Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii
şi Tehnologia Informaţiei
Algebră, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC
http://math.etti.tuiasi.ro/maticiuc/

CURS I – II

1 Matrice şi determinanţi. Sisteme de ecuaţii liniare

1.1 Matrice şi determinanţi

Definiţia 1 *Se numeşte* ***matrice reală cu*** m ***linii şi*** n ***coloane*** *(şi se va numi matrice de tip* (m,n)*), o funcţie care asociază fiecărei perechi* (i,j) *cu* $i=\overline{1,m}$*,* $j=\overline{1,n}$ *un unic număr real notat* a_{ij}*. Se foloseşte notaţia*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \textit{sau} \quad A=(a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} .$$

Mulţimea tuturor matricelor reale de tip (m,n) o vom nota prin $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Numerele a_{ij} cu $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ se numesc **elementele matricei**.

Fie $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Dacă $m=n$, atunci matricea A se numeşte **matrice pătratică** iar $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ se va nota prin $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dacă $m=1$, atunci matricea A se numeşte **matrice linie** şi deci

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

iar dacă $n=1$, atunci matricea A se numeşte **matrice coloană** şi deci

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Spunem că A este **matricea nulă** dacă are toate elementele 0.

Matricea pătratică

$$I_n:=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

se numeşte **matricea unitate de ordinul** n.

Definiţia 2 *Prin* ***suma a două matrice*** $A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *înţelegem o nouă matrice* $C=A+B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *ale cărei elemente sunt suma elementelor corespunzătoare din cele două matrice. Astfel dacă* $A=(a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ *iar* $B=(b_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ *atunci* $C=A+B$ *este definită de* $C=(c_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ *cu*

$$c_{ij}:=a_{ij}+b_{ij},\ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\ .$$

Definiţia 3 *Prin* ***produsul matricei*** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ***cu scalarul*** $\alpha \in \mathbb{R}$ *se înţelege o nouă matrice, de aceleaşi dimensiuni, obţinută prin înmulţirea tuturor elementelor lui A cu scalarul α. Astfel dacă $A = (a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ iar $\alpha \in \mathbb{R}$ este un scalar oarecare, atunci αA este definită de*

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} = (\alpha a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}.$$

Teorema 4 *Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

$(a)\quad A + B = B + A;$ $\qquad (b)\quad (A + B) + C = A + (B + C);$

$(c)\quad A + 0 = A;$ $\qquad (d)\quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$

$(e)\quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$ $\qquad (f)\quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A.$

Definiţia 5 *Prin* ***produsul matricelor*** $A = (a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *şi* $B = (b_{j,k})_{\substack{j=\overline{1,n}\\ k=\overline{1,p}}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *se înţelege o nouă matrice $C = (c_{i,k})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ k=\overline{1,p}}} := AB$, ale cărei elemente sunt date prin:*

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p}\,.$$

Remarca 6 *Prin urmare, $c_{i,k}$ este "produsul liniei i din A cu coloana k din B", adică elementul $c_{i,k}$ (situat la intersecţia liniei i cu coloana k) se obţine din sumarea produselor elementelor liniei i a matricei A cu elementele coloanei k a matricei B.*

Exerciţiul 7 *Fie $A = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ şi $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Calculaţi $AB = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [ax + by + cz]$ şi că*

$$BA = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & bx & cx \\ ay & by & cy \\ az & bz & cz \end{bmatrix}.$$

Exerciţiul 8 *Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculaţi A^n, unde $n \in \mathbb{N}^*$ (matricea A^n este, prin definiţie, $A^n := \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$).*

Exerciţiul 9 *Să se efectueze diverse operaţii cu următoarele matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Teorema 10 *Fie trei matrice A, B şi C astfel încât dimensiunile lor permit efectuarea operaţiilor indicate mai jos şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

$(a)\quad A(BC) = (AB)C;$ $\qquad (b)\quad A(B + C) = AB + AC;$

$(c)\quad (B + C)A = BA + CA;$ $\qquad (d)\quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B);$

$(e)\quad I_m A = A I_n = A$

(amconsiderat că $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$).

Remarca 11 *Înmulţirea matricelor nu este comutativă. Astfel, dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci se pot efectua produsele AB şi BA, dar există exemple pentru care $AB \neq BA$.*

Exerciţiul 12 *Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ şi $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Calculaţi AB şi BA. Calculaţi şi AI_2 şi I_2B.*

Definiţia 13 *Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ se numeşte **transpusa matricei** A (şi o vom nota prin A^t) matricea obţinută prin interschimbarea liniilor şi coloanelor lui A, adică*

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Exerciţiul 14 *Fie $A^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Scrieţi A^t.*

Teorema 15 *Fie două matrice A, B şi C astfel încât dimensiunile lor permit efectuarea operaţiilor indicate mai jos şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

$$(a) \quad (A^t)^t = A; \qquad (b) \quad (\alpha A)^t = \alpha A^t;$$
$$(c) \quad (A+B)^t = A^t + B^t; \qquad (d) \quad (AB)^t = B^t A^t.$$

Definiţia 16 *O matrice pătratică A care are proprietatea că $A = A^t$ se numeşte matrice simetrică.*

Definiţia 17 *Fie o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se numeşte **determinant** al matricei A, şi se notează cu $\det A$ sau cu $|A|$, un număr real definit recurent în modul următor:*
(a) dacă $n = 2$, atunci

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

(b) dacă $n > 2$, atunci

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} D_{1i} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} D_{1n} \ ,$$

unde D_{1i} este determinantul matricei pătratice de ordinul $n-1$ obţinută prin eliminarea primei linii si a coloanei i din matricea A, pentru $i = \overline{1,n}$.

Remarca 18 *Prin definiţia de mai sus, calcularea unui determinant de ordin n se reduce la calcularea a n determinanţi de ordin $n-1$.*

Remarca 19 *În cazul particular $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ obţinem:*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Pentru $n = 3$ se obţine regula lui Sarrus (copiind primele două linii sub matricea A):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Remarca 20 *În definiţia de mai sus de calcul a unui determinant s-a considerat dezvoltarea după prima linie, dar se poate considera (în mod echivalent) şi dezvoltarea după orice altă linie sau coloană.*

*Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ se numeşte **complementul algebric corespunzător liniei** i **şi coloanei** j, pentru $i, j = \overline{1, n}$. Mai precis, în matricea A, suprimăm linia i şi coloana j şi obţinem o matrice de ordin $(n-1)$ al cărei determinant este D_{ij}.*

Folosind complemenţii algebrici corespunzători unei linii sau unei coloane, putem calcula determinantul unei matrice printr-o formulă asemănătoare celei din definiţie, dezvoltând după o linie sau coloană oarecare a matricei.

Teorema 21 *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci pentru $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixaţi avem:*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \ , \end{aligned}$$

unde A_{ik} este complementul algebric corespunzător liniei i şi coloanei k.

Exerciţiul 22 *Calculaţi* $\det A$, *unde* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Este avantajos să considerăm dezvoltarea după a treia coloană deoarece conţine două zerouri. Astfel

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+3} 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \left((-1)^{1+1}(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \left((-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 0 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= - \left(- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \right) = -4 - 8 = -12.$$

Teorema 23 *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

(a) $\det A^t = \det A$;

(b) $\det (AB) = \det A \cdot \det B$;

(c) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

(d) *dacă matricea* A *are o linie (sau o coloană) formată numai din zerouri, atunci* $\det A = 0$;

(e) *dacă matricea* A *are două linii (sau două coloane) egale sau proporţionale, atunci* $\det A = 0$;

(f) ***dacă matricea*** B ***este obţinută prin adăugarea la o linie a lui*** A ***a unei alte linii înmulţită cu un scalar****, atunci*

$$\det B = \det A;$$

(g) *dacă matricea* B *este obţinută prin interschimbarea a două linii ale lui* A*, atunci*

$$\det B = -\det A;$$

(h) ***dacă matricea*** B ***este obţinută prin înmulţirea unei linii a lui*** A ***cu un scalar*** $\alpha \in R$*, atunci*

$$\det B = \alpha \det A.$$

Remarca 24 *Proprietăţile* (f)*,* (g) *şi* (h) *enunţate mai sus rămân valabile dacă operaţiile precizate se efectuează asupra coloanelor matricei* A*.*

Definiţia 25 *O matrice pătratică* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *se numeşte* ***nesingulară*** *dacă are determinantul nenul, şi se numeşte* ***singulară*** *dacă are determinantul nul.*

Definiţia 26 *O matrice pătratică* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *spunem că este* ***inversabilă*** *dacă există o matrice notată* $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *(numită* ***matricea inversă*** *a lui* A*) cu proprietatea că*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n ,$$

unde I_n *este matricea unitate de ordinul* n*.*

Teorema 27 *O matrice pătratică* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *este inversabilă dacă şi numai dacă este matrice nesingulară. În acest caz, inversa acesteia este dată de formula:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*,$$

unde A^* *se numeşte* ***matricea adjunctă*** *a lui* A *şi este definită de*

$$A^* := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

iar A_{ij} *este complementul algebric corespunzător liniei* i *şi coloanei* j*.*

Remarca 28 *Adjuncta* A^* *se obţine înlocuind fiecare element al lui* A^t *prin complementul său algebric; mai precis, în matricea* A^t*, suprimăm linia* i *şi coloana* j *şi obţinem o matrice de ordin* $(n-1)$ *al cărei determinant este* D_{ij}*, iar* $A_{i,j} := (-1)^{i+j} D_{ij}$ *este complementul algebric al elementului* $a_{i,j}$ *.*

Exerciţiul 29 *Fie* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$*. Calculaţi* $\det A$*,* A^t*,* A^* *şi* A^{-1}*. Vom obţine* $\det A = -2$ *şi* $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Exerciţiul 30 *Fie* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$*. Calculaţi* $\det A$*,* A^t*,* A^* *şi* A^{-1}*.*

Vom obţine $\det A = 1$ *şi* $A^{-1} = A^* = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Definiţia 31 *Fie* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *şi* $p \leq \min(m,n)$.
(a) *Se numeşte* ***minor de ordinul*** p ***al matricei*** A*, orice determinant de ordin* p *al unei matrice obţinute prin intersectarea a* p *linii şi* p *coloane din* A*;*
(b) *Se numeşte* ***rangul matricei*** A *(şi se notează cu* $\operatorname{rang}(A)$*), ordinul maxim al minorilor nenuli ai lui* A*.*

Remarca 32 *Prin urmare,* $r \leq \min(m,n)$ *este rangul matricei* A *dacă aceasta are un minor de ordin* r *nenul şi toţi minorii de ordin mai mare decât* r *(dacă există) sunt nuli.*

Remarca 33 *Operaţiile care păstrează rangul unei matrice se numesc transformări elementare şi sunt următoarele:*
- *înmulţirea unei linii (coloane) cu o constantă nenulă*
- *interschimbarea a două linii (coloane)*
- *adunarea unei linii (coloane) înmulţită cu o constantă la o altă linie (coloană).*

Remarca 34 ***Pentru calculul rangului unei matrice se foloseşte teorema lui Kronecker: dacă într-o matrice*** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ***există un minor de ordin*** $r \leq \min(m,n)$ ***nenul şi toţi minorii de ordin*** $(r+1)$ ***ce se pot forma cu aceştia, prin bordarea cu o nouă linie şi coloană sunt nuli, atunci*** $\operatorname{rang}(A) = r$.

Exerciţiul 35 *Fie* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. *Calculaţi* $\operatorname{rang}(A)$.

Astfel, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ *şi* $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ *şi* $\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$*, deci* $\operatorname{rang}(A) = 2$.

1.2 Sisteme de ecuaţii liniare

Definiţia 36 *Se numeşte* ***sistem de ecuaţii liniare*** *un sistem de forma*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Definiţia 37 *Matricele formate cu ajutorul coeficienţilor sistemului*

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \bar{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

se numesc ***matricea sistemului****, respectiv* ***matricea extinsă a sistemului****.*

Remarca 38 *Sistemul (1) este un sistem algebric liniar de* m *ecuaţii cu* n *necunoscute. Folosind notaţiile precedente, acesta se poate scrie sub forma restrânsă (matriceală)*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B,$$

unde $X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *iar* $B := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix}^t \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ *reprezintă matricea necunoscutelor şi, respectiv, matricea termenilor liberi.*

Propoziţia 39 *Dacă A este matrice pătratică nesingulară, atunci soluţia sistemului este dată de*

$$X = A^{-1}B.$$

Definiţia 40 *Dacă toţi termenii liberi sunt nuli, i.e. $B = 0$ (sau $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$), atunci sistemul se numeşte* ***omogen****.*

Definiţia 41 *Dacă $B \neq 0$, atunci sistemul se numeşte* ***neomogen****.*

Definiţia 42 (a) *Rangul matricei A se numeşte* ***rangul sistemului****.*
(b) *Dacă există valorile reale $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ care verifică ecuaţiile sistemului (1), spunem că n–uplul $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ este o soluţie a sistemului (1).*

Remarca 43 *A rezolva un sistem de ecuaţii înseamnă a găsi soluţii $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Definiţia 44 (a) *Sistemul (1) este* ***compatibil*** *dacă admite cel puţin o soluţie.*
(b) *Sistemul (1) este* ***incompatibil*** *dacă nu admite nici o soluţie.*
(c) *Sistemul (1) este* ***compatibil determinat*** *dacă admite o singură soluţie.*
(d) *Sistemul (1) este* ***compatibil nedeterminat*** *dacă admite mai multe soluţii.*

În cazul în care numărul ecuaţiilor este egal cu numărul necunoscutelor ($m = n$), pentru rezolvarea sistemului se poate folosi regula lui Cramer

Teorema 45 (Regula lui Cramer) *Fie sistemul cu n ecuaţii şi n necunoscute*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

Dacă $\det A \neq 0$***, atunci sistemul este compatibil şi are soluţia unică dată de***

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}\ ,$$

unde $D = \det A$***, iar*** D_i ***este determinantul matricei obţinută prin înlocuirea în matricea*** A ***a coloanei*** i ***cu coloana termenilor liberi, pentru*** $i = \overline{1, n}$***.***

Exerciţiul 46 *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *şi* $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. *Observăm că* $\det(A) = 15 \neq 0$, *deci sistemul are soluţie unică dată de regula lui Cramer. Calculăm*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 45,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30,\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 15$$

şi deci

$$(x, y, z) = \frac{1}{15}(45, 30, 15) = (3, 2, 1)\,.$$

Definiţia 47 *Fie* $r = \operatorname{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$. *Se numeşte* ***determinant principal al sistemului*** *(1), orice minor de ordin* r *nenul al matricei* A.

Definiţia 48 *Fie* $r = \operatorname{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$. *Se numeşte* ***determinant caracteristic asociat determinantului principal****, orice minor de ordin* $(r+1)$ *al matricei extinse* $\bar{A}$ *obţinut prin bordarea determinantului principal cu una dintre liniile rămase şi cu coloana termenilor liberi corespunzători.*

Remarca 49 *Se pot forma* $m - r$ *determinanţi caracteristici.*

Remarca 50 *Ecuaţiile şi necunoscutele corespunzătoare determinantului principal se numesc* ***ecuaţii şi, respectiv, necunoscutele principale****, celelalte numindu-se* ***necunoscute secundare****.*

Teorema 51 (Kronecker–Capelli) ***Sistemul (1) este compatibil dacă şi numai dacă matricele*** A ***şi*** $\bar{A}$ ***au acelaşi rang, adică*** $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A})$.

Remarca 52 *Întrucât matricea extinsă* $\bar{A}$ *este obţinută prin adăugarea unei coloane la matricea* A*, în general avem că* $\operatorname{rang}(A) \leq \operatorname{rang}(\bar{A})$. *Aşadar un sistem este incompatibil dacă prin adăugarea coloanei termenilor liberi se măreşte rangul matricei.*

Remarca 53 *În concluzie, notând cu* $r := \operatorname{rang}(A)$ *şi cu* m *şi* n *numărul de linii, respectiv de coloane ale sistemului, au loc următoarele cazuri:*
(a) *Dacă* $r = m$*, atunci sistemul este compatibil şi atunci:*
(a_1) *Dacă* $m = n$*, atunci sistemul este compatibil determinat (şi atunci soluţia sistemului se obţine aplicând regula de calcul a lui Cramer).*
(a_2) *Dacă* $m < n$*, atunci sistemul este compatibil nedeterminat şi admite o infinitate de soluţii (şi atunci soluţiile sistemului se obţin parametrizând necunoscutele secundare şi rezolvând sistemul format din ecuaţiile principale şi necunoscutele principale).*
(b) *Dacă* $r < m$*, atunci aplicăm teorema lui Kronecker–Capelli.*

Remarca 54 *Deci*

$$\text{Un sistem este} \begin{cases} \textit{compatibil determinat dacă:} & \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = n, \\ \textit{compatibil nedeterminat dacă:} & \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) < n, \\ \textit{incompatibil dacă:} & \operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(\bar{A}), \end{cases}$$

unde n *este numărul de necunoscute.*

Remarca 55 *Practic: se scriu matricele* A *şi* $\bar{A}$ *şi se calculează rangul lor. Dacă* $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(\bar{A})$*, atunci sistemul este incompatibil.Dacă* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A})$*, atunci sistemul este compatibil. Acum, dacă rangul obţinut este egal cu numărul de necunoscute, atunci sistemul este compatibil determinat cu soluţia dată de regula lui Cramer. Dacă rangul obţinut este mai mic strict decât numărul de necunoscute, atunci* *sistemul este compatibil nedeterminat; pentru a găsi soluţia, determinăm, folosind minorul principal (cel care dă rangul), ecuaţiile principale şi necunoscutele principale. Celelate necunoscute se vor numi secundare şi se vor renota cu alte litere (vor deveni parametri), urmând ca necunoscutele principale să se determine în funcţie de aceste necunoscute secundare.*

Exerciţiul 56 *Să se rezolve şi să se discute sistemul:*

$$\begin{cases} x - 4y - 3z = 1 \\ -3x + 12y - 3z = 2 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem mai întâi matricea sistemului şi matricea extinsă:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \end{bmatrix}, \ \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 12 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observăm că $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 2$*, deci, conform teoremei lui Kronecker–Capelli, sistemul este compatibil dar nedeterminat (admite o soluţie dar aceasta nu este unică). Determinantul principal (cel care dă rangul) este* $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$*, deci necunoscutele* x *şi* z *sunt necunoscutele principale, iar* y *este necunoscuta secundară. Vom nota* $y = \alpha$ *şi rescriem sistemul sub forma*

$$\begin{cases} x - 3z = 1 + 4\alpha \\ -3x - 3z = 2 - 12\alpha \end{cases}$$

care are soluţia unică $(x, z) = (4\alpha - 1/4, -5/12)$*, deci soluţia sistemului iniţial este* $(x, y, z) = (4\alpha - 1/4, \alpha, -5/12)$*, cu* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarca 57 *În cazul particular al sistemelor liniare şi omogene avem următoarele concluzii:*
(a) *Un sistem liniar omogen este întotdeauna compatibil, el admiţând cel puţin soluţia banală* $X = 0$*, i.e.* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$*. Evident* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A})$.
(b) *Un sistem liniar omogen admite şi alte soluţii (diferite de cea banală) dacă şi numai dacă* $\operatorname{rang}(A)$ *este mai mic decât numărul de necunoscute.*
(c) *Prin urmare, un sistem liniar omogen în care numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute admite şi alte soluţii (diferite de cea banală) dacă şi numai dacă* $\det(A) = 0$.

Exerciţiul 58 *Să se rezolve şi să se discute următorul sistem omogen:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ *şi calculăm* $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$*, deci* $\operatorname{rang} A \geq 2$.

Apoi prin bordarea minorului Δ_2 *obţinem doi minori de ordin superior* $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ *şi* $\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$*. Deoarece sunt nuli deducem că* $\operatorname{rang}(A) = 2$*. Evident* $\operatorname{rang} \bar{A} = \operatorname{rang} A$, *deci sistemul este compatibil dar nedeterminat; astfel necunoscutele principale sunt* x_1 *şi* x_2 *iar ecuaţiile principale sunt primele două. Necunoscutele secundare sunt celelalte două şi le vom parametriza:* $\alpha := x_3$ *şi* $\beta := x_4$*. Sistemul devine*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -2\alpha + \beta \\ 2x_1 = \alpha - 3\beta \end{cases}$$

care are soluţia $x_1 = (\alpha - 3\beta)/2$, $x_2 = -5(\alpha - \beta)/4$. *Sistemul iniţial are atunci soluţia* $(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((\alpha - 3\beta)/2, -5(\alpha - \beta)/4, \alpha, \beta)$*, unde* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 59 (metoda lui Gauss) *Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemul*

$$\begin{cases} x + y + 3z = 10 \\ -2x + 3y - z = 5 \\ -x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

Rezolvare:

Evident, problema se rezolvă calculând cele două ranguri de matrici, $\operatorname{rang}(A)$ *şi* $\operatorname{rang}(\bar{A})$*; apoi trebuie văzut dacă sunt sau nu egale şi apoi trebuie găsit determinantul principal şi ecuaţiile şi necunoscutele principale.*

Există însă şi o metodă alternativă de a studia sistemul. Aceasta este metoda lui Gauss pe care o prezentăm în continuare. Matricea extinsă a sistemului este $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ *şi* ***vom face transformări convenabile pentru a obţine zerouri sub diagonala principală. Astfel vom aduna prima linie înmulţită cu constante convenabile la celelalte linii (ştim că în urma acestor transformări aplicate unor matrici pătratice, rangul noii matrice obţinute nu se modifică). Apoi vom aduna a doua linie înmulţită cu constante convenabile la următoarele linii, ş.a.m.d.. Astfel vom obţine zerouri pe coloane şi sistemul obţinut va fi unul triunghiular care se rezolvă imediat plecând de la ultima ecuaţie.***

În cazul nostru, notând formal liniile cu L_i*, scriem* $L_1 \cdot 2 + L_2$, $L_1 \cdot 1 + L_2$*, apoi* $L_2' \cdot 1/5 + L_3'$ *şi obţinem*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ -2+2 & 3+2 & -1+6 & 5+20 \\ -1+1 & -2+1 & 3+3 & 6+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & -1 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & -1+1 & 6+1 & 16+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{bmatrix}$$

şi sistemul este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 10 \\ 5y + 5z = 25 \\ 17z = 21. \end{cases}$$

Soluţia lui este imediată $(x, y, z) = (-1, 2, 3)$.

Remarca 60 ***Evident, metoda lui Gauss este utilă şi pentru determinarea rangului unei matrice şi pentru calcul de determinanţi. Menţionăm, în plus, că, pentru a aplica metoda lui Gauss, nu contează numărul de ecuaţii şi de necunoscute ale sistemului.***

1.3 Exerciţii

1. Să se efectueze diverse operaţii cu matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare:

Avem

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 55 & 18 \end{bmatrix} \text{ şi}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -5 & -5 \\ -26 & 20 & -3 \\ -10 & 15 & -7 \end{bmatrix}.$$

Calculaţi şi: $A^t + B$, BC, DE şi ED.

2. Fie $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{bmatrix}$. Determinaţi k astfel încât $AB = BA$.

Rezolvare:

Avem

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -10+5k \\ -9 & 15+k \end{bmatrix} \text{ şi}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 15 \\ 6-3k & 15+k \end{bmatrix}.$$

Acum ecuaţia dată iniţial $AB = BA \Leftrightarrow \begin{cases} -10+5k = 15 \\ 6-3k = -9 \end{cases}$ care are soluţia $k = 5$ (a ambelor ecuaţii).

3. Fie $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ şi $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Să se verifice că $AB = AC$, deşi $B \neq C$. Explicaţi.

Rezolvare:

Avem

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \text{ şi}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$$

Dacă matricea A ar fi nesingulară, i.e. $\det A \neq 0$, atunci, echivalent, ar fi inversabilă, deci există inversa A^{-1}. Înmulţind egalitatea cu A^{-1} în partea stângă obţinem $A^{-1}AB = A^{-1}AC \Leftrightarrow I_2B = I_2C \Leftrightarrow B = C$. Dar $\det A = 0$ deci A nu admite inversă.

4. Să se calculeze determinanţii:

$$(a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix};\quad (b)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix};\quad (c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare:

(a) Avem

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \text{(dezvoltăm după prima linie care conţine două zerouri)}$$

$$= +1\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \\ -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 9 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \\ -4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \\ -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \\ -4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \left(+3\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}\right) + \left(+2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (3\,(-49) - 4\cdot 49 + 7\cdot 49) + (2\cdot 49 - 3\cdot 2 + 4\cdot 31) = 216.$$

(b) Avem

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{(dezvoltăm după a patra coloană care conţine două zerouri)}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = -2\cdot 67 + 2\cdot 14 = -106.$$

(c) Avem $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -11$ (se va dezvolta după prima linie, apoi după a doua linie, apoi după a treia linie).

5. Să se calculeze determinanţii:

$$(a)\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 2! & 3! \\ 3! & 3! & 3! \end{vmatrix};\ (b)\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 2! & 3! & 4! \\ 3! & 3! & 3! & 4! \\ 4! & 4! & 4! & 4! \end{vmatrix} \text{ şi}$$

$$(c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}\ ;\ (d)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare:

Aplicăm metoda de calcul a unui determinant: *dacă matricea B este obţinută prin adăugarea la o linie a lui A a unei alte linii înmulţită cu un scalar, atunci* $\det B = \det A$.

(a) Înmulţind coloana a doua cu -3 şi adunând-o la a treia coloană, obţinem

$$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 2! & 3! \\ 3! & 3! & 3! \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1! & 2! & 0 \\ 2! & 2! & 0 \\ 3! & 3! & 3! - 3\cdot 3! \end{vmatrix} = \text{(dezvoltăm după coloana a treia)}$$

$$= -(3-1)\,3!\begin{vmatrix} 1! & 2! \\ 2! & 2! \end{vmatrix} = -2\cdot 3!\cdot(2! - 2\cdot 2!) = 2\cdot 1\cdot 3!\cdot 2! = (-1)^{3+1}(3-1)!\,3!\,2!\,1!.$$

(b) Înmulţind coloana a treia cu -4 şi adunând-o la a patra coloană, obţinem

$$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 2! & 3! & 4! \\ 3! & 3! & 3! & 4! \\ 4! & 4! & 4! & 4! \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & 0 \\ 2! & 2! & 3! & 0 \\ 3! & 3! & 3! & 0 \\ 4! & 4! & 4! & 4! - 4\cdot 4! \end{vmatrix} = \text{(dezvoltăm după coloana a patra)}$$

$$= -(4-1)\,4!\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 2! & 3! \\ 3! & 3! & 3! \end{vmatrix} = -(4-1)\ 4!\ (-1)^{3+1}(3-1)!\,3!\,2!\,1! = (-1)^{4+1}(4-1)!\,4!\,3!\,2!\,1!\ .$$

(c) Înmulţind coloana a doua cu -1 şi adunând-o la a treia coloană (scădem coloana a doua din coloana a treia), obţinem, dezvoltând şi după ultima coloană, valoarea -2.

(d) Înmulţind coloana a doua cu -1 şi adunând-o la a patra coloană (scădem coloana a doua din coloana a patra), obţinem, dezvoltând şi după ultima coloană, vloarea -4.

6. Să se calculeze determinanţii Vandermonde

$$V_3(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad V_4(a_1,a_2,a_3,a_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare:

Aplicăm metoda de calcul a unui determinant: *dacă matricea B este obţinută prin adăugarea la o linie a lui A a unei alte linii înmulţită cu un scalar, atunci* $\det B = \det A$. Se va obţine, adunând la o line, linia precedentă înmulţită cu $-a$ şi dezvoltând apoi după linie sau coloană convenabilă,

$$V_3(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-a & b-a & c-a \\ a^2-a^2 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix}.$$

Acum, putem calcula direct sau putem aplica o metodă de calcul a unui determinant: *dacă matricea B este obţinută prin înmulţirea unei linii (sau coloane) a lui A cu un scalar α*, atunci $\det B = \alpha \det A$. Deci

$$\begin{aligned} V_3(a,b,c) &= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)V_2(b,c) = (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

Aceeaşi tehnică se poate aplica acum şi pentru determinanţi Wandermonde de ordin superior. Astfel

$$V_4(a_1,a_2,a_3,a_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1-a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_1^2-a_1^2 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & a_4^2-a_1a_4 \\ a_1^3-a_1^3 & a_2^3-a_1a_2^2 & a_3^3-a_1a_3^2 & a_4^3-a_1a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & a_4^2-a_1a_4 \\ 0 & a_2^3-a_1a_2^2 & a_3^3-a_1a_3^2 & a_4^3-a_1a_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & a_4^2-a_1a_4 \\ a_2^3-a_1a_2^2 & a_3^3-a_1a_3^2 & a_4^3-a_1a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)V_4(a_1,a_2,a_3)$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3).$$

Remarca 61 *Se poate şi aduna la fiecare coloană, prima coloana înmulţită cu -1 şi vom obţine:*

$$V_3(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-b \\ b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = \cdots,$$

precum şi

$$V_4(a_1,a_2,a_3,a_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_1^2 & a_2^2-a_1^2 & a_3^2-a_1^2 & a_4^2-a_1^2 \\ a_1^3 & a_2^3-a_1^3 & a_3^3-a_1^3 & a_4^3-a_1^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_2^2-a_1^2 & a_3^2-a_1^2 & a_4^2-a_1^2 \\ a_2^3-a_1^3 & a_3^3-a_1^3 & a_4^3-a_1^3 \end{vmatrix} = \cdots.$$

7. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3\alpha & 2\alpha+\beta & \alpha+2\beta & 3\beta \\ 3\alpha^2 & \alpha^2+2\alpha\beta & 2\alpha\beta+\beta^2 & 3\beta^2 \\ \alpha^3 & \alpha^2\beta & \alpha\beta^2 & \beta^3 \end{vmatrix}, \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 \\ 3\alpha & 2\alpha+\beta-3\alpha & \alpha+2\beta-3\alpha & 3\beta-3\alpha \\ 3\alpha^2 & \alpha^2+2\alpha\beta-3\alpha^2 & 2\alpha\beta+\beta^2-3\alpha^2 & 3\beta^2-3\alpha^2 \\ \alpha^3 & \alpha^2\beta-\alpha^3 & \alpha\beta^2-\alpha^3 & \beta^3-\alpha^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \beta-\alpha & 2\beta-2\alpha & 3\beta-3\alpha \\ 2\alpha(\beta-\alpha) & (\beta-\alpha)(2\alpha+\beta+\alpha) & 3\beta^2-3\alpha^2 \\ \alpha^2(\beta-\alpha) & \alpha\left(\beta^2-\alpha^2\right) & \beta^3-\alpha^3 \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\alpha & 3\alpha+\beta & 3(\beta+\alpha) \\ \alpha^2 & \alpha(\beta+\alpha) & \beta^2+\beta\alpha+\alpha^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2-2 & 3-3 \\ 2\alpha & 3\alpha+\beta-4\alpha & 3(\beta+\alpha)-6\alpha \\ \alpha^2 & \alpha(\beta+\alpha)-2\alpha^2 & \beta^2+\beta\alpha+\alpha^2-3\alpha^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)^3 \begin{vmatrix} \beta-\alpha & 3\beta-3\alpha \\ \alpha\beta-\alpha^2 & \beta^2+\beta\alpha-2\alpha^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \alpha & \beta+\alpha+\alpha \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)^6 .$$

8. Să se determine dacă matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ este singulară sau nu. Dacă este nesingulară, atunci calculaţi inversa A^{-1}.

   Rezolvare:

   Calculăm $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$, deci matricea este nesingulară şi deci inversabilă.

   Inversa este dată de formula $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$. Pentru calculul adjunctei A^* scriem mai întâi transpusa $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ şi apoi

$$A^* = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & 0 & 13 \\ 7 & -1 & -1 \\ 18 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

   şi deci $A^{-1} = \dfrac{1}{13} \begin{bmatrix} -26 & 0 & 13 \\ 7 & -1 & -1 \\ 18 & 3 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7/13 & -1/13 & -1/13 \\ 18/13 & 3/13 & -10/13 \end{bmatrix}$.

9. Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 2 \\ 1 & x & m \end{bmatrix}$ să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

Calculăm $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 2 \\ 1 & x & m \end{vmatrix} = x^2 - 2x + m - 1$ care este diferit de zero pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă discriminantul este strict negativ, adică matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă discriminantul $4 - 4(m-1) = 4(2-m) < 0 \Leftrightarrow m > 2$.

10. Să se calculeze inversele următoarelor matrice:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad (b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix};$$

$$(c)\ C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (d)\ D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix};$$

$$(e)\ E = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & 11 & -1 \\ 2 & -10 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad (f)\ F = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -14 & -2 & 20 \\ -12 & 4 & 8 \\ 10 & -2 & -12 \end{bmatrix};$$

$$(g)\ G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}; \quad (h)\ H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare:

$$(a)\ A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{11}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}; (b)\ B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix};$$

$$(c)\ C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}; (d)\ D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix};$$

$$(e)\ E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{32} & \frac{3}{64} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{1}{64} \end{bmatrix}; (f)\ F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{128} & \frac{1}{64} & \frac{3}{128} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{128} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{256} & \frac{3}{256} & \frac{5}{256} \end{bmatrix};$$

$$(g)\ G^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; (h)\ H^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

11. Să se calculeze rangul următoarelor matrice pentru diferite valori ale lui α:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}; (b) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & \alpha - 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare:

(a) Calculăm un minor de ordin doi: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$,deci $\operatorname{rang}(A) \geq 2$. Calculăm şi minorul de ordinul al treilea (singurul care există): $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 3 - 4\alpha$. Deci, dacă $\alpha = 3/4$, atunci $\operatorname{rang}(A) = 2$, iar dacă $\alpha \neq 3/4$, atunci $\operatorname{rang}(A) = 3$.

(b) Calculăm un minor de ordin doi: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$,deci $\operatorname{rang}(B) \geq 2$. Calculăm (este suficient conform teoremei lui Kronecker) şi cei doi minori de ordinul al treilea obţinuţi prin bordarea celui diferit de zero: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & \alpha - 1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 + 6\alpha - 5$ şi $\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha - 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\alpha - 15$. Prin urmare, dacă $\alpha = 1$, atunci $\Delta_3 = 0$ şi $\Delta_3' = -12 \neq 0$ şi deci $\operatorname{rang}(B) = 3$; dacă $\alpha = 5$, atunci $\Delta_3 = \Delta_3' = 0$ şi deci $\operatorname{rang}(B) = 2$; dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$, atunci $\Delta_3 \neq 0$ şi $\Delta_3' \neq 0$ şi deci $\operatorname{rang}(B) = 3$.

12. Să se calculeze rangul matricelor:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ (b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ (c)\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare:

Avem $\operatorname{rang}(A) = 3$, $\operatorname{rang}(B) = 2$, $\operatorname{rang}(C) = 5$.

13. Să dau matricele $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ şi $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m & n \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Să se determine m şi n astfel încât încât cele două matrice să aibă acelaşi rang.

Rezolvare:

Avem $\operatorname{rang}(A) \geq 2$ şi $\operatorname{rang}(A) = 3 \Leftrightarrow \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m+3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$. Pe de altă parte $\operatorname{rang}(B) \geq 2$ şi $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m + 3$ şi $\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & n \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = n - 1$. Prin urmare $\operatorname{rang}(B) = 3 \Leftrightarrow (m \neq -3$ sau $n \neq 1)$. Deci dacă $m = -3$, atunci $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B) = 2$ doar dacă $n = 1$, iar dacă $m \neq -3$, atunci $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B) = 3$.

14. Să se rezolve ecuaţia matriceală $XA = B$, unde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ şi $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Rezolvare:

Deoarece $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, matricea A admite inversă şi fie A^{-1} această inversă. Înmulţind la dreapta egalităţii cu A^{-1} obţinem

$$XAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1},$$

deci a găsi X, înseamnă a găsi inversa lui A şi a calcula apoi produsul BA^{-1}. Se va obţine $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Să se rezolve matriceal sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = -3 \\ 2x - y + 3z = -6 \\ x + y - 2z = 2. \end{cases}$$

Rezolvare:

Matricea sistemului este $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, matricea necunoscutelor este $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ iar matricea termenilor liberi este $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$. Deci sistemul se rescrie matriceal sub forma $AX = B$. Deoarece $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$, matricea A admite inversă şi fie A^{-1} această inversă. Înmulţind la stânga egalităţii cu A^{-1} obţinem

$$AA^{-1}X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B,$$

deci a găsi X, înseamnă a găsi inversa lui A şi a calcula apoi produsul $A^{-1}B$. Se va obţine $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, adică $x = -1$, $y = 1$ şi $z = -1$.

16. Folosind regula lui Cramer, să se rezolve următorul sistem de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 38 \\ 3x + 5y + 2z = 31 \\ 5x + 2y + 3z = 31. \end{cases}$$

Rezolvare:

Calculăm mai întâi $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -70 \neq 0$, deci, sistemul având numărul de ecuaţii egal cu numărul necunoscutelor, este (conform regulii lui Cramer) compatibil determinat (admite o soluţie şi aceasta este unică). Trebuie să mai calculăm şi determinanţii

$$D_1 = \begin{vmatrix} 38 & 3 & 5 \\ 31 & 5 & 2 \\ 31 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -140,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 38 & 5 \\ 3 & 31 & 2 \\ 5 & 31 & 3 \end{vmatrix} = -210,\ D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 38 \\ 3 & 5 & 31 \\ 5 & 2 & 31 \end{vmatrix} = -350$$

iar $x = \dfrac{-140}{-70} = 2$, $y = \dfrac{-210}{-70} = 3$, $x = \dfrac{-350}{-70} = 5$ şi deci soluţia este $(x, y, z) = (2, 3, 5)$.

17. Să se rezolve şi să se discute următoarele sisteme omogene:

$$(a)\ \begin{cases} x - 3y + 4z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} ;\quad (b)\ \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

În cazul oricărui sistem omogen este evident că $\operatorname{rang} \bar{A} = \operatorname{rang} A$ (matricea $\bar{A}$ conţine în plus o coloană cu zerouri), şi deci orice sistem omogen este compatibil. În cazul $m = n$, dacă $\det A \neq 0$, atunci soluţia este unică dată de regula lui Cramer. Dar orice sistem omogen admite, evident, soluţia banală deci ea este singura soluţie. Dacă $m = n$ şi $\det A = 0$, atunci soluţia nu este unică şi trebuie să determinăm necunoscutele principale şi pe cele secundare.

(a) Avem $\det A = 0$, şi deci sistemul compatibil este nedeterminat. Un determinant principal este $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$,deci $\operatorname{rang} A = 2$. Atunci acest determinant principal determină ecuaţiile şi necunoscutele principale; astfel primele două ecuaţii sunt ecuaţii principale, x, y sunt necunoscute principale iar z, notat cu α, este necunoscuta secundară. Sistemul devine

$$\begin{cases} x - 3y = -4\alpha \\ x + 2y = \alpha \end{cases}$$

care are soluţia $x = -\alpha$ şi $y = \alpha$, deci soluţia sistemului iniţial este $(x, y, z) = (-\alpha, \alpha, \alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Avem $\det A = 0$. Un determinant principal este $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$ şi deci primele două ecuaţii sunt ecuaţii principale, x, y sunt necunoscute principale iar z, notat cu α, este necunoscuta secundară. Sistemul devine

$$\begin{cases} x + 2y = -\alpha \\ x - 2y = -2\alpha \end{cases}$$

care are soluţia $x = -3\alpha/2$ şi $y = \alpha/4$, deci soluţia sistemului iniţial este $(x, y, z) = (-3\alpha/2, \alpha/4, \alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

18. Să se rezolve şi să se discute sistemul omogen:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ x + \lambda^2 z = 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Avem $\det A = -3\left(1 + \lambda^2\right) \neq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, deci sistemul este compatibil determinat, şi fiind sistem omogen, admite doar soluţia banală.

19. Să se rezolve şi să se discute sistemul omogen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ mx_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Avem $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ m & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 24 - 4m$. Rezolvăm acum ecuaţia $\det A = 0 \Leftrightarrow 24 - 4m = 0$. Deci, dacă $m \neq 6$, atunci sistemul este compatibil determinat, şi fiind sistem omogen, admite doar soluţia banală. Dacă $m = 6$, sistemul este compatibil dar nu admite soluţie unică. Un determinant principal este $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -33$ şi deci primele trei ecuaţii sunt ecuaţii principale, x_1, x_2 şi x_3 sunt necunoscute principale iar x_4, notat cu α, este necunoscuta secundară. Sistemul devine

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 = \alpha \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -\alpha \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = \alpha \end{cases}$$

care are soluţia unică dată de regula lui Cramer. Trebuie să mai calculăm determinanţii

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 6 \\ -\alpha & 1 & -1 \\ \alpha & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4\alpha,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 6 \\ 2 & -\alpha & -1 \\ 3 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = 31\alpha,\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & -\alpha \\ 3 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = -10\alpha$$

iar $x_1 = \dfrac{-4\alpha}{-33}$, $x_2 = \dfrac{31\alpha}{-33}$, $x_3 = \dfrac{-10\alpha}{-33}$ şi deci soluţia sistemului iniţial este $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{33}(4\alpha, -31\alpha, 10\alpha, 33\alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

20. Să se rezolve şi să se discute sistemul:

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ şi $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Observăm că $\det(A) = (1+\lambda)^2$, deci, dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, atunci $\det A \neq 0$ şi deci sistemul are soluţie unică dată de regula lui Cramer. Calculăm

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\lambda + 3,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\lambda - 3,\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda - 2$$

şi deci

$$(x,y,z)=\frac{1}{(1+\lambda)^2}\left(3\lambda+3,3\lambda-3,-2\lambda^2+2\lambda-2\right).$$

Dacă $\lambda=-1$, atunci $\det A=0$ şi scriem $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$ şi $\bar{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\\1&1&-1&2\end{bmatrix}$.

Calculăm $\operatorname{rang}(A)=2$ şi $\operatorname{rang}\left(\bar{A}\right)=3$, deci, conform teoremei lui Kronecker–Capelli, sistemul este incompatibil.

21. Să se rezolve şi să se discute sistemul:

$$\begin{cases}x-4y-3z=1\\x+2y+z=2\\2x+4y+2z=3\end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem mai întâi matricea sistemului şi matricea extinsă:

$$A=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&2&1\\2&4&2\end{bmatrix},\ \bar{A}=\begin{bmatrix}1&-4&-3&1\\1&2&1&2\\2&4&2&3\end{bmatrix}.$$

Observăm că $\operatorname{rang}(A)=2$, deoarece $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-4\\1&2\end{vmatrix}=6\neq 0$, iar $\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-4&-3\\1&2&1\\2&4&2\end{vmatrix}=0.$

Pe de altă parte, $\operatorname{rang}\left(\bar{A}\right)=3$ deoarece $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-4\\1&2\end{vmatrix}=6\neq 0$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-4&-3\\1&2&1\\2&4&2\end{vmatrix}=0$

iar celălalt minor obţinut prin bordarea lui Δ_2 este $\Delta_3'=\begin{vmatrix}1&-4&1\\1&2&2\\2&4&3\end{vmatrix}=-6\neq 0.$

Deci $\operatorname{rang}(A)\neq\operatorname{rang}\left(\bar{A}\right)$ şi, conform teoremei lui Kronecker–Capelli, sistemul este incompatibil.

22. Să se rezolve şi să se discute sistemul $\begin{cases}(\alpha-1)\,x+\alpha y+(\alpha+1)\,z=1\\(\beta-1)\,x+\beta y+(\beta+1)\,z=1\\x+y+z=-2\end{cases}$

Rezolvare:

Avem

$$A=\begin{bmatrix}\alpha-1&\alpha&\alpha+1\\\beta-1&\beta&\beta+1\\1&1&1\end{bmatrix},\ \bar{A}=\begin{bmatrix}\alpha-1&\alpha&\alpha+1&1\\\beta-1&\beta&\beta+1&1\\1&1&1&-2\end{bmatrix}.$$

Observăm că $\Delta_2=\begin{vmatrix}\alpha-1&\alpha\\\beta-1&\beta\end{vmatrix}=\alpha-\beta$ iar $\Delta_3=\begin{vmatrix}\alpha-1&\alpha&\alpha+1\\\beta-1&\beta&\beta+1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$. Deci dacă $\alpha\neq\beta$, atunci $\operatorname{rang}(A)=2$. În ceea ce priveşte pe $\bar{A}$, calculăm $\Delta_2=\begin{vmatrix}\alpha-1&\alpha\\\beta-1&\beta\end{vmatrix}=\alpha-\beta$

iar $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 \\ \beta-1 & \beta & \beta+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ şi $\Delta_3' = \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha & 1 \\ \beta-1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\beta - 2\alpha \neq 0$ pentru $\alpha \neq \beta$.
Deci $\operatorname{rang}(A) = 2 \neq 3 = \operatorname{rang}(\bar{A})$, prin urmare sistemul este incompatibil.

Dacă $\alpha = \beta$, atunci calculăm $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ iar $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 \\ \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 0, deci $\operatorname{rang}(A) = 2$. În ceea ce priveşte pe $\bar{A} = \begin{bmatrix} \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 & 1 \\ \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, calculăm $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ iar Δ_3 este nul, oricum l-am alege. Deci $\operatorname{rang}(\bar{A}) = 2 = \operatorname{rang}(A)$, prin urmare sistemul este compatibil nedeterminat. Determinantul principal (cel care dă rangul) este $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, deci prima şi a treia ecuaţie sunt cele principale, necunoscutele x şi y sunt necunoscutele principale, iar z este necunoscuta secundară. Vom nota $z = a$ şi rescriem sistemul sub forma

$$\begin{cases} (\alpha-1)\,x + \alpha y = -(\alpha+1)\,a \\ x + y = -2 - a \end{cases}$$

care are soluţia unică $(x, y) = (-1 - 2\alpha + a, -1 + 2\alpha - 2a)$, deci soluţia sistemului iniţial este $(x, y, z) = (-1 - 2\alpha + a, -1 + 2\alpha - 2a, a)$, cu $a \in \mathbb{R}$.

23. Să se rezolve şi să se discute sistemele:

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1 \end{cases} ;$$

şi

$$(c) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 11 \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = 15 \\ 6x_1 - 5x_2 + 11x_3 = -4 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases} ;$$

$$(e) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem, mai întâi, matricea sistemului şi matricea extinsă. Calculăm rangurile lor şi vedem dacă sunt sau nu egale. Dacă nu sunt egale atunci sistemul este incompatibil. Dacă sunt egale atunci se determină necunoscutele principale şi pe cele secundare.

(a)

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 5\\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix},\ \bar{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 5 & -7\\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{bmatrix}.$$

Deoarece $\det\bar{A}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 5 & -7\\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{vmatrix}=0$, deducem că $\operatorname{rang}\left(\bar{A}\right)\leq 3$. Pe de altă parte, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5\neq 0\Rightarrow \operatorname{rang}A\geq 2$, $\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=22\neq 0\Rightarrow \operatorname{rang}A\geq 3$ şi $\operatorname{rang}\bar{A}\geq 3$, deci obţinem $\operatorname{rang}(A)=3=\operatorname{rang}\left(\bar{A}\right)$, adică sistemul este compatibil. Determinantul principal este Δ_3 deci primele trei ecuaţii sunt cele principale iar x_1,x_2,x_3 sunt necunoscutele principale. Sistemul devine

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2\\ x_1+3x_2+x_3=5\\ x_1+x_2+5x_3=-7 \end{cases}$$

care are soluţia dată de regula lui Cramer. Se va obţine $(x_1,x_2,x_3)=(1,2,-2)$.

(b) Avem

$$A=\begin{bmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1\\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix},\ \bar{A}=\begin{bmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 & \lambda\\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

şi

$$\det A=\begin{vmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1\\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3.$$

Iar $\det A=0\Leftrightarrow -\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3=0$. Rădăcinile (rădăcinile întregi se găsesc printre divizorii termenului liber) sunt $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$ şi $\lambda_3=3$ (adică $-\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3=(1-\lambda)^2(3-\lambda)$). Deci dacă $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ atunci $\det A\neq 0$ deci sistemul este compatibil determinat, soluţia unică fiind găsită cu regula lui Cramer:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} \lambda & 2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\cdots=\frac{(1-\lambda)^2(\lambda-3)}{(1-\lambda)^2(3-\lambda)}=-1\\ x_2 &= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 3-2\lambda & \lambda & 1\\ 2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\cdots=\frac{(1-\lambda)^2(4-\lambda)}{(1-\lambda)^2(3-\lambda)}=\frac{4-\lambda}{3-\lambda}\\ x_3 &= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & \lambda\\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\cdots=\frac{(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2(3-\lambda)}=\frac{1}{3-\lambda} \end{aligned}$$

Dacă $\lambda=1$ atunci $\det A=0$ şi sistemul devine

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$$

Acum $\operatorname{rang}(A) = 1 = \operatorname{rang}(\bar{A})$ deci sistemul este compatibil nedeterminat şi, plecând de la minorul principal, găsim că necunoscutele principale şi ecuaţiile principale sunt x_1 respectiv prima ecuaţie. Sistemul devine, notând necunoscutele secundare $x_2 = \alpha$ şi $x_3 = \beta$,

$$\left\{ x_1 = 1 - \alpha - \beta, \right.$$

adică soluţia sistemului iniţial este $(x_1, x_2, x_3) = (1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dacă $\lambda = 3$ atunci $\det A = 0$ şi sistemul devine

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Acum $\operatorname{rang}(A) = 2$ şi $\operatorname{rang}(\bar{A}) = 3$ deci sistemul este incompatibil.

(c) Avem

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 7 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -8 \\ 6 & -5 & 11 \end{bmatrix},\ \bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 11 \\ 7 & -3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -8 & 15 \\ 6 & -5 & 11 & -4 \end{bmatrix}.$$

Deoarece $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 7 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 274 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 3$. În ceea ce priveşte pe $\bar{A}$, calculăm $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 & 11 \\ 7 & -3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -8 & 15 \\ 6 & -5 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 0$ deci $\operatorname{rang}(\bar{A}) \leq 3$, prin urmare $\operatorname{rang}(\bar{A}) = 3$ (deoarece există minorul $\Delta_3 \neq 0$). Obţinem $\operatorname{rang}(A) = 3 = \operatorname{rang}(\bar{A})$ şi deci sistemul este compatibil nedeterminat. Determinantul principal (cel care dă rangul) este Δ_3, deci necunoscutele x, y şi z sunt necunoscute principale iar primele trei ecuaţii sunt ecuaţiile principale. Sistemul devine

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 11 \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = 15 \end{cases}$$

care este cu trei ecuaţii şi trei necunoscute şi care are determinantul matricei sistemului nenul. Deci se poate rezolva cu regula lui Cramer. Calculăm determinanţii

$$\begin{vmatrix} 11 & 4 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \\ 15 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 548, \quad \begin{vmatrix} 2 & 11 & -3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 15 & -8 \end{vmatrix} = 274, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 15 \end{vmatrix} = -274$$

şi deci

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, -1).$$

(d) Avem $\operatorname{rang}(A) = 3 = \operatorname{rang}(\bar{A})$ şi apoi $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3 + \alpha, 6 + 2\alpha, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}$.

(e) Avem $\operatorname{rang}(A) = 4 = \operatorname{rang}(\bar{A})$, iar soluţia este dată de regula lui Cramer, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 1, 1)$.

24. Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele:

$$(a)\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+z=-3 \\ y+2z=4 \end{cases} \quad ; \quad (b)\begin{cases} x+y+z-t=2 \\ 2x+y-z+2t=9 \\ -x+2y+2z-t=5 \\ x+3y-z-2t=-4 \end{cases}$$

şi

$$(c)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=2 \\ x_1-2x_2-2x_4=-1 \end{cases} \quad ; \quad (d)\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y+3z=2 \\ x-3y+2z=0 \end{cases} \quad ; \quad (e)\begin{cases} x-2y+z=-4 \\ 4x+3y-2z=11 \\ -2x+3y+4z=11 \end{cases}$$

Rezolvare:

(a) Avem că $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$ şi numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute. Obţinem $\mathrm{rang}\,(A) = 3 = \mathrm{rang}\,(\bar{A})$ şi deci sistemul este compatibil determinat cu soluţia dată de regula lui Cramer.

Există însă o metodă alternativă de a studia un sistem (nu contează numărul de ecuaţii şi de necunoscute). Aceasta este metoda lui Gauss. Scriem matricea extinsă $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ şi vom face transformări convenabile pentru a obţine zerouri sub diagonala principală. Astfel vom aduna prima linie înmulţită cu constante convenabile la celelalte linii (ştim că în urma acestor transformări aplicate unor matrici pătratice, determinantul nu se modifică). Apoi vom aduna a doua linie înmulţită cu constante convenabile la următoarele linii, ş.a.m.d.. Astfel obţinem zerouri pe coloane şi sistemul devine unul triunghiular. Avem

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2-2 & -1-4 & 1+6 & -3-0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 1-1 & 2+7/5 & 4-3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 17/5 & 17/5 \end{bmatrix}$$

şi deci sistemul iniţial este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ -5y+7z=-3 \\ 17z/5=17/5. \end{cases}$$

Soluţia lui este imediată $(x,y,z) = (-1,2,1)$.

(b) Matricea $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ şi vom face transformări convenabile pentru a obţine zerouri sub diagonala principală. Obţinem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2-2 & 1-2 & -1-2 & 2+2 & 9-4 \\ -1+1 & 2+1 & 2+1 & -1-1 & 5+2 \\ 1-1 & 3-1 & -1-1 & -2+1 & -4-2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 3-3 & 3-9 & -2+12 & 7+15 \\ 0 & 2-2 & -2-6 & -1+8 & -6+10 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & -8 & 7 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & -8+8 & 7-\frac{8}{6}\cdot 10 & 4-\frac{8}{6}\cdot 22 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -19/3 & -76/3 \end{bmatrix}.$$

şi sistemul este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x+y+z-t=2 \\ -y-3z+4t=5 \\ -6z+10t=22 \\ -19t/3=-76/3 \end{cases}$$

Soluţia lui este imediată $(x,y,z,t)=(1,2,3,4)$.

(c) Avem, citind matricea extinsă,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

şi sistemul este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ -3x_2-x_3-3x_4=0 \\ 0x_3+0x_4=-2 \end{cases}$$

care nu are soluţii deoarece am obţinut $0=-2$, care este o contradicţie. Deci sistemul iniţial este incompatibil.

Se poate observa, calculând pentru sistemul iniţial cele două ranguri, că $\operatorname{rang}(A)=2$ (deoarece $\Delta_2 \neq 0$ şi $\Delta_3, \Delta_3' = 0$) şi $\operatorname{rang}(\bar{A})=3$ (deoarece $\Delta_2 \neq 0$ şi $\Delta_3, \Delta_3' = 0$ dar există şi $\Delta_3'' = 6 \neq 0$). Deci $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(\bar{A})$ ceea ce înseamnă că sistemul dat este incompatibil.