Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii
şi Tehnologia Informaţiei
Algebră, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC
http://math.etti.tuiasi.ro/maticiuc/

CURS XI – XII
SINTEZĂ

1 Algebra vectorială a vectorilor liberi

Definiţia 1 *Se numeşte **segment orientat** ca fiind orice pereche orientată de puncte din spaţiu.*

Definiţia 2 *Două segmente orientate nenule se numesc **coliniare** dacă au aceaşi direcţie. În caz contrar ele se numesc necoliniare.*

Definiţia 3 *Se numeşte **mărime (modul sau lungime) a unui segment orientat** $\overline{AB}$, distanţa dintre punctele A şi B. Vom nota mărimea cu $||\overline{AB}||$.*

Definiţia 4 *Două segmente orientate se numesc echipolente dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi mărime; vom nota aceasta cu $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.*

Definiţia 5 *Se numeşte vector liber o clasă de echivalenţă în raport cu relaţia de echipolenţă pe mulţimea segmentelor orientate din spaţiu.*

Vom nota cu $\overrightarrow{AB} = \{\overline{CD} : \overline{CD} \sim \overline{AB}\}$, şi în general, vectorii liberi cu $\vec{u}$, $\vec{v}$. În general vectorul liber este gândit printr-un reprezentat al său. Dacă aplicăm vectorul liber $\vec{u}$ într-un punct A din spaţiu atunci vom obţine $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Extremitatea B este astfel unic determinată. Orice vector liber poate fi aplicat în orice punct din spaţiu. Mulţimea tuturor segmentelor nule orientate defineşte un vector ce va fi numit vectorul liber nul, notat cu $\vec{0}$. Avem deci $\vec{0} = \left\{\overline{AA} : A \in X\right\}$. Definim mărimea, direcţia şi sensul unui vector liber ca fiind mărimea, direcţia şi respectiv sensul unui reprezentant oarecare al lui. Vectorul liber de mărime egală cu unitatea se numeşte versor.

Definiţia 6 *Suma a doi vectori liberi se obţine prin regula triunghiului sau cea a paralelogramului.*

Definiţia 7 *Regula triunghiului: fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ şi A un punct din spaţiu. Aplic $\vec{u}$ în punctul A şi vom obţine $\overrightarrow{AB}$; aplic $\vec{v}$ în punctul B şi obţin $\overrightarrow{BC}$. Prin definiţie*

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}.$$

Propoziţia 8 *Au loc următoarele proprietăţi:*
a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})\,, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.
*b) Există vectorul notat $\vec{0} \in V_3$, numit **vector nul**, astfel încât $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u},\ \forall\, \vec{u} \in V_3$.*
*c) Pentru orice $\vec{u} \in V_3$ există vectorul $-\vec{u} \in V_3$, numit **opusul** lui $\vec{u}$, astfel încât $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.*
d) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

Definiţia 9 (înmulţirea cu scalari a vectorilor liberi) *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in V_3$ atunci $\alpha\,\vec{u}$ este dat de:*
a) dacă $\alpha = 0$ sau $\vec{u} = \vec{0}$, atunci $\alpha\,\vec{u} = \vec{0}$,
b) dacă $\alpha \neq 0$ şi $\vec{u} \neq \vec{0}$, atunci $\alpha\,\vec{u}$ este vectorul liber care are aceeaşi direcţie cu $\vec{u}$, acelaşi sens cu $\vec{u}$ dacă $\alpha > 0$, sens opus lui $\vec{u}$ dacă $\alpha < 0$, şi mărimea dată de $||\alpha\vec{u}|| = |\alpha|\ ||\vec{u}||$.

Propoziţia 10 *Au loc următoarele proprietăţi:*
a) $\alpha\,(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v},\ \forall\,\alpha \in \mathbb{R},\ \forall\,\vec{u}, \vec{v} \in V_3$.
b) $(\alpha + \beta)\,\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u},\ \forall\,\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\,\vec{u} \in V_3$.
c) $\alpha\,(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\,\vec{u},\ \forall\,\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\,\vec{u} \in V_3$.
d) $1\,\vec{u} = \vec{u}, \forall\,\vec{u} \in V_3$.

Definiţia 11 *Diferenţa a doi vectori liberi se obţine astfel: fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ şi A un punct din spaţiu. Aplic $\vec{u}$ în punctul A şi vom obţine $\overrightarrow{AB}$; aplic $\vec{v}$ în acelaşi punct A şi obţin $\overrightarrow{AC}$. Vom obţine atunci*

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.$$

Prin definiţie avem că

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} := \overrightarrow{AC}.$$

Definiţia 12 *Doi vectori liberi se numesc **coliniari** dacă au aceaşi direcţie.*

Propoziţia 13 *Doi vectori liberi sunt coliniari dacă şi numai dacă sunt liniari dependenţi.*

Remarca 14 *Deci doi vectori $\vec{u}, \vec{v}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există un scalar α astfel încât $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ (sau $\vec{u} = \alpha\vec{v}$).*

Definiţia 15 *Un vector liber nenul este paralel cu un plan dacă dreapta suport a oricărui reprezentant al său este paralelă cu planul (sau este conţinut în plan).*

Definiţia 16 *Trei vectori se numesc coplanari dacă sunt paraleli cu acelaşi plan.*

Propoziţia 17 *Trei vectori liberi sunt coplanari dacă şi numai dacă sunt liniari dependenţi (adică avem relaţia $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, cu α, β, γ nu toţi nuli).*

Propoziţia 18 *Oricare patru vectori liberi sunt liniar dependenţi.*

Corolarul 19 *a) Doi vectori liberi sunt liniari independenţi dacă şi numai dacă sunt necoliniari.*
b) Trei vectori liberi sunt liniari independenţi dacă şi numai dacă sunt necoplanari.

Teorema 20 *În spaţiul vectorial al vectorilor liberi V_3 oricare trei vectori liberi necoplanari formează o bază. Deci dimensiunea spaţiului V_3 este 3.*

Definiţia 21 *Se numeşte **produsul scalar a doi vectori liberi** numărul real notat cu $\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle$ sau $(\vec{u}, \vec{v})$ sau cu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, şi dat de:*

$$\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle := \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}, \tag{1}$$

pentru $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, şi $\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$, pentru $\vec{u} = \vec{0}$ sau $\vec{v} = \vec{0}$.

Propoziţia 22 ***Doi vectori sunt ortogonali (perpendiculari) dacă şi numai dacă produsul lor scalar este nul.***

Propoziţia 23 *Au loc următoarele proprietăţi:*
a) $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.
b) $\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda\vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.
c) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.
d) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.

Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o **bază ortonormată** a lui $\mathbb{R}^3$, adică B este bază, iar vectorii bazei sunt versori şi sunt ortogonali doi câte doi, i.e. verifică condiţiile

$$\begin{cases} ||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1, \\ \vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ \vec{j} \perp \vec{k} \end{cases}$$

sau echivalent

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \quad \text{şi} \quad \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{k} \rangle = 0.$$

Reamintim că existenţa bazelor ortonormate este asigurată de procedeul de ortonormalizare al lui Gram–Schmidt.

Dacă $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \in V_3$ şi $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \in V_3$, atunci are loc următoarea **expresie analitică a produsului scalar**

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{2}$$

În particular

$$\vec{u}^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2 \,,$$

adică

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2} \tag{3}$$

Din definiţia (1) deducem

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2} \cdot \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}} \tag{4}$$

Formulele (2), (3) şi (4) reprezintă **expresiile analitice ale produsului scalar, ale normei şi respectiv ale cosinusului** unghiului dintre doi vectori liberi.

Definiţia 24 *Fie* $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$. ***Produsul vectorial a celor doi vectori*** *este notat cu* $\vec{u} \times \vec{v}$ *şi este dat de:*
a) dacă $\vec{u}, \vec{v}$ *sunt coliniari atunci* $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$,
b) dacă $\vec{u}, \vec{v}$ *sunt necoliniari atunci* $\vec{u} \times \vec{v}$ *este un nou vector liber astfel încât:*

b_1) ***direcţia lui este perpendiculară pe planul determinat de vectorii*** $\vec{u}$ ***şi*** $\vec{v}$,

b_2) ***sensul lui este dat de regula burghiului*** *(sau echivalent* $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ *formează o bază orientată pozitiv),*

b_3) *mărimea lui este aria paralelogramului format cu cei doi vectori.*

Propoziţia 25 *Au loc următoarele proprietăţi:*
a) Având în vedere că, din definiţie, produsul vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ *este un vector ortogonal pe ambii vectori* $\vec{u}$ *şi pe* $\vec{v}$ *obţinem că*

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0 = \langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle \,,\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3.$$

b) Folosind formula ariei unui paralelogram deducem că

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\widehat{(\vec{u}, \vec{v})},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3.$$

Propoziţia 26 ***Doi vectori sunt coliniari dacă şi numai dacă produsul lor vecorial este nul.***

Propoziţia 27 *Au loc următoarele proprietăţi:*

$a)$ *Produsul vectorial este anticomutativ, i.e.* $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

$b)$ $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda \left(\vec{u} \times \vec{v}\right), \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

$c)$ $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.

Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$. Evident, folosind definiţia produsului vectorial avem că

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \text{şi} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Dacă $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \in V_3$ şi $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \in V_3$, atunci are loc următoarea **expresie analitică a produsului vectorial**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Propoziţia 28 *Aria unui triunghi format de doi vectori liberi* $\vec{u}$ *şi* $\vec{v}$ *este jumătate din aria paralelogramului format cu cei doi vectori, adică*

$$\mathcal{A}_\Delta = \frac{1}{2} \left\| \vec{u} \times \vec{v} \right\|.$$

Definiţia 29 *Fie* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$. ***Produsul mixt a celor trei vectori*** *este numărul real notat cu* $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ *şi dat de:*

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle := \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle.$$

Propoziţia 30 ***Trei vectori sunt coplanari dacă şi numai dacă produsul lor mixt este nul.***

Propoziţia 31 *Valoarea absolută a produsului mixt a trei vectori liberi necoplanari reprezintă volumul paralelipipedului construit pe cu cei trei vectori ca muchii, adică*

$$\mathcal{V} = \left| \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle \right|.$$

Propoziţia 32 *Au loc următoarele proprietăţi:*

$a)$ *Permutările circulare nu afectează semnul produsului mixt, adică*

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u}, \vec{v} \rangle, \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3.$$

$b)$ $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = -\langle \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.

Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$. Dacă $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \in V_3$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \in V_3$ şi $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k} \in V_3$, atunci are loc următoarea **expresie analitică a produsului mixt**

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Exerciţiul 33 *Se dau punctele $A, B, \ldots$ (prin coordonatele lor sau prin vectorii lor de poziţie $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \ldots$) şi vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}, \vec{v} \ldots$ astfel încât se cunoaşte $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ şi $\|\vec{u}-\vec{v}\|$ sau unghiul $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$.*
(a) *Determinaţi $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$, $(\vec{u}+\vec{v})^2$, $\langle 5\vec{u}+3\vec{v}, 2\vec{u}-\vec{v}\rangle$.*
(b) *Să se determine parametrii ... astfel încât vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ să fie ortogonali/coliniari.*
(c) *Să se calculeze produsul mixt $\langle\vec{c},\vec{d},\vec{e}\rangle$.*
(d) *Să se calculeze aria paralelogramului şi a triunghiului construit cu vectorii $\vec{d}$ şi $\vec{e}$.*
(e) *Să se calculeze produsul vectorial $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$ şi să se dea o interpretare geometrică rezultatului obţinut.*
(f) *Să se arate că vectorii $\vec{e}$, $\vec{f}$ şi $\vec{g}$ sunt coplanari. Să se arate că $\vec{f}\times\vec{g}$ este ortogonal pe $\vec{e}$, $\vec{f}$ şi $\vec{g}$.*
(g) *Să se calculeze mărimea înălţimii paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{e}$, $\vec{f}$ şi $\vec{h}$, considerându-se că baza paralelipipedului este formată cu primii doi vectori.*
(h) *Să se arate că triunghiul AOB este dreptunghic şi că triunghiul BOC este isoscel. Să se determine perimetrul triunghiului ABC, aria sa şi lungimea înălţimii din A.*
(i) *Să se afle punctele M, N de pe muchiile AB şi respectiv AC astfel încât $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{NC}$. Să se determine vectorul $\overrightarrow{MN}$.*
(j) *Să se arate că vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ închid un triunghi. Scrieţi vectorul $\vec{c}$ în funcţie de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Calculaţi $\vec{c}^2$.*
(k) *Scrieţi definiţia produsului scalar, a produsului vectorial şi a produsului mixt*