+1+t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\right)} \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \frac{1}{t\frac{2}{1-t^2}} dt = \int \frac{1-t^2}{2t} dt = \int \frac{1}{2t} dt - \int \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{4} t^2 + C =$$

$$= \tfrac{1}{2} \ln\left(\mathrm{tg}\tfrac{x}{2}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{tg}\tfrac{x}{2}\right)^2 + C$$

d) *e*) Temă: suntem în cazul *iii*).

f) Temă: suntem în cazul *iv*).

18. Să se calculeze următoarele integrale folosind metoda de integrare prin părţi:

a) $\int \mathrm{arctg} x \, dx$, *b*) $\int x \mathrm{arctg} x \, dx$, *c*) $\int x^2 \mathrm{arctg} x \, dx$

d) $\int \arcsin x \, dx$, *e*) $\int x \arcsin x \, dx$, *f*) $\int \arcsin^2 x \, dx$.

19. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$, *b*) $\int \frac{x dx}{x^2 + a^2}$, *c*) $\int \frac{x dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$, *d*) $\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$,

e) $\int \frac{x dx}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$, *f*) $\int \frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^3} dx$, *g*) $\int \frac{1}{\sin^n x} dx$, $n \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Rezolvare:

d)

$$\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2+a^2}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x^2+a^2} dx - \frac{1}{a^2} \int x \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{1}{a} \mathrm{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \frac{-1}{2} \int x \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)' dx = \frac{1}{a^3} \mathrm{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\left(x \frac{1}{x^2+a^2} - \int 1 \frac{1}{x^2+a^2} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{a^3} \mathrm{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\left(x \frac{1}{x^2+a^2} - \int 1 \frac{1}{x^2+a^2} dx\right) = \frac{1}{a^3} \mathrm{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\left(x \frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{a} \mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right) + C.$$

$g)$ Pentru $n = 1$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{1-\cos^2 x} (-\cos x)' \, dx = (\text{subst. } \cos x = t) = \int \frac{1}{t^2-1} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C.\end{aligned}$$

sau, folosind substituţia universală

$$\mathrm{tg} \frac{x}{2} = t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \mathrm{arctg} t \Leftrightarrow x = 2\mathrm{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

obţinem

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln \left| \mathrm{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

Pentru $n = 2$, folosind tabelul obţinem:

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + C$$

sau, folosind substituţia universală, obţinem

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{t^2} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{t} + t \right) + C = \frac{1}{2} \frac{t^2-1}{t} + C \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^2 - 1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}} + C = \cdots = -\mathrm{ctg} x + C.\end{aligned}$$

Pentru $n = 3$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1}{\left(1-\cos^2 x\right)^2} (-\cos x)' \, dx = (\text{subst. } \cos x = t) = \int \frac{-1}{\left(1-t^2\right)^2} dt \\ &= \cdots = -\int \left(\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} + \frac{d}{(1+t)^2} \right) dt = \cdots .\end{aligned}$$

sau, folosind substituţia universală, obţinem

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^3} dt = \cdots .$$

20. **(Temă)** Să se calculeze următoarele integrale:

$a)$ $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$, $b)$ $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} dx$, $c)$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$,

$d)$ $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2} dx$, $e)$ $\displaystyle\int \frac{x}{\left(x^2+x+1\right)^2} dx$.

21. Calculaţi aria figurii plane cuprinsă între curbele (date explicit) $y^2 = 2px$ şi $x^2 = 2py$.

Particularizaţi pentru $p = 1/2$.

Rezolvare: Dacă suntem în cazul în care curbele care dau domeniul sunt date explicit iar domeniul este deci $D = \{(x, y) : a \le x \le b \, , \; f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$ atunci aria domeniului D este dată de

$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx$$

22. Calculaţi volumul sferei. Calculaţi volumul elipsoidului (acestea se obţin prin rotaţia unui semicerc şi respectiv a unei semielipse în jurul axei Ox).

    Rezolvare: Dacă volumul $V \subset \mathbb{R}^3$ este obţinut prin rotaţia mulţimii $F = \{(x,y) : a \le x \le b \ , \ 0 \le y \le f(x)\}$ atunci volumul este dat de
$$\mathcal{V}(F) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$
    În cazul nostru sfera este dată de rotaţia domeniului (semidiscului)
$$F = \left\{(x,y) : -r \le x \le r,\ 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}\right\}$$
    respectiv dat de rotaţia domeniului (semielipsei)
$$F = \left\{(x,y) : -a \le x \le a,\ 0 \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right\}.$$

23. Determinaţi volumul corpului de rotaţie dat de $f : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$.

24. Determinaţi lungimea graficului funcţiei $f : [3, 8] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$.

    Rezolvare: Dacă suntem în cazul în care curba este dată explicit de $(C) : y = f(x)$, $a \le x \le b$ atunci lungimea curbei este dată de
$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

25. Determinaţi lungimea graficului funcţiei $f : [\pi/3, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\cos x)$.

26. Determinaţi lungimea curbei dată parametric $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0, \pi/2]$.

    Rezolvare: Dacă suntem în cazul în care curba este dată curba este în plan şi este dată parametric de $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $a \le t \le b$ atunci lungimea curbei este dată de
$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

27. Determinaţi lungimea curbei din spaţiu dată parametric $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = ct \end{cases}$, $t \in [0, \pi]$.

    Rezolvare: În cazul în care $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $a \le t \le b$ (adică în cazul în care curba este dată curba este în spaţiu şi este dată parametric) lungimea curbei este dată de
$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

28. Determinaţi aria discului.

29. Determinaţi lungimea cercului.