Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii
şi Tehnologia Informaţiei
Algebră, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC
http://math.etti.tuiasi.ro/maticiuc/

CURS III – V

SINTEZĂ

1 Spaţii vectoriale

Definiţia 1 *Fie K un corp comutativ (câmp) ale cărui elemente le vom numi scalari. Fie V o mulţime a cărei elemente le vom numi vectori. Vom spune că V este un spaţiu vectorial peste câmpul K dacă pe mulţimea V sunt definite două legi de compoziţie, una internă "+" numită adunarea vectorilor, astfel încât pentru orice $\vec{x}, \vec{y} \in V$ avem că $\vec{x} + \vec{y} \in V$, şi una externă "·" numită înmulţirea vectorilor cu scalari, astfel încât pentru $\alpha \in K$ şi $\vec{x} \in V$ avem că $\alpha \cdot \vec{x} \in V$, şi astfel încât:*

1. *Adunarea vectorilor este asociativă*
2. *Adunarea vectorilor este comutativă*
3. *Există un vector notat $\vec{0} \in V$, numit vector nul, astfel încât $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}, \ \forall \vec{x} \in V$,*
4. *Pentru orice $\vec{x} \in V$ există vectorul $-\vec{x} \in V$, numit opusul lui $\vec{x}$, astfel încât $\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$,*
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}, \ \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall \vec{x} \in V$,
6. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}, \ \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall \vec{x} \in V$,
7. $\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}, \ \forall \alpha \in K, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$,
8. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}, \ \forall \vec{x} \in V$.

Exemplul 2 *Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale formează un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.*

Exemplul 3 *Mulţimea $\mathcal{P}_n(x)$ a polinoamelor cu coeficienţi reali de grad cel mult n (unde $n \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar fixat). formează un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ cu operaţiile de adunare ale polinoamelor şi de înmulţirea a acestora cu un număr real.*

Exemplul 4 *Spaţiul vectorial aritmetic K^n. Fie K un câmp oarecare şi $n \in \mathbb{N}^*$. Să considerăm spaţiul K^n dat de produsul cartezian*

$$K^n := K \times K \times \cdots \times K = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in K\}$$

Definim operaţiile

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in K^n$$
$$\alpha \cdot \vec{x} = \alpha (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n), \ \forall \alpha \in K, \ \forall \vec{x} \in K^n$$

Observăm că opusul lui $\vec{x}$ este

$$-\vec{x} = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

Se poate verifica că, în raport cu aceste două operaţii, K^n este spaţiu vectorial peste câmpul K.

Exemplul 5 *În particular pentru $K = \mathbb{R}$ obţinem $\mathbb{R}^n$ numit spaţiul vectorial aritmetic real n-dimensional.*

Exemplul 6 *Spaţiul vectorial $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ al matricelor cu elemente din K situate pe m linii şi n coloane.*

Teorema 7 *O submulţime $V' \subset V$ este un subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă avem:*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V', \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \in V'. \tag{1}$$

Definiţia 8 *Fie $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ un sistem de $n \in \mathbb{N}^*$ vectori din spaţiul vectorial V. Spunem că vectorul $\vec{v} \in V$ este o combinaţie liniară de vectorii sistemului S dacă există n elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ astfel încât are loc*

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \cdots + a_n \vec{v}_n.$$

Teorema 9 *Mulţimea vectorilor din V care se pot exprima ca o combinaţie liniară de vectorii sistemului S formează un subspaţiu vectorial al lui V.*

Definiţia 10 *Vom nota cu $[S]$ mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de vectori din S,*

$$[S] := \{\vec{u} \in V : \vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n,\ \forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in K\} \subseteq V.$$

Acest spaţiu este, conform teoremei precedente, un subspaţiu vectorial şi se numeşte subspaţiul vectorial generat de submulţimea S. Vectorii $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p$ spunem că formează un sistem de generatori pentru $[S]$.

Fie $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ un sistem finit de vectori din V.

Definiţia 11 *Sistemul S se numeşte liniar dependent dacă există scalarii $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$, nu toţi egali cu zero, astfel încât să aibă loc*

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \tag{2}$$

(combinaţia liniară $\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$ să fie vectorul nul).

Definiţia 12 *În caz contrar, adică dacă orice relaţie de forma*

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

(orice combinaţia liniară $\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$ care este $\vec{0}$) implică $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, atunci sistemul S se numeşte liniar independent.

Exemplul 13 *Sistemul $S = \{\vec{0}\}$ este liniar dependent deoarece are loc $\alpha \vec{0} = \vec{0},\ \forall \alpha \in K$.*

Exemplul 14 *Sistemul $S = \{\vec{v} : \vec{v} \neq \vec{0}\}$ este liniar independent deoarece din relaţia $\alpha \vec{v} = 0$, obţinem $\alpha = 0$ (dacă $\alpha \neq 0$, atunci se obţine $\vec{v} = 0$).*

Exemplul 15 *În spaţiul vectorial aritmetic K^n sistemul de vectori*

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), ..., \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$$

este liniar independent (unde 1 şi 0 sunt elementele neutre în câmpul K).

Exemplul 16 *În spaţiul vectorial $\mathcal{P}_n(x)$ al polinoamelor de grad cel mult n, polinoamele $1, x, x^2, \ldots, x^n$ formează un sistem liniar independent deoarece relaţia*

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0$$

are loc doar dacă $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definiţia 17 *Vom spune că submulţimea (cu un număr finit de vectori) $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \subset V$ este un sistem de generatori al lui V dacă subspaţiul vectorial generat de S coincide cu V, adică*

$$[S] = V$$

(ceea ce înseamnă că orice element vector din V se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectori din S).

Definiţia 18 *Sistemul finit de vectori $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ se numeşte bază în K–spaţiul vectorial V dacă satisface condiţiile:*
(a) *B este sistem liniar independent.*
(b) *B este un sistem de generatori al lui V.*

Exemplul 19 *În spaţiul vectorial aritmetic K^n sistemul de vectori*

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, ..., 1)\}$$

(1 şi 0 sunt elementele neutre în câmpul K) este bază în K^n deoarece este liniar independent şi este şi sistem de generatori al lui K^n. Această bază se numeşte bază canonică.

Într-adevăr, am văzut deja că aceşti vectori sunt liniari independenţi. În continuare arătăm că formează un sistem de generatori pentru K^n. Fie $\vec{x} \in K^n$ şi deci $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, unde $x_i \in K$, $i = \overline{1, n}$. Prin urmare

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, x_n) \\ &= x_1 (1, 0, \ldots, 0) + x_2 (0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n (0, 0, \ldots, 1) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \,. \end{aligned}$$

Exemplul 20 *În spaţiul vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ al matricelor de tip $(2, 2)$ cu elemente din $\mathbb{R}$, sistemul de vectori matrice*

$$B = \left\{ E_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

este bază în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ deoarece este liniar independent şi este şi sistem de generatori al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Această bază se numeşte bază canonică.

Exemplul 21 *În spaţiul vectorial $\mathcal{P}_n(x)$ al polinoamelor de grad cel mult n, polinoamele $1, x, x^2, \ldots, x^n$ formează un sistem liniar independent şi este sistem de generatori pentru orice vector (polinom) din $\mathcal{P}_n(x)$. Deci $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ formează o bază în spaţiul $\mathcal{P}_n(x)$.*

Definiţia 22 *Scalarii $x_i \in K$, $i = \overline{1, n}$ ce dau descompunerea unică a lui $\vec{x}$ în baza $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ se numesc coordonatele vectorului $\vec{x}$ în baza $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$.*

Teorema 23 *Dacă $V \neq \{\vec{0}\}$ este un K–spaţiu finit generat atunci oricare două baze ale lui V au acelaşi număr de vectori.*

Definiţia 24 *Dacă V este un K–spaţiu finit generat atunci numărul de elemente dintr-o bază a lui V se va numi dimensiunea lui V notată cu $\dim_K V$ sau, mai scurt (dacă nu este pericol de confuzie), $\dim V$.*

Remarca 25 *Dacă V este un K–spaţiu vectorial de dimensiune n, atunci vom mai nota spaţiul şi cu V_n (notaţia va indica astfel şi dimensiunea).*

Un rezultat util în practică este următorul

Propoziţia 26 *Fie V este un K–spaţiu vectorial de dimensiune n. Atunci:*
(a) *Orice sistem S format din n vectori liniari independenţi este o bază în V.*
(b) *Orice sistem S format din n vectori care constitue un sistem de generatori al lui V este o bază în V.*

Definiţia 27 *Fie S un sistem de vectori din spaţiul vectorial V. Se numeşte rangul sistemului de vectori S dimensiunea subspaţiului vectorial generat de S.*

Teorema 28 *Rangul unui sistem finit de vectori este egal cu numărul maxim de vectori liniar independenţi ai sistemului.*

În cazul particular al spaţiului vectorial aritmetic K^n, dacă avem un număr finit de vectori, atunci, punându-i pe coloană, putem forma cu ei o matrice iar problema independenţei lor liniare se reduce la a determina rangul acelei matrice. Astfel are loc rezultatul următor:

Teorema 29 *Rangul unei matrice este egal cu numărul maxim al vectorilor coloană (sau linie) liniar independenţi.*

Fie V este un K–spaţiu vectorial de dimensiune n şi $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, $\tilde{B} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\}$ două baze diferite ale aceluiaşi spaţiu V. A determina schimbarea de baze înseamnă a descompune vectorii bazei $\tilde{B}$ după baza B, adică a obţine relaţii de tipul

$$\vec{f}_j = \sum\nolimits_{i=1}^{n} s_{ij}\, \vec{e}_i\ ,\ j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Definim matricea $S := (s_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ ale cărei coloane sunt formate din coordonatele vectorilor lui $\tilde{B}$ în baza B. Deci

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matricea S se numeşte matricea schimbării de baze de la B la baza $\tilde{B}$ şi vom nota $B \xrightarrow{S} \tilde{B}$.

Teorema 30 *Dacă avem $B \xrightarrow{S} \tilde{B}$ atunci matricea S este inversabilă şi are loc $\tilde{B} \xrightarrow{S^{-1}} B$, unde S^{-1} este inversa matricei S.*

Considerăm acum un vector oarecare $\vec{x} \in V$. Atunci vectorul $\vec{x}$ are două descompuneri în cele două baze:

$$\vec{x} = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i\, \vec{e}_i \quad \text{şi} \quad \vec{x} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} y_j\, \vec{f}_j\ . \tag{4}$$

Este important determinarea legăturii dintre coordonatele x_i, $i = \overline{1,n}$ ale vectorului în baza B şi coordonatele y_j, $j = \overline{1,n}$ ale vectorului în baza $\tilde{B}$.

Din (3) obţinem

$$\vec{x} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} y_j\, \vec{f}_j = \sum\nolimits_{j=1}^{n} y_j \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} s_{ij}\, \vec{e}_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} s_{ij}\, y_j\right) \vec{e}_i$$

Din unicitatea scrierii vectorului $\vec{x}$ în baza B vom obţine identificarea coeficienţilor:

$$x_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} s_{ij}\, y_j\ ,\ i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Introducând matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în cele două baze

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ şi } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

putem rescrie (5) sub formă matriceală şi obţinem

Propoziţia 31 *Fie $\vec{x} \in V$ un vector care are descompunerea (4) în raport cu cele două baze B şi $\tilde{B}$. Atunci legătura între coordonatele vectorului $\vec{x}$ din cele două baze este dată de relaţia:*

$$X = S \cdot Y \Leftrightarrow Y = S^{-1} \cdot X\,, \tag{6}$$

ceea ce constitue formula matriceală de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze.

Remarca 32 *Există şi o metodă alternativă de a găsi matricea de schimbare de baze, când nici una dintre cele două baze nu sunt cele canonice. Având în vedere că este uşor de citit matricea de trecere de la baza canonică la baza B_1 şi respectiv B_2, fie*

$$B_c \xrightarrow{S_1} B_1 \quad \text{şi} \quad B_c \xrightarrow{S_2} B_2,$$

unde S_1 şi S_2 sunt matricele de trecere.

Fiind ambele baze, avem că S_1 şi S_2 sunt nesingulare şi deci

$$B_1 \xrightarrow{S_1^{-1}} B_c \quad \text{şi} \quad B_c \xrightarrow{S_2} B_2.$$

Acum putem scrie direct matricea S de schimbare de bază de la B_1 la B_2 :

$$B_1 \xrightarrow{S_1^{-1}S_2} B_2,$$

adică $S = S_1^{-1}S_2$, deci prin calcule se va obţine matricea S.

Putem scrie imediat coordonatele vectorului $\vec{x}$ în baza canonică. Pe de altă parte au loc formulele $X_{B_1} = S_1^{-1} \cdot X_{B_c}$ şi $X_{B_2} = S_2^{-1} \cdot X_{B_c}$. Se vor calcula inversele S_1^{-1} şi S_2^{-1} şi apoi se pot calcula uşor coordonatele aceluiaşi vector $\vec{x}$ în baza B_1 şi B_2.

Definiţia 33 *Fie V un spaţiu vectorial. Se numeşte produs scalar pe V o funcţie $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$care asociază fiecărei perechi de vectori din V un număr real notat $\langle u, v\rangle$ şi care satisface condiţiile:*
(i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle,\ \forall u, v \in V;$
(ii) $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle,\ \forall u_1, u_2, v \in V;$
(iii) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in V;$
(iv) $\langle u, u\rangle \geq 0,\ \forall u \in V$ *şi* $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

Definiţia 34 *Un spaţiu vectorial înzestrat cu un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se numeşte spaţiu euclidian.*

Exemplul 35 *Pe spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ definim produsul scalar standard*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n\,,$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplul 36 *Pe spaţiul vectorial al matricelor pătratice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definim produsul scalar*

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^tB),\ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Teorema 37 (Cauchy–Schwarz–Buniakovski) *Fie $(V; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. Atunci are loc inegalitatea*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\langle u, u\rangle} \cdot \sqrt{\langle v, v\rangle}\,.$$

Definiţia 38 *Se numeşte normă pe spaţiul vectorial V o funcţie $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ care satisface condiţiile:*
(i) $\|v\| \geq 0,\ \forall v \in V$ *şi* $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0;$
(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V;$
(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,\ \forall u, v \in V.$

Definiţia 39 *Un spaţiu vectorial înzestrat cu o normă $\|\cdot\|$ se numeşte spaţiu normat.*

Teorema 40 *Fie $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. Atunci funcţia*

$$\|\cdot\|:V\to\mathbb{R},\ \|v\|:=\sqrt{\langle v,v\rangle},\ \forall v\in V$$

este o normă pe V, numită norma euclidiană indusă de produsul scalar.

Remarca 41 *Din teorema anterioară rezultă că orice spaţiu vectorial euclidian este un spaţiu normat cu norma indusă de produsul scalar.*

Remarca 42 *Într-un spaţiu vetorial normat, inegalitatea Cauchy–Schwarz–Buniakovski se poate rescrie sub forma*

$$|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|\cdot\|v\|\Leftrightarrow -1\leq\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}\leq 1.$$

Definiţia 43 *Fie V un spaţiu vectorial euclidian şi $u,v\in V\setminus\{0\}$. Numărul $\theta\in[0,\pi]$ definit prin*

$$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

se numeşte unghiul dintre vectorii u şi v.

Definiţia 44 *Un vector se numeşte versor (sau vector unitar) dacă norma sa este 1.*

Remarca 45 *Orice vector $v\in V\setminus\{0\}$ are un vector unitar corespunzător notat cu v^0 şi dat de:*

$$v^0=\frac{1}{\|v\|}\cdot v.$$

Definiţia 46 *Se numeşte distanţă sau metrică pe mulţimea nevidă M o funcţie $d:M\times M\to\mathbb{R}$ care satisface condiţiile:*
(i) $d(x,y)\geq 0,\ \forall x,y\in M$ *şi* $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;
(ii) $d(x,y)=d(y,x),\ \forall x,y\in M$;
(iii) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z),\ \forall x,y,z\in M.$

Definiţia 47 *O mulţime M înzestrată cu o distanţă (metrică) d se numeşte spaţiu metric.*

Remarca 48 *Orice spaţiu vectorial normat este spaţiu metric cu distanţa euclidiană definită de $d(u,v)=\|u-v\|$.*

Definiţia 49 *Fie $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. Doi vectori $u,v\in V$ se numesc ortogonali dacă produsul lor scalar este nul, i.e. $\langle u,v\rangle=0$.*

Definiţia 50 *Fie $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian şi o mulţime de vectori $U\subset V$. Mulţimea tuturor vectorilor ortogonali pe vectorii din U*

$$U^{\perp}:=\{v\in V:\langle u,v\rangle=0,\ \forall u\in U\}$$

se numeşte complementul ortogonal al lui U şi este un subspaţiu vectorial al lui V.

Teorema 51 *Fie $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. Dacă vectorii $v_1,v_2,\ldots,v_n\in V\setminus\{0\}$ sunt ortogonali doi câte doi, adică*

$$\langle v_i,v_j\rangle=0,\ i,j=\overline{1,n},i\neq j,$$

atunci aceştia sunt liniar independenţi.

Definiţia 52 *Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian n-dimensional şi o bază $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.*
1. Baza B se numeşte ortogonală dacă $e_1, \ldots, e_n$ sunt ortogonali doi câte doi, i.e.

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0,\ i, j = \overline{1,n}, i \neq j;$$

2. Baza B se numeşte ortonormată dacă este ortogonală şi toţi vectorii din B au norma 1, i.e.

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases},\ i, j = \overline{1,n}.$$

Teorema 53 (Procedeul de ortonormalizare Gram–Schmidt) *Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian n-dimensional şi o bază $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Atunci se poate construi o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ pornind de la baza B.*

Demonstraţie. Construim mai întâi o bază ortogonală pornind de la baza B, iar apoi considerând versorii corespunzători se obţine baza ortonormată căutată.
Pasul 1. Definim $v_1 = u_1$.
Pasul 2. Definim $v_2 = u_2 + \alpha_{21}v_1$, unde scalarul α_{21} se determină punând condiţia ca v_2 să fie ortogonal pe v_1,

$$0 = \langle v_2, v_1\rangle = \langle u_2 + \alpha_{21}v_1, v_1\rangle = \langle u_2, v_1\rangle + \alpha_{21}\langle v_1, v_1\rangle,$$

de unde rezultă

$$\alpha_{21} = -\frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}.$$

Pasul 3. Definim $v_3 = u_3 + \alpha_{31}v_1 + \alpha_{32}v_2$, unde scalarii $\alpha_{31},\ \alpha_{32}$ se determină punând condiţia ca v_3 să fie ortogonal pe v_1 şi v_2,

$$0 = \langle v_3, v_1\rangle = \langle u_3 + \alpha_{31}v_1 + \alpha_{32}v_2, v_1\rangle = \langle u_3, v_1\rangle + \alpha_{31}\langle v_1, v_1\rangle + \alpha_{32}\langle v_2, v_1\rangle,$$

de unde observând că $\langle v_2, v_1\rangle = 0$ rezultă $\alpha_{31} = -\dfrac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$.

Apoi

$$0 = \langle v_3, v_2\rangle = \langle u_3 + \alpha_{31}v_1 + \alpha_{32}v_2, v_2\rangle = \langle u_3, v_2\rangle + \alpha_{31}\langle v_1, v_2\rangle + \alpha_{32}\langle v_2, v_2\rangle$$

de unde observând că $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ rezultă $\alpha_{32} = -\dfrac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}$.

După n paşi se obţine baza ortogonală $B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Considerând versorii corespunzători vectorilor din B' se obţine baza ortonormată $B'' = \{e_1, \ldots, e_n\}$, unde $e_i = \dfrac{1}{\|v_i\|}\cdot v_i,\ i = \overline{1,n}$. ■

Exerciţiul 54 *Se dau vectorii $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \ldots$ din spaţiul vectorial V.*

(a) *Să se studieze dacă sistemul de vectori $S_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \ldots\}$ este liniar dependent. În caz afirmativ să se afle relaţia de dependenţă dintre vectori.*

(b) *Să se arate că sistemul de vectori $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\}$ este liniar independent.*

(c) *Să se afle dimensiunea şi o bază a subspaţiului vectorial $[S_2]$ generat de $[S_2]$ (care sunt liniar dependenţi) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \ldots$ Vectorul $\vec{v} = (\ldots)$ aparţine acestui subspaţiu?*

(d) *Să se arate că sistemul $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots\}$ este o bază în V.*

(e) *Să se scrie matricea schimbării de la baza canonică la B_1.*

(f) *Să se afle coordonatele vectorului $\vec{x} = (\ldots)$ în noua bază B_1.*

(g) *Fie B_2 o altă bază. Să se scrie matricea schimbării de baze de la B_1 la B_2.*

(h) *Să se afle coordonatele vectorului $\vec{x}$ în baza B_2.*

(i) *Să se construiască (folosind procedeul de ortonormalizare Gram–Schmidt) o bază ortonormată pornind de la baza B_2.*

Exerciţiul 55 *Să se rezolve folosind metoda lui Gauss următorul sistem şi să se indice o bază a spaţiului soluţiilor sistemului:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots = 0. \end{cases}$$