Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii
şi Tehnologia Informaţiei
Algebră, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC
http://math.etti.tuiasi.ro/maticiuc/

CURS XI – XII

1 Algebra vectorială a vectorilor liberi

1.1 Spaţiul vectorial al vectorilor liberi

Vom nota cu X spaţiul geometric (intuitiv) conceput ca o mulţime de puncte. Noţiunile de punct, dreaptă, plan şi spaţiu le considerăm cunoscute cu sensul lor intuitiv din geometria elementară. Dreptele şi planele sunt submulţimi ale lui X.

Definiţia 1 *Se numeşte* ***segment orientat*** *ca fiind orice pereche orientată de puncte din spaţiu.*

Dacă A, B sunt două puncte date în spaţiul X, atunci pentru segmentul orientat definit de perechea de puncte (A, B) vom folosi notaţia $\overline{AB}$. Deci orice segment orientat este un element al produsului cartezian $X \times X$. Punctul A se va numi originea segmentului orientat iar B extremitatea sa. Dacă $A = B$ atunci $\overline{AA}$ este segmentul nul. Dacă $A \neq B$ atunci dreapta determinată de A şi B se numeşte dreapta suport a segmentului orientat $\overline{AB}$.

Definiţia 2 *Două segmente orientate nenule au aceaşi direcţie dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.*

Definiţia 3 *Două segmente orientate nenule se numesc* ***coliniare*** *dacă au aceaşi direcţie. În caz contrar ele se numesc necoliniare.*

Definiţia 4 *Două segmente orientate nenule care au aceeaşi direcţie, spunem că au acelaşi sens dacă*

(i) *sunt necoliniare şi extremităţile lor se află în acelaşi semiplan în raport cu dreapta determinată de originile lor*

sau dacă

(ii) *sunt coliniare şi există un segment orientat necoliniar cu ele care are acelaşi sens cu amândouă.*

Definiţia 5 *Se numeşte* ***mărime (modul sau lungime) a unui segment orientat*** $\overline{AB}$, *distanţa dintre punctele* A *şi* B. *Vom nota mărimea cu* $||\overline{AB}||$.

Definiţia 6 *Două segmente orientate* $\overline{AB}$ *şi* $\overline{CD}$ *au aceaşi mărime dacă* $||\overline{AB}|| = ||\overline{CD}||$.

Definiţia 7 *Două segmente orientate se numesc echipolente dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi mărime; vom nota aceasta cu* $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

Definiţia 8 *Se numeşte vector liber o clasă de echivalenţă în raport cu relaţia de echipolenţă pe mulţimea segmentelor orientate din spaţiu.*

Vom nota cu $\overrightarrow{AB} = \left\{\overline{CD} : \overline{CD} \sim \overline{AB}\right\}$, şi în general, vectorii liberi cu $\vec{u}, \vec{v}$. În general vectorul liber este gândit printr-un reprezentat al tău. Dacă aplicăm vectorul liber $\vec{u}$ într-un punct A din spaţiu atunci vom obţine $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Extremitatea B este astfel unic determinată. Orice vector liber poate fi aplicat în orice punct din spaţiu. Mulţimea tuturor segmentelor nule orientate defineşte un vector ce va fi numit vectorul liber nul, notat cu $\vec{0}$. Avem deci $\vec{0} = \left\{\overline{AA} : A \in X\right\}$. Definim mărimea, direcţia şi sensul unui vector liber ca fiind mărimea, direcţia şi respectiv sensul unui reprezentant oarecare al lui. Vectorul liber de mărime egală cu unitatea se numeşte versor.

Vom nota cu V_3 mulţimea tuturor vectorilor liberi din spaţiu.

Definiţia 9 *Suma a doi vectori liberi se obţine prin*

- *regula triunghiului: astfel fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ şi A un punct din spaţiu. Aplic $\vec{u}$ în punctul A şi vom obţine $\overrightarrow{AB}$; aplic $\vec{v}$ în punctul B şi obţin $\overrightarrow{BC}$. Se va forma astfel triunghiul ABC. Prin definiţie $\vec{u} + \vec{v}$ este segmentul orientat care dă cea de a treia latură a triunghiului,*

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}$$

  sau

- *regula paralelogramului: astfel fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ şi A un punct din spaţiu. Aplic $\vec{u}$ în punctul A şi vom obţine $\overrightarrow{AB}$; aplic $\vec{v}$ în punctul A şi obţin $\overrightarrow{AC}$. Pe segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ se poate forma paralelogramul $ABDC$. Prin definiţie $\vec{u} + \vec{v}$ este segmentul orientat care dă diagonala mare a paralelogramului,*

$$\vec{u} + \vec{v} := \overrightarrow{AD}.$$

Remarca 10 *Regula de adunare a vectorilor este bine definită; astfel vectorul $\vec{u} + \vec{v}$ nu depinde de punctul de plecare A.*

Propoziţia 11 *Au loc următoarele proprietăţi:*

a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.

*b) Există vectorul notat $\vec{0} \in V_3$, numit **vector nul**, astfel încât $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}, \ \forall\, \vec{u} \in V_3$.*

*c) Pentru orice $\vec{u} \in V_3$ există vectorul $-\vec{u} \in V_3$, numit **opusul** lui $\vec{u}$, astfel încât $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.*

d) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

Remarca 12 *Astfel $(V_3, +)$ devine grup comutativ.*

Definiţia 13 (înmulţirea cu scalari a vectorilor liberi) *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in V_3$ atunci $\alpha\, \vec{u}$ este dat de:*

a) dacă $\alpha = 0$ sau $\vec{u} = \vec{0}$, atunci $\alpha\, \vec{u} = \vec{0}$,

b) dacă $\alpha \neq 0$ şi $\vec{u} \neq \vec{0}$, atunci $\alpha\, \vec{u}$ este vectorul liber care are aceeaşi direcţie cu $\vec{u}$, acelaşi sens cu $\vec{u}$ dacă $\alpha > 0$, sens opus lui $\vec{u}$ dacă $\alpha < 0$, şi mărimea dată de $||\alpha\vec{u}|| = |\alpha| \ ||\vec{u}||$.

Propoziţia 14 *Au loc următoarele proprietăţi:*

a) $\alpha\,(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

b) $(\alpha + \beta)\,\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}, \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall\, \vec{u} \in V_3$.

c) $\alpha\,(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\,\vec{u}, \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall\, \vec{u} \in V_3$.

d) $1\,\vec{u} = \vec{u}, \forall\, \vec{u} \in V_3$.

Remarca 15 *Din propoziţiile de mai sus deducem că spaţiul vectorilor liberi V_3 este un spaţiu vectorial real în raport cu adunarea vectorilor şi înmulţirea cu scalari a vectorilor.*

Definiţia 16 *Diferenţa a doi vectori liberi se obţine astfel: fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ şi A un punct din spaţiu. Aplic $\vec{u}$ în punctul A şi vom obţine $\overrightarrow{AB}$; aplic $\vec{v}$ în acelaşi punct A şi obţin $\overrightarrow{AC}$. Vom obţine atunci*

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.$$

Prin definiţie avem că

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} := \overrightarrow{AC}.$$

1.2 Dependenţa şi independenţa liniară a vectorilor liberi

Definiţia 17 *Doi vectori liberi se numesc* ***coliniari*** *dacă au aceaşi direcţie.*

Propoziţia 18 *Doi vectori liberi sunt coliniari dacă şi numai dacă sunt liniari dependenţi.*

Demonstraţie. Necesitatea ("$\Rightarrow$").

Fie $\vec{u}, \vec{v}$ cei doi vectori coliniari. Îi aplicăm în punctul A şi obţinem $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Presupunem $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ şi fie $\lambda = \pm \frac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||}$, luat cu semnul plus sau minus în funcţie dacă $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ au sau nu acelaşi sens. Vom obţine $\vec{v} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \lambda \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$, ceea ce înseamnă că vectorii sunt liniar dependenţi.

Suficienţa ("$\Leftarrow$").

Presupunem că avem relaţia $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$, cu $\alpha, \beta \neq 0$. Presupunem $\beta \neq 0$ şi obţinem $\vec{v} = \frac{-\alpha}{\beta} \vec{u}$, adică $\vec{u}, \vec{v}$ au aceaşi direcţie deci sunt coliniari. ■

Definiţia 19 *Un vector liber nenul este paralel cu un plan dacă dreapta suport a oricărui reprezentant al său este paralelă cu planul (sau este conţinut în plan). Trei vectori se numesc coplanari dacă sunt paraleli cu acelaşi plan.*

Propoziţia 20 *Trei vectori liberi sunt coplanari dacă şi numai dacă sunt liniari dependenţi.*

Demonstraţie. Demonstrăm doar suficienţa ("$\Leftarrow$").

Presupunem că avem relaţia $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$, cu α, β, γ nu toţi nuli. Presupunem $\gamma \neq 0$ şi obţinem $\vec{w} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right) \vec{u} + \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right) \vec{v}$. Dar $\frac{\alpha}{\gamma} \vec{u}$ este coliniar cu $\vec{u}$, iar $\frac{\beta}{\gamma} \vec{v}$ este coliniar cu $\vec{v}$. Am obţinut deci că $\vec{w}$ este în acelaşi plan cu vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$. ■

Propoziţia 21 *Oricare patru vectori liberi sunt liniar dependenţi.*

Corolarul 22 *a) Doi vectori liberi sunt liniari independenţi dacă şi numai dacă sunt necoliniari.*
b) Trei vectori liberi sunt liniari independenţi dacă şi numai dacă sunt necoplanari.

Prin urmare, oricare trei vectori liberi necoplanari sunt indepenţi şi constituie şi sistem de generatori pentru orice alt vector liber, deci

Teorema 23 *În spaţiul vectorial al vectorilor liberi V_3 oricare trei vectori liberi necoplanari formează o bază. Deci dimensiunea spaţiului V_3 este 3.*

Propoziţia 24 *Fie planul π din spaţiul X şi notăm prin V_π mulţimea tuturor vectorilor din V_3 paraleli cu planul π. Atunci V_π este un subspaţiu vectorial de dimensiune 2.*

Propoziţia 25 *Fie dreapta d din spaţiul X şi notăm prin V_d mulţimea tuturor vectorilor din V_3 paraleli cu dreapta d (adică dreapta suport a oricărui reprezentant al lui $\vec{u}$ este paralelă sau coincide cu d). Atunci V_d este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1.*

1.3 Produsul scalar a doi vectori liberi

Definiţia 26 *Se numeşte* ***produsul scalar a doi vectori liberi*** *numărul real notat cu $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$ sau $(\vec{u}, \vec{v})$ sau cu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, şi dat de:*

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle := \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}, \tag{1}$$

pentru $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, şi $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$, pentru $\vec{u} = \vec{0}$ sau $\vec{v} = \vec{0}$.

Are loc următoarea caracterizare a ortogonalităţii:

Propoziţia 27 ***Doi vectori sunt ortogonali (perpendiculari) dacă şi numai dacă produsul lor scalar este nul.***

Demonstraţie. Evident, $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$ dacă şi numai dacă $\|\vec{u}\| = 0$ sau $\|\vec{v}\| = 0$ sau $\cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \cos(\pi/2) = 0$, ceea ce înseamnă că cei doi vectori sunt ortogonali. ■

Luând $\vec{v} = \vec{u}$ obţinem $\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle = \|\vec{u}\| \, \|\vec{u}\| \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$. Deci are loc următoarea egalitate (legătura dintre normă şi produs scalar)

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 \text{ sau } \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}, \text{ unde } \vec{u}^2 := \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle$$

(adică pătratul mărimii unui vector liber este egal cu pătratul scalar al vectorului).

Propoziţia 28 *Au loc următoarele proprietăţi:*
a) $\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.
b) $\langle \lambda\vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \lambda\vec{v}\rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.
c) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.
d) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.

Remarca 29 *Spaţiul vectorial al vectorilor liberi V_3 este spaţiu euclidian.*

Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o **bază ortonormată** a lui $\mathbb{R}^3$, adică B este bază, iar vectorii bazei sunt versori şi sunt ortogonali doi câte doi, i.e. verifică condiţiile

$$\begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1, \\ \vec{i} \perp \vec{j}, \ \vec{i} \perp \vec{k}, \ \vec{j} \perp \vec{k} \end{cases}$$

sau echivalent

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \quad \text{şi} \quad \langle \vec{i}, \vec{j}\rangle = \langle \vec{i}, \vec{k}\rangle = \langle \vec{j}, \vec{k}\rangle = 0.$$

Reamintim că existenţa bazelor ortonormate este asigurată de procedeul de ortonormalizare al lui Gram–Schmidt.

Dacă $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \in V_3$ şi $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \in V_3$, atunci are loc următoarea **expresie analitică a produsului scalar**

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{2}$$

În particular

$$\vec{u}^2 = \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle = (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2,$$

adică

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2} \tag{3}$$

Din definiţia (1) deducem

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2} \cdot \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}} \tag{4}$$

Formulele (2), (3) şi (4) reprezintă **expresiile analitice ale produsului scalar, ale normei şi respectiv ale cosinusului** unghiului dintre doi vectori liberi.

1.4 Produsul vectorial a doi vectori liberi

Definiţia 30 *Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$.* ***Produsul vectorial a celor doi vectori*** *este notat cu $\vec{u} \times \vec{v}$ şi este dat de:*
a) dacă $\vec{u}, \vec{v}$ sunt coliniari atunci $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$,
b) dacă $\vec{u}, \vec{v}$ sunt necoliniari atunci $\vec{u} \times \vec{v}$ este un nou vector liber astfel încât:
b_1) ***direcţia lui este perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$,***
b_2) ***sensul lui este dat de regula burghiului*** *(sau echivalent $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ formează o bază orientată pozitiv),*
b_3) mărimea lui este aria paralelogramului format cu cei doi vectori.

Propoziţia 31 *Au loc următoarele proprietăţi:*
a) Având în vedere că, din definiţie, produsul vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ este un vector ortogonal pe ambii vectori $\vec{u}$ şi pe $\vec{v}$ obţinem că

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0 = \langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle \,, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3.$$

b) Folosind formula ariei unui paralelogram deducem că

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right), \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3.$$

c) Are loc şi următoarea formulă de legătură dintre produsul vectorial şi produsul scalar, numit şi identitatea lui Lagrange:

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v})^2 &= \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \left(1 - \cos^2\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)\right) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \,, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3. \end{aligned}$$

Propoziţia 32 ***Doi vectori sunt coliniari dacă şi numai dacă produsul lor vecorial este nul.***

Demonstraţie. Necesitatea ("$\Rightarrow$").
Fie $\vec{u}, \vec{v}$ cei doi vectori coliniari. Atunci

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\alpha) = 0,$$

unde $\alpha = 0$ sau π.
Suficienţa ("$\Leftarrow$").
Presupunem că $\vec{u} \times \vec{v} = 0$. Conform definiţiei produsului vectorial avem că $\vec{u}$ sau $\vec{v}$ sunt coliniari sau $0 = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$, ceea ce înseamnă că $\vec{u} = \vec{0}$ sau $\vec{v} = \vec{0}$ sau $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0$ sau π, deci vectorii daţi sunt coliniari. ■

Propoziţia 33 *Au loc următoarele proprietăţi:*
a) Produsul vectorial este anticomutativ, i.e. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.
b) $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \times \vec{v})$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.
c) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.

Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$. Evident, folosind definiţia produsului vectorial avem că

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \text{şi} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Dacă $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \in V_3$ şi $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \in V_3$, atunci are loc următoarea **expresie analitică a produsului vectorial**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Propoziţia 34 *Aria unui triunghi format de doi vectori liberi $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ este jumătate din aria paralelogramului format cu cei doi vectori, adică*

$$\mathcal{A}_{\Delta}=\frac{1}{2}\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|.$$

1.5 Produsul a trei vectori liberi

Prezentăm în continuare produsul mixt şi produsul dublu vectorial a trei vectori liberi, noţiuni care folosesc produsul scalar şi produsul vectorial a doi vectori liberi şi care prezintă un interes geometric.

Definiţia 35 *Fie $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3$.* ***Produsul mixt a celor trei vectori*** *este numărul real notat cu $\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle$ şi dat de:*

$$\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle:=\langle\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\rangle.$$

Propoziţia 36 ***Trei vectori sunt coplanari dacă şi numai dacă produsul lor mixt este nul.***

Demonstraţie. Avem

$$\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle=0\Leftrightarrow\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\times\vec{w}\right\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\right)=0.$$

Dacă $\left\|\vec{u}\right\|=0$ atunci $\vec{u}=\vec{0}$ care este evident coplanar cu $\vec{v},\vec{w}$. Dacă $\left\|\vec{v}\times\vec{w}\right\|=0$, atunci $\vec{v}\times\vec{w}=\vec{0}$ şi deci $\vec{v},\vec{w}$ sunt coliniari. Deci $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sunt coplanari. Dacă $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\right)=0$, adică unghiul $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\right)=\pi/2$, atunci $\vec{u}$ şi $\vec{v}\times\vec{w}$ sunt vectori ortogonali. Dar $\vec{v}\times\vec{w}$ este prin definiţie perpendicular pe $\vec{v}$ şi pe $\vec{w}$. deci $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ aparţin aceluiaşi plan, planul ortogonal pe $\vec{v}\times\vec{w}$. ■

Remarca 37 *Trei vectori liberi formează o bază în spaţiul V_3 dacă şi numai dacă sunt necoplanari adică dacă şi numai dacă produsul lor mixt este nenul.*

Propoziţia 38 *Valoarea absolută a produsului mixt a trei vectori liberi necoplanari reprezintă volumul paralelipipedului construit pe cu cei trei vectori ca muchii, adică*

$$\mathcal{V}=\left|\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle\right|.$$

Propoziţia 39 *Au loc următoarele proprietăţi:*

a) Permutările circulare nu afectează semnul produsului mixt, adică

$$\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle=\langle\vec{v},\vec{w},\vec{u}\rangle=\langle\vec{w},\vec{u},\vec{v}\rangle,\forall\,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3.$$

b) $\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle=-\langle\vec{v},\vec{u},\vec{w}\rangle$, $\forall\,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3$.

Fie $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$. Dacă $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\in V_3$, $\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}\in V_3$ şi $\vec{w}=w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}\in V_3$, atunci are loc următoarea **expresie analitică a produsului mixt**

$$\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle=\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}.\qquad(6)$$

Într-adevăr, $\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}\Rightarrow\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle=\langle\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\rangle=u_1\left(v_2w_3-v_3w_2\right)+u_2\left(v_3w_1-v_1w_3\right)+u_3\left(v_1w_2-v_2w_1\right)$.

Pe de altă parte, calculând determinantul obţinem (dezvoltăm după prima linie) $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$ $u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)$, adică are loc egalitatea (6).

Prezentăm, în final, produsul dublu vectorial a trei vectori liberi.

Definiţia 40 *Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$. **Produsul dublu vectorial a celor trei vectori** este vectorul $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.*

Propoziţia 41 *Are loc următoarea proprietate:*

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}.$$

Remarca 42 *Produsul dublu vectorial este un vector coplanar cu vectorii din paranteză, i.e. cu $\vec{v}$ şi $\vec{w}$. Într-adevăr, $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ este, din definiţia prodului vectorial, un vector ortogonal pe $\vec{u}$ şi pe $\vec{v} \times \vec{w}$, iar $\vec{v} \times \vec{w}$ este, tot din definiţia prodului vectorial, un vector ortogonal pe $\vec{v}$ şi pe $\vec{w}$, deci vectorul $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ este în acelaşi plan cu vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{w}$. Evident are loc şi caracterizarea cu produsul mixt a coplanarităţii a trei vectori:*

$$\langle \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}), \vec{v}, \vec{w} \rangle := \langle \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}), \vec{v} \times \vec{w} \rangle = 0.$$

Remarca 43 *Produsul dublu vectorial nu este asociativ. Într-adevăr, $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$, deoarece*

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}$$

iar, pe de altă parte,

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = -\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \vec{u} + \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \vec{v}.$$

1.6 Exerciţii

1. Se dă tetraedrul $ABCD$. Să se afle sumele de vectori: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$.

   Rezolvare:

   Folosind regula triunghiului de adunare a doi vectori obţinem sumele.

2. Să se arate că vectorii $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ închid un triunghi dacă şi numai dacă $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

   Rezolvare:

   Să presupunem, mai întâi, că vectorii $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ închid un triunghi. Fie A un punct oarecare din spaţiu. Aplicăm vectorul liber $\vec{c}$ în punctul A şi obţinem $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$. Apoi în extremitatea B aplicăm vectorul $\vec{a}$ şi obţinem $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$. Apoi în extremitatea C aplicăm vectorul $\vec{b}$ şi obţinem $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$. Obţinem acum imediat, folosind regula triunghiului de adunare a doi vectori
   $$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$$

   Invers, să presupunem prin reducere la absurd că vectorii nu închid un triunghi, adică, folosind scrierea de mai sus, când aplicăm vectorul $\vec{b}$ în extremitatea C obţinem $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$, cu $D\neq A$. Acum, din $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ obţinem
   $$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\vec{0}\Leftrightarrow A=D$$
   care nu se poate, deci ceea ce am presupus este fals.

3. Fie triunghiul ABC. Să se arate că vectorii mediane $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$ pot închide un triunghi.

4. Se dau doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ astfel încât $\|\vec{u}\|=11$, $\|\vec{v}\|=23$ şi $\|\vec{u}-\vec{v}\|=30$. Să se determine $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

   Rezolvare:

   Din $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=900$ se va determina $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=-125$. Se va obţine
   $$\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{\vec{u}^2+2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+\vec{v}^2}=\sqrt{121-250+529}=\sqrt{121-250+529}=20.$$

5. Să se calculeze produsul scalar $\langle 5\vec{u}+3\vec{v},2\vec{u}-\vec{v}\rangle$, dacă se dau $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=3$ şi $\vec{u}\perp\vec{v}$ ($\vec{u}$ este ortogonal pe $\vec{v}$).

   Rezolvare:

6. Să se calculeze $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$, $(\vec{u}+\vec{v})^2$ şi $\langle 2\vec{u}-\vec{v},3\vec{u}+4\vec{v}\rangle$, dacă se dau $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=5$ şi $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\pi/3$.

   Rezolvare:

7. Să se determine parametrul λ astfel încât vectorii $\vec{u}=\vec{i}+2\lambda\vec{j}-(\lambda-1)\vec{k}$ şi $\vec{v}=(3-\lambda)\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ să fie perpendiculari.

   Rezolvare:

8. Să se calculeze produsul mixt $\langle \vec{u}-\vec{v}, \vec{v}-\vec{w}, \vec{w}-\vec{u}\rangle$.

   Rezolvare:

   Suma vectorilor este
   $$(\vec{u}-\vec{v})+(\vec{v}-\vec{w})+(\vec{w}-\vec{u})=\vec{0}$$
   deci cei trei vectori pot închide un triunghi. Prin urmare, vectorii sunt coplanari, deci produsul lor mixt este nul.

9. Să se calculeze aria paralelogramului construit cu vectorii $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

   Rezolvare:

   Aria aria paralelogramului construit cu doi vectori daţi este
   $$\mathcal{A}=\|\vec{u}\times\vec{v}\|\,,\ \text{unde } \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=5\vec{i}-5\vec{k}-5\vec{j}.$$
   Deci
   $$\mathcal{A}=\sqrt{5^2+(-5)^2+(-5)^2}=5\sqrt{3}.$$

10. Să se calculeze produsul vectorial $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$ şi să se dea o interpretare geometrică rezultatului obţinut.

    Rezolvare:

    Avem
    $$(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\times\vec{v}-\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{u}-\vec{v}\times\vec{v}=\vec{0}-2\vec{u}\times\vec{v}-\vec{0}=-2\vec{u}\times\vec{v}.$$
    Deci
    $$\|(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})\|=\|-2\vec{u}\times\vec{v}\|=2\|\vec{u}\times\vec{v}\|\,.$$
    Pe de altă parte se poate vedea că cele două laturi ale unui paralelogram format cu doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt $\vec{u}+\vec{v}$ şi $\vec{u}-\vec{v}$. Deci interpretarea geometrică a egalităţii de mai sus este: aria paralelogramului având drept laturi diagonalele unui paralelogram este egală cu dublul ariei paralelogramului iniţial.

11. Să se arate că dacă $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{w}=\vec{w}\times\vec{u}$, atunci $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$.

    Rezolvare:

    Avem
    $$\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{w}\times\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\times\vec{v}+\vec{w}\times\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow(\vec{u}+\vec{w})\times\vec{v}=\vec{0},$$
    ceea ce înseamnă echivalent că vectorii $(\vec{u}+\vec{w})$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari, adică există $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u}+\vec{w}=\lambda\vec{v}$. Deci $\vec{u}=\lambda\vec{v}-\vec{w}$. Înlocuim vectorul $\vec{u}$ în egalitatea $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}\times\vec{u}$ şi obţinem
    $$\begin{aligned}&(\lambda\vec{v}-\vec{w})\times\vec{v}=\vec{w}\times(\lambda\vec{v}-\vec{w})\Leftrightarrow(\lambda\vec{v})\times\vec{v}-\vec{w}\times\vec{v}=\vec{w}\times(\lambda\vec{v})-\vec{w}\times\vec{w}\\&\Leftrightarrow-\vec{w}\times\vec{v}=\lambda\vec{w}\times\vec{v}\Leftrightarrow\lambda=-1.\end{aligned}$$
    Se obţine, înlocuind $\lambda=-1$,
    $$\vec{u}=-\vec{v}-\vec{w}\Leftrightarrow\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}.$$

12. Să se arate că vectorii $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ şi $\vec{w} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ sunt coplanari.

    Rezolvare:

    Se calculează produsul mixt al celor trei vectori şi se obţine

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

    şi deci, folosind caracterizarea, se obţine că cei trei vectori sunt coplanari.

13. Să se calculeze mărimea înălţimii paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$ şi $\vec{w} = -\vec{j} + 2\vec{k}$, considerându-se că baza paralelipipedului este formată cu primii doi vectori.

    Rezolvare:

    Produsului mixt a trei vectori liberi necoplanari reprezintă volumul paralelipipedului construit pe cu cei trei vectori ca muchii, i.e.

$$\mathcal{V} = |\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle|$$

    iar

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

    Aria bazei este jumătate din aria paralelogramului format cu cei primii doi vectori, iar

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$$

    şi deci

$$\mathcal{A} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{35}.$$

    Lungimea înălţimii paralelipipedului va fi atunci

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{A}} = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

14. Se dau punctele A, B şi C prin vectorii lor de poziţie $\overrightarrow{OA} = 14\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$. Să se arate că triunghiul AOB este dreptunghic şi că triunghiul BOC este isoscel.
    Se cere deasemenea să se determine perimetrul triunghiului ABC, aria sa şi lungimea înălţimii din A, precum şi vectorul bisectoarei unghiului BAC.

    Rezolvare:

    Se determină mai întâi vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{AC}$. Se obţine

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -12\vec{i} + 9\vec{j} - 9\vec{k} = (-12, 9, -9)\,, \\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + 9\vec{k} = (-4, 5, 9)\,, \\ \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = 16\vec{i} - 14\vec{j} = (16, -14, 0)\,. \end{aligned}$$

Calculăm acum produse scalar pentru a vedea care vectori sunt ortogonali. Avem

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = 28 - 14 - 14 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB},$$

deci ΔAOB este dreptunghic în punctul O.

Calculăm lungimile de laturi

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{OB}|| &= \sqrt{2^2 + 2^2 + (-7)^2} = \sqrt{57}, \\ ||\overrightarrow{OC}|| &= \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{57}, \\ ||\overrightarrow{BC}|| &= \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 9^2} = \sqrt{122}, \end{aligned}$$

prin urmare, ΔBOC este isoscel.

Perimetrul ΔABC se obţine calculând

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{AB}|| &= \sqrt{(-12)^2 + 9^2 + (-9)^2} = \sqrt{306}, \\ ||\overrightarrow{BC}|| &= \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 9^2} = \sqrt{122}, \\ ||\overrightarrow{CA}|| &= \sqrt{16^2 + (-14)^2 + 0^2} = \sqrt{452}, \end{aligned}$$

şi deci

$$\mathcal{P} = ||\overrightarrow{AB}|| + ||\overrightarrow{BC}|| + ||\overrightarrow{CA}|| = \sqrt{306} + \sqrt{122} + \sqrt{452}.$$

Aria ΔABC este dată de

$$\mathcal{A}_\Delta = \frac{1}{2}||\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA}|| = \frac{3}{2}\sqrt{42^2 + 48^2 + (-8)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{4132} = 3\sqrt{1033},$$

deoarece

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & 9 \\ 16 & -14 & 0 \end{vmatrix} = 126\vec{i} + 144\vec{j} - 24\vec{k} = 3\left(42\vec{i} + 48\vec{j} - 8\vec{k}\right).$$

Pe de altă parte

$$\mathcal{A}_\Delta = \frac{1}{2}h||\overrightarrow{BC}|| \Rightarrow h = 2\frac{\mathcal{A}_\Delta}{||\overrightarrow{BC}||} = 2\frac{3\sqrt{1033}}{\sqrt{122}} = 6\frac{\sqrt{1033}}{\sqrt{122}}.$$

15. Se dau punctele $A = (3,0,0)$, $B = (2,4,0)$, $C = (-3,-1,0)$ şi $D = (0,0,5)$. Să se afle punctele M, N, P şi Q care împart muchiile AB, AC, DB şi respectiv DC în acelaşi raport k. Să se arate şi că $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

Rezolvare:

Se determină mai întâi vectorii de poziţie ai punctelor date. Precizăm că în general vectorii de poziţie se notează şi cu $\vec{r}_A := \overrightarrow{OA}$, $\vec{r}_B := \overrightarrow{OB}$ etc. Obţinem

$$\begin{aligned}
\vec{r}_A &= \overrightarrow{OA} = (x_A - x_O)\,\vec{i} + (y_A - y_O)\,\vec{j} + (z_A - z_O)\,\vec{k} \\
&= x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} = 3\vec{i} = (3,0,0)\,, \\
\vec{r}_B &= \overrightarrow{OB} = (x_B - x_O)\,\vec{i} + (y_B - y_O)\,\vec{j} + (z_B - z_O)\,\vec{k} \\
&= x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k} = 2\vec{i} + 4\vec{j} = (2,4,0)\,, \\
\vec{r}_C &= \overrightarrow{OC} = (x_C - x_O)\,\vec{i} + (y_C - y_O)\,\vec{j} + (z_C - z_O)\,\vec{k} \\
&= x_C\vec{i} + y_C\vec{j} + z_C\vec{k} = -3\vec{i} - \vec{j} = (-3,-1,0)\,, \\
\vec{r}_D &= \overrightarrow{OD} = (x_D - x_O)\,\vec{i} + (y_D - y_O)\,\vec{j} + (z_D - z_O)\,\vec{k} \\
&= x_D\vec{i} + y_D\vec{j} + z_D\vec{k} = 5\vec{k} = (0,0,5)\,.
\end{aligned}$$

Pe de altă parte scriem şi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\,\vec{k} = (-1,4,0)\,, \\
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (x_C - x_A)\,\vec{i} + (y_C - y_A)\,\vec{j} + (z_C - z_A)\,\vec{k} = (-6,-1,0)\,, \\
\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = (x_B - x_D)\,\vec{i} + (y_B - y_D)\,\vec{j} + (z_B - z_D)\,\vec{k} = (2,4,-5)\,, \\
\overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (x_C - x_D)\,\vec{i} + (y_C - y_D)\,\vec{j} + (z_C - z_D)\,\vec{k} = (-3,-1,-5)\,.
\end{aligned}$$

Din eununţul problemei cerem ca

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{MB}, \quad \overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{NC}, \quad \overrightarrow{DP} = k\,\overrightarrow{PB}, \quad \overrightarrow{DQ} = k\,\overrightarrow{QC}\,.$$

Obţinem că

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= \vec{r}_M - \vec{r}_A, \quad \overrightarrow{AN} = \vec{r}_N - \vec{r}_A, \quad \overrightarrow{DP} = \vec{r}_P - \vec{r}_D, \quad \overrightarrow{DQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_D, \\
\overrightarrow{MB} &= \vec{r}_B - \vec{r}_M, \quad \overrightarrow{NC} = \vec{r}_C - \vec{r}_N, \quad \overrightarrow{PB} = \vec{r}_B - \vec{r}_P, \quad \overrightarrow{QC} = \vec{r}_C - \vec{r}_Q.
\end{aligned}$$

Relaţiile de proporţionalitate devin

$$\begin{aligned}
\vec{r}_M - \vec{r}_A &= k\,(\vec{r}_B - \vec{r}_M)\,, \quad \vec{r}_N - \vec{r}_A = k\,(\vec{r}_C - \vec{r}_N)\,, \\
\vec{r}_P - \vec{r}_D &= k\,(\vec{r}_B - \vec{r}_P)\,, \quad \vec{r}_Q - \vec{r}_D = k\,(\vec{r}_C - \vec{r}_Q)
\end{aligned}$$

sau echivalent

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_B}{1+k}, \quad \vec{r}_N = \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_C}{1+k}, \quad \vec{r}_P = \frac{\vec{r}_D + k\vec{r}_B}{1+k}, \quad \vec{r}_Q = \frac{\vec{r}_D + k\vec{r}_C}{1+k}\,.$$

Deci

$$\begin{aligned}
\vec{r}_M &= \frac{(3,0,0) + k\,(2,4,0)}{1+k} = \frac{1}{1+k}\,(3+2k, 4k, 0)\,, \\
\vec{r}_N &= \frac{(3,0,0) + k\,(-3,-1,0)}{1+k} = \frac{1}{1+k}\,(3-3k, -k, 0)\,, \\
\vec{r}_P &= \frac{(0,0,5) + k\,(2,4,0)}{1+k} = \frac{1}{1+k}\,(2k, 4k, 5)\,, \\
\vec{r}_Q &= \frac{(0,0,5) + k\,(-3,-1,0)}{1+k} = \frac{1}{1+k}\,(-3k, -k, 5)\,.
\end{aligned}$$

Calculăm acum

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \vec{r}_N - \vec{r}_M = \frac{1}{1+k}\,(3-3k, -k, 0) - \frac{1}{1+k}\,(3+2k, 4k, 0) \\
&= \frac{1}{1+k}\,(-5k, -5k, 0) = \frac{-5k}{1+k}(\vec{i} + \vec{j}),
\end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \frac{1}{1+k}(-3k,-k,5) - \frac{1}{1+k}(2k,4k,5)\\ &= \frac{1}{1+k}(-5k,-5k,0) = \frac{-5k}{1+k}(\vec{i}+\vec{j})\end{aligned}$$

deci $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

16. Arătaţi că trei vectori sunt coplanari dacă şi numai dacă prosusul lor mixt este nul.

Rezolvare:

Vom furniza demonstraţia geometrică.

Necesitatea ("$\Rightarrow$"). Să presupunem că avem vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ coplanari şi fie π planul lor. Atunci, din definiţia produsului vectorial, $\vec{b} \times \vec{c}$ este un vector ortogonal pe planul π deci şi pe orice vector paralel cu π. Deci $\vec{b}\times\vec{c}$ este un vector ortogonal şi pe $\vec{a}$ ceea ce este echivalent cu $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}\rangle = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Suficienţa ("$\Leftarrow$"). Dacă $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, atunci, echivalent, $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}\rangle = 0$ deci $\vec{a}$ este ortogonal pe $\vec{b} \times \vec{c}$ şi, prin urmare, $\vec{a}$ este paralel cu planul vectorilor $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ (care sunt şi ei ortogonali pe $\vec{b} \times \vec{c}$). Aceasta înseamnă că vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ şi $\vec{c}$ sunt coplanari.

17. Demonstraţi reciproca teoremei lui Pitagora (dacă în triunghiul ABC are loc relaţia $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BC}^2$ atunci triunghiul este dreptunghic).

Rezolvare:

Presupunem că are loc relaţia

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BC}^2 \Leftrightarrow ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 = ||\overrightarrow{BC}||^2.$$

Deducem că

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow ||\overrightarrow{BC}||^2 = \langle \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\rangle\\ &\Leftrightarrow ||\overrightarrow{BC}||^2 = \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\rangle - \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\rangle - \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\rangle\\ &\Leftrightarrow ||\overrightarrow{BC}||^2 = ||\overrightarrow{AC}||^2 - 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle + ||\overrightarrow{AB}||^2\\ &\Leftrightarrow 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{BC}||^2 \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

adică unghiul din vârful A este unghi drept.