Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii
şi Tehnologia Informaţiei
Algebră, Semestrul I,
Lector dr. Lucian MATICIUC
http://math.etti.tuiasi.ro/maticiuc/

CURS XIII – XIV
SINTEZĂ

1 Geometria planului şi a dreptei

(A) **Planul determinat de un punct şi de un vector normal nenul dat**.

Definiţia 1 *Se numeşte* ***dreaptă normală la planul*** π ***într-un punct*** P_0*, dreapta ce trece prin* P_0 *şi este perpendiculară pe planul* π*; direcţia normală* $\vec{N}$ *la un plan este orice vector nenul care are direcţia ortogonală planului.*

Vom nota acest plan prin $\pi(P_0, \vec{N})$.

Luând $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{N} = (A, B, C)$, putem scrie **ecuaţia generală a planului (care trece prin** $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ **şi de normală** $\vec{N} = (A, B, C)$**):**

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0,$$

sau echivalent

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Scalarii A, B, C sunt coordonatele normalei la plan.

Exemplul 2 (Cazuri particulare) (a) *Dacă* $D = 0$ *obţinem ecuaţia unui plan care trece prin origine*

$$Ax + By + Cz = 0.$$

(b) *Dacă* $A = 0$ *obţinem ecuaţia unui plan cu normala* $\vec{N} = (0, B, C)$ *care este deci paralelă cu planul* YOZ *sau echivalent, ortogonală pe* $\vec{i}$*. Obţinem deci un plan paralel cu versorul* $\vec{i}$*, adică paralel cu axa* OX *:*

$$By + Cz + D = 0.$$

(c) *Dacă* $A = D = 0$ *obţinem ecuaţia unui plan cu normala* $\vec{N} = (0, B, C)$ *(care este ortogonal pe* $\vec{i}$ *) şi care trece prin origine. Obţinem deci un plan care conţine axa* OX *:*

$$By + Cz = 0.$$

(d) *Dacă* $A = B = 0$ *obţinem ecuaţia unui plan cu normala* $\vec{N} = (0, 0, C)$ *care este paralelă cu axa* OZ*. Obţinem deci un plan este perpendicular pe* OZ*, deci e paralel cu* XOY *:*

$$Cz + D = 0.$$

(B) **Planul determinat de un punct şi de doi vectori necoliniari daţi.**

Fie P_0 un punct de vector de poziţie $\vec{r}_0$ relativ la $\mathcal{R}$ şi $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ doi vectori liberi necoliniari daţi. Vom nota planul determinat de $P_0, \vec{u}, \vec{v}$ prin $\pi(P_0, \vec{u}, \vec{v})$.

Luând $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, putem scrie **ecuaţia planului determinat de un punct** $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ **şi de două direcţii date** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(C) **Planul determinat de trei puncte.**

Fie P_1, P_2, P_3 trei puncte de vectori de poziţie $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ relativ la $\mathcal{R}$. Vom nota planul determinat de P_1, P_2, P_3 prin $\pi(P_1, P_2, P_3)$.

Luând $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,3}$, putem scrie **ecuaţia planului determinat de trei puncte** $P_i\,(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,3}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(A) **Dreapta determinată de un punct şi de o direcţie dată**. Fie P_0 un punct de vector de poziţie $\vec{r}_0$ relativ la $\mathcal{R}$. Fie $\vec{u} \in V_3$ şi să notăm cu $d(P_0, \vec{u})$ dreapta determinată de P_0 şi de direcţie $\vec{u}$.

Distanţa dintre două puncte este

$$\text{dist}\,(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{\overrightarrow{PQ}^2} = \sqrt{(\vec{r}_Q - \vec{r}_P)^2} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2},$$

deoarece are loc **ecuaţia vectorului determinat de două puncte**, folosind regula de adunare a vectorilor, $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow -\vec{r}_P + \vec{r}_Q = \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P.$$

Luând $\vec{r} = (x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{r}_0 = (x_0,y_0,z_0) = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$, putem scrie **ecuaţiile parametrice ale dreptei**

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1, \\ y = y_0 + tu_2, \\ z = z_0 + tu_3,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând parametrul t în ecuaţiile de mai sus obţinem **ecuaţiile canonice ale dreptei**

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \tag{1}$$

În cazul în care una dintre coordonatele lui $\vec{u}$ este zero, atunci, prin convenţie, vom considera numărătorul corespunzător nul. De exemplu, dacă $u_3 = 0$ atunci obţinem $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2}$ şi $z - z_0 = 0$.

(B) **Dreapta determinată de două puncte.** Fie P_1, P_2 două puncte de vectori de poziţie $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ relativ la $\mathcal{R}$. În acest caz vectorul $\overrightarrow{P_1P_2}$ va constitui direcţia dreptei, deci poblema este redusă la cazul precedent A). Vom lua deci $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Vom nota cu $d(P_1, P_2)$ dreapta determinată de punctele P_1, P_2.

Luând, ca mai sus, $\vec{r} = (x,y,z)$, $\vec{r}_1 = (x_1,y_2,z_3)$, $\vec{r}_2 = (x_2,y_2,z_2)$, putem scrie pe coordonate ecuaţia de mai sus şi obţinem **ecuaţiile parametrice ale dreptei determinate de două puncte**

$$\begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1)\,, \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t\,(z_2 - z_1)\,,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând parametrul t în ecuaţiile de mai sus obţinem **ecuaţiile canonice ale dreptei determinate de două puncte**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

În cazul în care unul dintre numitori este nul atunci, prin convenţie, vom considera numărătorul corespunzător nul.

(C) **Dreapta determinată de un punct şi de două direcţii normale (direcţie normală planară).** Fie P_0 un punct de vector de poziţie $\vec{r}_0$ relativ la $\mathcal{R}$ şi $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ doi vectori liberi necoliniari şi ortogonali pe direcţia dreptei. Vom nota cu $d(P_0, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ dreapta determinată de P_0 şi de direcţii normale $\vec{N}_1, \vec{N}_2$.

Luând $\vec{r} = (x,y,z)$, $\vec{r}_0 = (x_0,y_0,z_0)$, $\vec{N}_1 = (A_1,B_1,C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2,B_2,C_2)$ putem scrie **ecuaţiile dreptei dată ca intersecţie de două plane**

$$\begin{cases} A_1\,(x - x_0) + B_1\,(y - y_0) + C_1\,(z - z_0) = 0, \\ A_2\,(x - x_0) + B_2\,(y - y_0) + C_2\,(z - z_0) = 0, \end{cases}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

unde $D_i = -A_i x_0 - B_i y_0 - C_i z_0$, $i = \overline{1,2}$.

Remarca 3 *Dreapta determinată în acest mod este de fapt dată ca intersecţie de două plane, unde* $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ *sunt normalele celor două plane. Direcţia dreptei este ortogonală pe normalele celor două plane, adică direcţia este dată de produsul vectorial* $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$. *Putem considera deci dreapta, ca în cazul A), de tipul* $d(P_0, \vec{u} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2)$.

Exemplul 4 *a) O dreaptă perpendiculară pe* OZ *are direcţia perpendiculară pe* OZ*, deci conţinută în planul* XOY*, adică de tipul* $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$*, deci are ecuaţia (conform (1))*

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{0} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} \text{ şi } z = z_0$$

b) O dreaptă paralelă cu OZ *are direcţia paralelă cu* OZ*, deci de tipul* $\vec{u} = (0, 0, u_3)$ *deci are ecuaţia (conform (1))*

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{u_3} \Leftrightarrow x = x_0 \text{ şi } y = y_0.$$

c) Ecuaţiile axei OZ *sunt date de (având în vedere că* $\vec{N}_1 = \vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{N}_2 = \vec{j} = (0, 1, 0)$ *sunt versori ortogonali pe* OZ *şi ecuaţia (2))*

$$\begin{cases} x + D_1 = 0, \\ y + D_2 = 0. \end{cases}$$

Dar originea $O\,(0, 0, 0)$ *aparţine dreptei date, deci verifică sistemul de mai sus, adică* $D_1 = D_2 = 0$. *Vom obţine deci ecuaţiile axei* OZ *dată ca intersecţie de două plane (planul* YOZ *şi planul* XOZ*):*

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Propoziţia 5 (Distanţa de la un punct la o dreaptă) *Fie dreapta* $d\,(P_0, \vec{u})$ *şi punctul* $P_1 \notin d\,(P_0, \vec{u})$. *Aplicăm vectorul* $\vec{u}$ *în punctul* P_0 *şi obţinem vectorul* $\vec{u} = \overrightarrow{P_0 R}$. *Să notăm cu* Q *piciorul perpendicularei din* P_1 *pe* $P_0 S$. *Obţinem deci că distanţa de la* P_1 *la* $d\,(P_0, \vec{u})$ *este*

$$\operatorname{dist}(P_1, d) = ||\overrightarrow{P_1 Q}||.$$

Avem pe de o parte că $\mathcal{A}_{\Delta P_0 P_1 R} = \frac{1}{2} ||\overrightarrow{P_0 R}|| \cdot ||\overrightarrow{P_1 Q}|| = \frac{1}{2} ||\vec{u}|| \cdot \operatorname{dist}(P_1, d)$. *Pe de altă parte (din definiţia mărimii unui produs vectorial)* $\mathcal{A}_{\Delta P_0 P_1 R} = \frac{1}{2} ||\overrightarrow{P_0 P_1} \times \overrightarrow{P_0 R}|| = \frac{1}{2} ||\overrightarrow{P_0 P_1} \times \vec{u}||$. *Deci are loc următoarea* ***formulă de calcul a distanţei de la un punct la o dreaptă****:*

$$\operatorname{dist}(P_1, d) = \frac{||\overrightarrow{P_0 P_1} \times \vec{u}||}{||\vec{u}||}$$

Propoziţia 6 (Distanţa de la un punct la un plan) *Fie planul* $\pi\,(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ *şi punctul* $P_1 \notin \pi\,(P_0, \vec{u}, \vec{v})$. *Aplicăm vectorii* $\vec{u}, \vec{v}$ *în punctul* P_0 *şi obţinem vectorii* $\vec{u} = \overrightarrow{P_0 R}$, $\vec{v} = \overrightarrow{P_0 S}$. *Să notăm cu* Q *piciorul perpendicularei din* P_1 *pe planul vectorilor* $\overrightarrow{P_0 R}$ *şi* $\overrightarrow{P_0 S}$. *Obţinem deci că distanţa de la* P_1 *la* $\pi\,(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ *este*

$$\operatorname{dist}(P_1, \pi) = ||\overrightarrow{P_1 Q}||.$$

Avem pe de o parte că volumul paralelipipedului format cu vectorii $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0S}$ şi $\overrightarrow{P_0R}$ este (vezi definiţia produsului mixt)

$$\mathcal{V}_{paralelipiped} = \left|\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0S}, \overrightarrow{P_0R}\rangle\right| = \left|\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{u}, \vec{v}\rangle\right|$$

Pe de altă parte (din definiţia volumului unui paralelipiped) $\mathcal{V}_{paralelipiped}$ = (aria paraleologramului de la bază înmulţit cu înălţimea) = $||\overrightarrow{P_0S} \times \overrightarrow{P_0R}|| \cdot ||\overrightarrow{P_1Q}|| = ||\vec{u} \times \vec{v}|| \cdot \operatorname{dist}(P_1, \pi)$. Deci are loc următoarea ***formulă de calcul a distanţei de la un punct la un plan****:*

$$\operatorname{dist}(P_1, \pi) = \frac{\left|\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{u}, \vec{v}\rangle\right|}{||\vec{u} \times \vec{v}||}.$$

În cazul în care planul este de tipul $\pi(P_0, \vec{N})$, adică are ecuaţia $Ax + By + Cz + D = 0$, atunci ţinând cont că normala $\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v}$, şi că $\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{u}, \vec{v}\rangle \overset{def}{=} \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{u} \times \vec{v}\rangle = \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{N}\rangle$, obţinem, echivalent,

$$\operatorname{dist}(P_1, \pi) = \frac{\left|\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{N}\rangle\right|}{||\vec{N}||} = \frac{|(x_1 - x_0)\,A + (y_1 - y_0)\,B + (z_1 - z_0)\,C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Deci are loc următoarea ***formulă de calcul a distanţei de la un punct la un plan****:*

$$\operatorname{dist}(P_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Remarcăm că numărătorul l-am obţinut înlocuind, în ecuaţia planului, coordonatele curente cu coordonatele lui P_1.

Exerciţiul 7 *Se dau punctele $A, B, C, \ldots$, segmentele orientate $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}, \ldots$, vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$, dreptele $(d_1), (d_2), \ldots$ şi planele $(\pi_1), (\pi_2), \ldots$.*

(a) *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul A şi este perpendicular pe $\overrightarrow{EF}$.*
(b) *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul A şi este paralel cu planul (π_1).*
(c) *Să se verifice dacă punctele A, B, C, D sunt coplanare.*
(d) *Să se determine unghiul dintre planele (π_1) şi (π_2).*
(e) *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul B şi este paralel (sau conţine) axa Ox sau Oy sau Oz.*
(f) *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul B şi este paralel cu vectorii $\overrightarrow{EF}$ şi $\overrightarrow{GH}$.*
(g) *Să se determine poziţia faţă de planele şi axele de coordonate a planului (π_2).*
(h) *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul C şi este perpendicular pe (π_1) şi pe (π_2).*
(i) *Să se determine distanţa de la punctul D la planul (π_2).*
(j) *Să se determine parametrii $\lambda, \mu, \ldots$ astfel încât planele să fie paralele (sau perpendiculare).*

Exerciţiul 8 *Se dau punctele $A, B, C, \ldots$, segmentele orientate $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}, \ldots$, vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$, dreptele $(d_1), (d_2), \ldots$ şi planele $(\pi_1), (\pi_2), \ldots$.*
(a) *Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are direcţia $\vec{a}$ sau este paralelă cu planul (π_1) sau cu dreapta (d_1) (dată sub diverse forme).*
(b) *Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este ortogonală pe planul (π_2).*
(c) *Dacă (d_2) este dată ca intersecţia a două plane, să se scrie două puncte de pe dreaptă şi să se determine direcţia dreptei şi ecuaţiile canonice a dreptei.*
(d) *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul A şi este paralel cu două drepte (date ca intersecţie de două plane).*
(e) *Să se verifice dacă punctele A, B, C sunt coliniare.*
(f) *Să se determine dreapta prin A perpendiculară pe planul (π_3) şi să se determine piciorul perpendicularei din A pe (π_3). Să se scrie simetricul lui A faţă de planul (π_2).*
(g) *Să se determine ecuaţia planului care trece prin punctul B şi este perpendicular pe (d_2).*
(h) *Să se determine două puncte M_1 şi M_2 de pe dreapta (d_3) şi să se scrie vectorii $\overrightarrow{AM_1}$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$; să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul B şi prin dreapta (d_3), adică planul $\pi(A, M_1, M_2) \equiv \pi\left(A, \overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right)$.*
(i) *Să se determine câte două puncte M_1, M_2 şi M_3, M_4 de pe dreptele (d_4) şi respectiv (d_5). Să se scrie vectorii $\overrightarrow{M_1M_3}$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_3M_4}$. Să se arate că vectorii obţinuţi sunt coplanari şi să se scrie ecuaţia planului determinat de ei, adică planul $\pi(M_1, M_2, M_3) \equiv \pi\left(M_1, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_3M_4}\right) \equiv \pi\left(M_1, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right)$.*