Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii
şi Tehnologia Informaţiei
Algebră, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC
http://math.etti.tuiasi.ro/maticiuc/

CURS VIII – X
SINTEZĂ

1 Forme biliniare şi forme pătratice

Definiţia 1 *$\mathcal{A} : V \times V \to K$ este formă biliniară pe V dacă $\mathcal{A}$ este operator liniar în raport cu ambele argumente*

Remarca 2 *Expresia matriceală a formei biliniare $\mathcal{A}$ în raport cu baza B*

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = X^t \cdot A \cdot Y,$$

unde X, Y reprezintă matricile coloană ale vectorilor $\vec{x}$ şi $\vec{y}$ în baza B.

Propoziţia 3 *Formula matriceală de schimbare a coordonatelor la schimbare de baze*

$$\bar{A} = S^t \cdot A \cdot S, \tag{1}$$

unde $\bar{A}$ este matricea lui $\mathcal{A}$ în raport cu noua bază $\bar{B}$, $\bar{A}$ este matricea lui $\mathcal{A}$ în raport cu vechea bază B iar S este matricea schimbării de baze, $B \xrightarrow{S} \bar{B}$.

Definiţia 4 *Prin definiţie, rangul unei forme biliniare este rangul matricii sale într-o bază oarecare*

Definiţia 5 *O formă biliniară se numeşte nedegenerată dacă rangul ei coincide cu dimensiunea n a spaţiului V (şi degenerată caz contrar).*

Definiţia 6 *O formă biliniară $\mathcal{A}$ se numeşte simetrică dacă $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{y}, \vec{x})$, pentru orice $\vec{x}, \vec{y} \in V$.*

Definiţia 7 *$\mathcal{Q} : V \to K$ este formă pătratică pe V dacă există o formă biliniară simetrică pe V astfel încât*

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}, \vec{x}), \ \forall \vec{x} \in V.$$

Remarca 8 *Folosind matricea A obţinem şi expresia matriceală a formei pătratice $\mathcal{Q}$ în raport cu baza B*

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = X^t \cdot A \cdot X,$$

unde X reprezintă matricea coloană a vectorului $\vec{x}$ în baza B.

Definiţia 9 *Matricea unei forme pătratice $\mathcal{Q}$ este prin definiţie matricea A a formei biliniare asociate iar rangul unei forme pătratice este rangul acestei matrice.*

Definiţia 10 *O formă pătratică se numeşte nedegenerată dacă rangul ei coincide cu dimensiunea n a spaţiului V.*

Remarca 11 *Forma biliniară asociată lui $\mathcal{Q}$ se obţine prin dedublare. Mai precis, urmăm următoarele asocieri:*

$$\begin{aligned} (x_i)^2 &= x_i x_i \rightsquigarrow x_i y_i, \\ x_i x_j &= \frac{1}{2} x_i x_j + \frac{1}{2} x_i x_j \rightsquigarrow \frac{1}{2} x_i y_j + \frac{1}{2} x_j y_i. \end{aligned} \tag{2}$$

Definiţia 12 *Spunem că forma pătratică $\mathcal{Q}$ este redusă la forma canonică, dacă s-a găsit o bază $\bar{B} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\}$ a lui V, în raport cu care expresia în coordonate a lui $\mathcal{Q}$ este*

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = \lambda_1 (y_1)^2 + \lambda_2 (y_2)^2 + \cdots + \lambda_n (y_n)^2, \tag{3}$$

unde $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ nu sunt, în mod necesar, toţi nenuli iar

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \cdots + x_n \vec{e}_n \text{ (descompunerea în baza } B) \\ &= y_1 f_1 + y_2 f_2 + \cdots + y_n f_n \text{ (descompunerea în baza } \bar{B}). \end{aligned}$$

Definiţia 13 *O formă pătratică $\mathcal{Q}$ se numeşte pozitiv definită dacă toţi cei n coeficienţi sunt strict pozitivi.*

Forma pătratică $\mathcal{Q}$ se numeşte negativ definită dacă toţi cei n coeficienţi sunt strict negativi.

Forma pătratică $\mathcal{Q}$ se numeşte nedefinită dacă există şi coeficienţi strict pozitivi şi coeficienţi strict negativi.

Problema este dacă există baze $\bar{B}$ în raport cu care expresia unei forme pătratice să fie de forma canonică (3).

Răspunsul este dat de următoarele trei metode: metoda lui Gauss, metoda lui Jacobi şi metoda transformărilor ortogonale.

Teorema 14 (Metoda lui Gauss) *Fie $\mathcal{Q}$ o forma pătratică. Atunci există cel puţin o bază $\bar{B}$ a lui V şi corespunzător acesteia există scalarii $\lambda_1, ..., \lambda_n$, în raport cu care expresia în coordonate a lui $\mathcal{Q}$ are forma canonică (3).*

Remarca 15 *Demonstraţia teoremei lui Gauss ne oferă şi algoritmul practic de reducere la forma canonică a unei forme pătratice $\mathcal{Q}$, precum şi modul de determinare al bazei $\bar{B}$. Astfel, conform demonstraţiei teoremei, avem următoarele situaţii:*
1. *dacă forma pătratică conţine cel puţin un pătrat $(x_i)^2$, atunci grupăm toţi termenii care conţin termenul x_i şi formăm un pătrat perfect folosind identitatea $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;*
2. *dacă forma pătratică nu conţine nici un pătrat dar apare termenul $x_i x_j$, atunci facem schimbarea de variabilă*

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k, \ \forall k \neq i, j. \end{cases}$$

Prin înlocuirea în formă pătratică, vor apărea pătratele $(y_i)^2$ şi $(y_j)^2$, deci suntem în primul caz.

Teorema 16 (Metoda lui Jacobi) *Fie $\mathcal{Q}$ o forma pătratică astfel încât $\operatorname{rang}\mathcal{Q} = n$. Atunci există o bază B a lui V în care determinanţii*

$$\Delta_0 = 1, \ \Delta_1 = a_{11}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sunt toţi nenuli, şi există o bază $\bar{B} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\}$ a lui V în raport cu care expresia în coordonate a lui h are forma canonică

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} (y_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} (y_2)^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} (y_n)^2,$$

unde $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \vec{f_i}$.

Remarca 17 *Dacă luăm, în particular,* $n = 3$, *atunci pentru a găsi baza* $\bar{B} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ *în raport cu care are loc scrierea canonică a lui* $\mathcal{Q}$, *considerăm că relaţiile de legătură dintre* $\vec{f_i}$ *şi* $\vec{e}_j$ *sunt următoarele:*

$$\begin{cases} \vec{f_1} = c_{11}\vec{e}_1 \\ \vec{f_2} = c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \\ \vec{f_3} = c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3 \,. \end{cases}$$

Calculul coeficienţilor c_{ij} *se face impunând condiţiile suplimentare*

$$\mathcal{A}(\vec{f_i}, \vec{e_j}) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j, \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$$

Obţinem astfel sistemele

$$\mathcal{A}(\vec{f_1}, \vec{e}_1) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}(c_{11}\vec{e}_1, \vec{e}_1) = c_{11}\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = c_{11}a_{11} = 1, \tag{4}$$

şi

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\vec{f_2}, \vec{e}_1) = 0, \\ \mathcal{A}(\vec{f_2}, \vec{e}_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A}(c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 0, \\ \mathcal{A}(c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{21}\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + c_{22}\mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 0, \\ c_{21}\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + c_{22}\mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_{21}a_{11} + c_{22}a_{21} = 0, \\ c_{21}a_{12} + c_{22}a_{22} = 1 \end{cases} \tag{5}$$

şi respectiv

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\vec{f_3}, \vec{e}_1) = 0, \\ \mathcal{A}(\vec{f_3}, \vec{e}_2) = 0, \\ \mathcal{A}(\vec{f_3}, \vec{e}_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A}(c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0, \\ \mathcal{A}(c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0, \\ \mathcal{A}(c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_{31}\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + c_{32}\mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + c_{33}\mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0, \\ c_{31}\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + c_{32}\mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + c_{33}\mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0, \\ c_{31}\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_3) + c_{32}\mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + c_{33}\mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{31}a_{11} + c_{32}a_{21} + c_{33}a_{31} = 0, \\ c_{31}a_{12} + c_{32}a_{22} + c_{33}a_{32} = 0, \\ c_{31}a_{13} + c_{32}a_{23} + c_{33}a_{33} = 1 \end{cases} \tag{6}$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Propoziţia 18 *Cea de a treia metodă este* ***metoda transformărilor ortogonale (sau a valorilor proprii)****. Fie forma pătratică* $\mathcal{Q}$ *dată de* $\mathcal{Q}(\bar{u}) = X^t \cdot A \cdot X$. *Fie transformarea liniară* T *care are drept matrice tot pe* A. *Deoarece* A *este simetrică, se poate arăta că ea va avea valori proprii reale şi simple (adică diferite între ele) iar vectorii proprii corespunzători vor fi ortogonali doi câte doi. Normând aceşti vectori vom obţine deci nişte versori (vectori de normă* 1*) ortogonali doi câte doi. Aceştia vor forma o nouă bază* $\bar{B}$ *şi în raport cu aceasa transformarea liniară* T *este diagonalizabilă matricea nouă fiind diagonală având valorile proprii pe diagonala principală, şi deci* $\mathcal{Q}$ *va avea o formă canonică în raport cu această nouă bază* $\bar{B}$.

Într-adevăr, dacă are loc relaţia $X = SY$ unde $B \xrightarrow{S} \bar{B}$ iar S se poate arăta, folosind definiţia bazei $\bar{B}$, că este matrice ortogonală (i.e. $S^{-1} = S^t$) şi X, Y reprezintă matricele coloană ale vectorului $\vec{x}$ în raport cu baza B şi respectiv $\bar{B}$, atunci

$$\mathcal{Q}\left(\bar{u}\right) = X^t \cdot A \cdot X = \left(SY\right)^t \cdot A \cdot \left(SY\right) = \left(Y^t S^t\right) \cdot A \cdot \left(SY\right) = Y^t \cdot \left(S^t \cdot A \cdot S\right) \cdot Y = Y^t \cdot \left(S^{-1} \cdot A \cdot S\right) \cdot Y.$$

Dar T este diagonalizabilă în această nouă bază, deci noua matrice (obţinută prin schimbarea bazelor) este $\bar{A} = S^{-1} \cdot A \cdot S$ şi are formă diagonală. Deoarece

$$\mathcal{Q}\left(\bar{u}\right) = Y^t \cdot \bar{A} \cdot Y,$$

obţinem că $\mathcal{Q}$ are deci formă canonică.

Exerciţiul 19 *Se dă forma bilineară* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definită de* $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = \ldots, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

(a) *Să se determine matricea formei bilineare în raport cu baza canonică, să se calculeze rangul formei şi să scrie expresia matriceală a formei bilineare* $\mathcal{A}$.

(b) *Să se precizeze dacă forma bilineara este simetrică sau nu.*

(c) *Să se scrie matricea formei bilineare în raport cu o nouă bază* $\bar{B}$ *din* $\mathbb{R}^n$.

Exerciţiul 20 *Se dă forma pătratică* $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definită de* $\mathcal{Q}(\vec{x}) = \ldots, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

(a) *Să se scrie forma biliniară simetrică din care provine* $\mathcal{Q}$.

(b) *Să se determine matricea formei pătratice în raport cu baza canonică, să se calculeze rangul formei şi să scrie expresia matriceală a formei pătratice* $\mathcal{Q}$.

(c) *Să se aducă forma pătratică la forma canonică prin metoda lui Gauss/metoda lui Jacobi/metoda transformărilor ortogonale.*

(d) *Să se precizeze dacă formă pătratică este pozitiv/negativ definită sau nedefinită.*

(e) *Să se determine baza* $\bar{B}$ *în raport cu care forma pătratică are forma canonică şi să se scrie matricea schimbării de baze de la* B_c *la* $\bar{B}$.

(f) *Să se scrie legătura dintre coordonatele lui* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *în raport cu ambele baze* B_c *şi* $\bar{B}$, *precum şi matricea formei pătratice în raport cu noua bază* $\bar{B}$.