Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii
şi Tehnologia Informaţiei
Algebră, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC
http://math.etti.tuiasi.ro/maticiuc/

CURS VI – VII
SINTEZĂ

1 Transformări liniare

Definiţia 1 *O aplicaţie $T : V \to W$ este transformare liniară (sau operator liniar) dacă*

$$T(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y}), \ \forall \lambda, \mu \in K, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$$

Definiţia 2 *Se numeşte nucleul unei transformări liniare T, notat cu* $\mathrm{Ker}(T)$,

$$\mathrm{Ker}(T) := \left\{ \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0} \right\} \subseteq V.$$

Definiţia 3 *Dimensiunea lui* $\mathrm{Ker}(T)$ *se numeşte defectul transformării liniare T şi se notează cu* $\mathrm{def}(T)$. *Deci*

$$\mathrm{def}(T) := \dim(\mathrm{Ker}(T)).$$

Definiţia 4 *Se numeşte imaginea transformării liniare T şi se notează cu* $\mathrm{Im}(T)$, *mulţimea*

$$T(V) := \{ \vec{w} \in W : \exists\, \vec{v} \in V, \ T(\vec{v}) = \vec{w} \}.$$

Definiţia 5 *Dimensiunea lui* $\mathrm{Im}(T)$ *se numeşte rangul transformării liniare T şi se notează cu* $\mathrm{rang}(T)$. *Deci*

$$\mathrm{rang}(T) := \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Propoziţia 6 *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) *Transformarea liniară T este injectivă.*
(ii) $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}_V\}$.

Propoziţia 7 *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) *Transformarea liniară T este surjectivă.*
(ii) *Imaginea $T(S)$ este un sistem de generatori al lui W, unde S este un sistem de generatori din V.*

Definiţia 8 *O transformare liniară T se numeşte izomorfism de spaţii vectoriale dacă aplicaţia T este bijectivă.*

Teorema 9 *Fie T o transformare liniară. Atunci are loc*

$$\mathrm{rang}T + \mathrm{def}T = n.$$

Corolarul 10 *Fie T o transformare liniară $T : V_n \to W_m$. Atunci au loc:*

$$\begin{aligned} &(i) \quad T \text{ este aplicaţie injectivă} \Leftrightarrow \operatorname{rang} T = n,\ n \leq m \\ &(ii) \quad T \text{ este aplicaţie surjectivă} \Leftrightarrow \operatorname{rang} T = m,\ m \leq n \\ &(iii) \quad T \text{ este aplicaţie bijectivă} \Leftrightarrow \operatorname{rang} T = n = m \end{aligned}$$

Corolarul 11 *Fie T o transformare liniară $T : V_n \to W_n$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

$$\begin{aligned} &(i) \quad T \text{ este aplicaţie injectivă} \\ &(ii) \quad T \text{ este aplicaţie surjectivă} \\ &(iii) \quad T \text{ este aplicaţie bijectivă} \end{aligned}$$

Propoziţia 12 *Dacă notăm cu X matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x} \in V_n$ în baza B, şi cu Y matricea coloană a coordonatelor vectorului $T(\vec{x}) \in W_m$ în baza B', atunci are loc relaţia de legătură, sub formă matriceală*

$$Y = A \cdot X$$

(numită ecuaţia matriceală a transformării liniare T).

Propoziţia 13 *Atunci* $\operatorname{rang} T = \operatorname{rang} A$, *unde A este matricea transformării liniare T.*

Teorema 14 *Fie transformarea liniară $T : V_n \to W_m$, $B, \bar{B}$ două baze în V_n şi $B', \bar{B}'$ două baze în W_m. Presupunem că $B \xrightarrow{S} \bar{B}$ şi $B' \xrightarrow{S'} \bar{B}'$. Atunci are loc relaţia*

$$\bar{A}_{\bar{B}\bar{B}'} = (S')^{-1} \cdot A_{BB'} \cdot S,$$

unde $A_{BB'}$ şi $\bar{A}_{\bar{B}\bar{B}'}$ sunt matricile transformării liniare în raport cu bazele B şi B', respectiv $\bar{B}$ şi $\bar{B}'$.

Remarca 15 *Formula de mai sus, se numeşte formula matriceală de schimbare a matricei unei transfromări liniare la schimbări de baze.*

Corolarul 16 *Fie transformarea liniară $T : V_n \to V_n$ şi $\bar{B}$ o altă bază în V_n. Presupunem că $B_c \xrightarrow{S} \bar{B}$. Atunci are loc relaţia*

$$\bar{A} = S^{-1} \cdot A \cdot S,$$

unde A şi $\bar{A}$ sunt matricile transformării liniare în raport cu baza canonică B şi respectiv noua bază $\bar{B}$.

Definiţia 17 *Fie transformarea liniară $T : V_n \to V_n$. Spunem că vectorul $\vec{u} \neq \vec{0}_V$ este vector propriu pentru T dacă $\exists\ \lambda \in K$ astfel încât*

$$T(\vec{u}) = \lambda \vec{u}.$$

În acest caz $\lambda \in K$ se numeşte valoare proprie corespunzătoare vectorului propriu $\vec{u}$.

Suntem interesaţi să găsim bazele lui V_n în raport cu care matricea endomorfismului $T \in \mathcal{L}(V_n)$ să aibă forma cea mai simplă.

Definiţia 18 *Un endomorfism T se numeşte diagonalizabil dacă există o bază B în V_n formată numai din vectori proprii pentru T.*

Propoziţia 19 *Vectorul $\vec{u}$ este propriu dacă şi numai dacă matricea coloană X a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza B este soluţie nebanală pentru sistemul liniar şi omogen*

$$(A - \lambda I_n) \cdot X = 0. \tag{1}$$

Definiţia 20 *Polinomul* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ *se numeşte polinomul caracteristic asociat matricei* A*, iar ecuaţia* $\det(A - \lambda I_n) = 0$ *se numeşte ecuaţia caracteristică a matricei* A*.*

Propoziţia 21 *Fie* $\lambda \in K$ *o rădăcină a ecuaţiei caracteristice* $p(\lambda) = 0$ *asociată lui* T*. Atunci* λ *este valoare proprie pentru* T*. Invers dacă* λ *este valoare proprie pentru* T *atunci* λ *este rădăcină a ecuaţiei caracteristice* $p(\lambda) = 0$

Dacă luăm λ o valoare proprie oarecare atunci să notăm cu

$$V(\lambda) := \{\vec{x} \in V_n : T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$$

subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ (este mulţimea tuturor vectorilor proprii pentru T corespunzătoare valorii proprii λ).

Teorema 22 ***(de diagonalizare a unui endomorfism)*** *Operatorul* $T \in \mathcal{L}(V_n)$ *este diagonalizabil dacă şi numai dacă următoarele două condiţii sunt satisăcute:*
(i) *rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt toate valori proprii pentru* T *(sunt toate din câmpul de scalari* K*)*
(ii) *ordinul de multiplicitate al fiecărei valori proprii* λ_i *este egal cu dimensiunea subspaţiului propriu* $V(\lambda_i)$ *(adică* $\dim V(\lambda_i) = m_i$*).*

Algoritmul practic de diagonalizare a unui endomorfism (a unei matrici pătratice)
Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$ un endomorfism şi o bază B în V_n. Să notăm cu A matricea lui T în baza B. Se va rezolva ecuaţia caracteristică $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$. Dacă această ecuaţie are rădăcini care nu sunt din K atunci condiţia (i) din teorema precedentă nu este satisfăcută deci endomorfismul T nu este diagonalizabil. Dacă toate rădăcinile sunt din K atunci pentru fiecare valoare λ_i se va determina subspaţiul propriu $V(\lambda_i)$. Pentru aceasta se va identifica orice vector $u \in V_n$ cu matricea coloană X a coordonatelor sale în baza considerată B a lui V_n, şi, pentru fiecare valoare proprie λ_i considerăm sistemul liniar şi omogen

$$(A - \lambda_i I_n) X = 0$$

Se va determina apoi subspaţiu propriu $V(\lambda_i) := \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(K) : (A - \lambda_i I_n) X = 0\}$ şi se va pune în evidenţă câte o bază în fiecare subspaţiu propriu $V(\lambda_i)$ determinând astfel $\dim V(\lambda_i)$. Dacă există o valoare proprie λ_i pentru care $\dim V(\lambda_i)$ este mai mică strict decât ordinul de multiplicitate al lui λ_i atunci condiţia (ii) din teorema precedentă nu este satisfăcută deci endomorfismul T nu este diagonalizabil. Dacă $\dim V(\lambda_i)$ este egală cu ordinul de multiplicitate al lui λ_i atunci condiţia (ii) din teorema precedentă este satisfăcută deci endomorfismul T este diagonalizabil. În acest caz baza $\bar{B}$, formată din reuniunea bazelor tuturor subspaţiilor proprii determinate anterior, este bază a lui V_n în raport cu care matricea endomorfismului T are forma diagonală $\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, unde valoarea proprie λ_i se repetă de atâtea ori cât este ordinul ei de multiplicitate.

Exerciţiul 23 *Fie transformarea liniară* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dată prin* $T(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{e}_j$, $i = \overline{1,n}$, *unde* $B = \left\{\vec{e}_i : i = \overline{1,n}\right\}$ *este o bază în* $\mathbb{R}^n$. *Să se scrie matricea transformării liniare în raport cu baza* B *şi să se scrie expresia lui* $T(\vec{x})$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Exerciţiul 24 *Să se afle matricea endomorfismului* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *care transformă* $\vec{u}_i$ *în* $\vec{v}_i$, $i = \overline{1,n}$ *(adică are loc* $T(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$, *cu* $i = \overline{1,n}$*).*

Exerciţiul 25 *Endomorfismul* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *are în baza* $B = \left\{\vec{e}_i : i = \overline{1,n}\right\}$ *matricea* $A = \ldots$ *Să se scrie matricea acestei transformări în raport cu noua bază* $\bar{B} = \left\{\vec{f}_i : i = \overline{1,n}\right\}$ *ştiind relaţiile de legătură dintre* $\vec{f}_j$ *şi* $\vec{e}_i$, $i, j = \overline{1,n}$.

Exerciţiul 26 *Fie aplicaţia liniară* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dată de* $T(\vec{x}) = \ldots$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

(a) *Să se calculeze* $T(\vec{v})$, *unde* $\vec{v}$ *este un vector dat.*

(b) *Să se arate că* T *este o transformare liniară.*

(c) *Să se scrie matricea acestei transformări.*

(d) *Să se determine nucleul* $\operatorname{Ker} T$ *şi defectul transformării liniare* T. *De asemenea să se precizeze o bază a subspaţiului* $\operatorname{Ker} T$.

(e) *Să se determine imaginea* $\operatorname{Im} T$ *şi rangul transformării liniare* T. *De asemenea să se precizeze o bază a subspaţiului* $\operatorname{Im} T$.

(f) *Să se scrie ecuaţia caracteristică, să se determine valorile proprii, subspaţiile proprii şi vectorii proprii.*

(g) *Studiaţi dacă endomorfismul dat este diagonalizabil sau nu.*

(h) *În caz afirmativ, scrieţi baza* $\bar{B}$ *în raport cu care matricea endomorfismului are forma diagonală.*

(i) *Scrieţi/calculaţi şi matricea lui* T *în raport cu noua bază* $\bar{B}$