

Capitolul 6

FUNCTȚII CONTINUE

6.1 Continuitatea unei funcții într-un punct

Fie o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. În capitolul precedent s-a studiat comportarea lui f în vecinătatea unui punct dat $x_0 \in D'$, observându-se dacă pentru valori x ale argumentului apropiate de x_0 valorile $f(x)$ ale funcției se apropie și ele (sau nu) de o valoare fixă, numită limita funcției în x_0 .

În acest capitol vom pune problema particulară a apropierii acestor valori de valoarea $f(x_0)$ a funcției în x_0 ; desigur, pentru a putea vorbi despre $f(x_0)$ va fi necesar ca x_0 să aparțină domeniului de definiție D . În plus, față de studiul limitei funcției în x_0 , se va avea în vedere și cazul în care x_0 este punct izolat al lui D .

Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru $x_0 \in D$, vom spune că funcția f este *continuă* în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$ urmează că $f(x) \in V$.

Întrucât se pune în fapt o problemă înrudită cu existența limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, definiția de mai sus se obține din definiția limitei unei funcții în x_0 înlocuind l cu $f(x_0)$, fiind totuși necesară înlocuirea condiției $x_0 \in D'$ cu condiția $x_0 \in D$.

Continuitatea într-un punct de acumulare

Se observă atunci că dacă x_0 este punct de acumulare al lui D , atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, iar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right),$$

adică *operația de aplicare a funcției f comută cu operația de calculare a limitei în x_0* .

Intuitiv, cum valorile $f(x)$ ale funcției sunt apropiate de valoarea limitei (egală acum cu $f(x_0)$) pentru x apropiat de x_0 , funcțiile continue într-un punct x_0 sunt acele funcții pentru care o schimbare minoră a argumentului de la x_0 la x va produce o schimbare minoră a valorii funcției de la $f(x_0)$ la $f(x)$.

Dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare atât la dreapta cât și la stânga pentru D , atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă există ambele limite laterale

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Continuitatea într-un punct izolat

Presupunem acum că x_0 este punct izolat al lui D și fie $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ o vecinătate a lui $f(x_0)$. Cum x_0 este punct izolat al lui D , există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $U \cap D = \{x_0\}$, și cum $f(x_0) \in V$, urmează că definiția funcției continue în x_0 este satisfăcută pentru acest U . Rezultă de aici că o funcție este continuă în orice punct izolat al domeniului său de definiție.

Studiul continuității unei funcții $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ în $x_0 \in D$ ne conduce deci la una dintre următoarele situații

1. $x_0 \in D'$

(a) f are limită în x_0 , cu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Atunci f este continuă în x_0 .

(b) f are limită în x_0 , cu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Atunci f nu este continuă în x_0 .

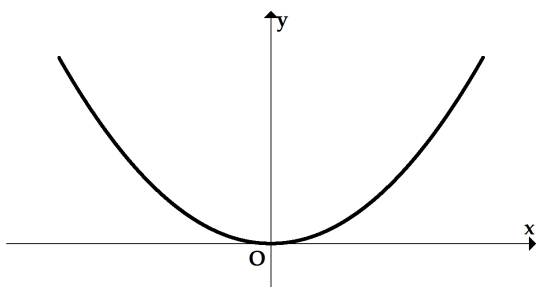
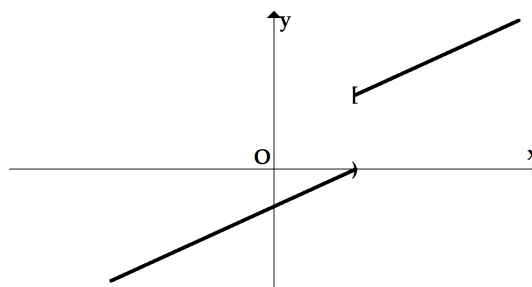
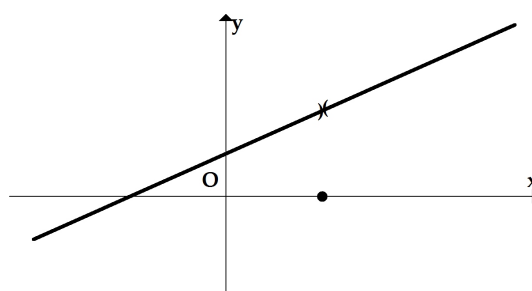
(c) f nu are limită în x_0 . Atunci f nu este continuă în x_0 .

2. $x_0 \notin D'$. Atunci f este continuă în x_0 .

Aspecte grafice ale noțiunii de continuitate

În fapt, conceptul de continuitate își are originea în considerații privind reprezentarea grafică a funcțiilor. Astfel, din punct de vedere intuitiv, o funcție este continuă în x_0 dacă graficul său „nu se întrerupe” în x_0 . În acest sens, să considerăm exemplele funcțiilor $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ x - 1, & x < 1 \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

Figura 6.1: Graficul funcției f_1 Figura 6.2: Graficul funcției f_2 Figura 6.3: Graficul funcției f_3

Se observă că f_1 are limită în $x_0 = 1$ și $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = 1$, iar cum $f_1(1) = 1$, urmează că $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = f_1(1)$, deci f_1 este continuă în $x_0 = 1$. Geometric, egalitatea $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = f_1(1)$ revine la faptul că graficul lui f_1 „nu se întrerupe” în $x_0 = 1$.

De asemenea, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_2(x) = 0 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_2(x) = 2$, deci f_2 nu este continuă în $x_0 = 1$, întrucât f_2 nu are limită în acest punct. Geometric, graficul lui f_2 „se întrerupe” la stânga lui $x_0 = 1$ (dar nu și la dreapta lui $x_0 = 1$).

În plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_3(x) = 2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_3(x)$, deci f_3 are limită în $x_0 = 1$. Totuși, deoarece $f_3(1) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 1} f_3(x)$, urmează că f_3 nu este continuă în $x_0 = 1$. Geometric, graficul lui f_3 „se întrerupe” atât la stânga cât și la dreapta lui $x_0 = 1$.

6.1.1 Continuitate laterală

Exemplul funcției f_2 de mai sus, pentru care graficul „se întrerupe” doar de o parte a lui $x_0 = 1$, cât și existența noțiunii de limită laterală sugerează introducerea conceptului de *continuitate laterală*.

Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru $x_0 \in D$, vom spune că funcția f este continuă la stânga în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x \leq x_0$, urmează că $f(x) \in V$.

Se observă atunci că dacă x_0 este punct de acumulare la stânga al lui D , atunci f este continuă la stânga în x_0 dacă și numai dacă există $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0),$$

adică limita la stânga a lui f în x_0 este egală cu $f(x_0)$.

În mod similar se definește noțiunea de continuitate la dreapta într-un punct x_0 , obținându-se că dacă x_0 este punct de acumulare la dreapta al lui D , atunci f este continuă la dreapta în x_0 dacă și numai dacă există $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Conform celor de mai sus, are loc următoarea proprietate.

Teorema 6.1. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$. Dacă x_0 este punct de acumulare atât la dreapta cât și la stânga al lui D , atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă este continuă atât la dreapta cât și la stânga lui x_0 .

6.1.2 Funcții continue pe o mulțime

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă în fiecare punct al unei mulțimi $A \subseteq D$, spunem că f este continuă pe A . Dacă f este continuă în orice punct al domeniului său de definiție, atunci se spune simplu că f este continuă. Din ceea ce s-a observat în capitolul anterior, funcțiile elementare sunt continue.

Exemplu. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ este continuă. Într-adevăr, pentru $x_0 < 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = \lim_{x \rightarrow x_0} (-x) = -x_0 = |x_0|$, deci f este continuă în x_0 . Similar, pentru $x_0 > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = |x_0|$. În fine, pentru $x_0 = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} |x| =$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}}(-x) = 0$, iar $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}|x| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}x = 0$, deci $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}}|x| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}|x| = |0|$, iar f este continuă în $x_0 = 0$.

6.1.3 Puncte de discontinuitate

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$. Dacă f nu este continuă în x_0 , se spune că f este *discontinuu* în D , sau că x_0 este *punct de discontinuitate* pentru f .

Clasificarea punctelor de discontinuitate

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ un punct de discontinuitate pentru f . Dacă ambele limite laterale $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ ale lui f în x_0 există și sunt finite, atunci x_0 se numește *punct de discontinuitate de specia (speța) întâi*. În orice altă situație (adică dacă măcar una din limitele laterale nu există, sau există, dar nu este finită), x_0 se numește *punct de discontinuitate de specia (speța) a doua*.

Dacă există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, diferită de $f(x_0)$, atunci x_0 (care este punct de discontinuitate de specia întâi) se mai numește și *discontinuitate înlăturabilă*, întrucât redefinind $f(x_0)$ ca fiind egală cu valoarea limitei în x_0 , x_0 se transformă într-un punct de continuitate.

Exemple. 1. Fie $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_1(x) = -1$,

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_1(x) = 1$, ambele fiind finite (dar diferite, 0 nefiind deci punct de continuitate), urmează că 0 este punct de discontinuitate de speța întâi.

2. Fie $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 1$, iar $f_2(0) = 0 \neq 1$, urmează că 0 este punct de discontinuitate de specia întâi, fiind în fapt o discontinuitate înlăturabilă.

3. Fie $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_3(x) = +\infty$, urmează că 0 este punct de discontinuitate de speța a doua.

4. Fie $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_4(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_4(x)$ nu există (deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$, iar funcția sinus nu are limită la $+\infty$), urmează că 0 este punct de discontinuitate de speța a doua.

5. Fie $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_5(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ și fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Există atunci două șiruri $(a_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{Q}$, $(b_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cu $a_n < x_0$, $b_n < x_0$ pentru $n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f_5(a_n) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_5(b_n) = 0$, deci nu există $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f_5(x)$, iar x_0 este punct de discontinuitate de speța a doua.

Ținând cont de faptul că funcțiile monotone au limite laterale în fiecare punct al domeniului de definiție, ele nu pot avea decât puncte de discontinuitate de o anumită natură. Mai mult, aceste puncte de discontinuitate nu pot fi arbitrar de multe.

Corolar 6.1.1. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție monotonă pe intervalul I . Atunci f nu poate avea decât puncte de discontinuitate de specia întâi pe I , mulțimea tuturor acestor puncte fiind cel mult numărabilă.

6.1.4 Prelungirea prin continuitate a unei funcții într-un punct

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f nu este definită în x_0 (deci $x_0 \notin D$), dar x_0 este punct de acumulare al domeniului D , iar f are limita finită l în x_0 , atunci funcția

$$\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ l, & x = x_0 \end{cases},$$

obținută prin definirea valorii în x_0 ca fiind egală cu valoarea limitei în același punct, celelalte valori rămânând neschimbate, se numește *prelungirea prin continuitate a lui f în x_0* . Desigur, deoarece

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = \tilde{f}(x_0),$$

\tilde{f} este continuă în x_0 , ceea ce justifică denumirea de prelungire prin continuitate.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, prelungirea prin continuitate a lui f în 0 este

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

6.1.5 Caracterizarea cu șiruri a continuității unei funcții într-un punct

Teorema următoare, denumită și *teorema de caracterizare cu șiruri a continuității unei funcții într-un punct* permite studiul continuității unei funcții cu ajutorul limitelor de șiruri.

Teorema 6.2. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$. Atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice șir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că șirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita $f(x_0)$.

Demonstrația este imediată, cu ajutorul rezultatului corespunzător pentru limite de funcții, Teorema 5.3. Să observăm și că teorema de mai sus (ca și definiția continuității, de fapt) nu mai exclude valori ale argumentului diferite de x_0 ; dacă $a_n = x_0$, atunci $f(a_n) = f(x_0)$, valoare egală cu valoarea limitei.

Teorema de mai sus se poate exprima prin faptul că *funcțiile continue se pot aplica relațiilor de convergență* (adică dacă f este continuă în x_0 , iar $a_n \rightarrow x_0$ pentru $n \rightarrow \infty$, în condițiile de mai sus, atunci $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$ pentru $n \rightarrow \infty$.)

6.1.6 Caracterizarea cu $\varepsilon - \delta$ a continuității unei funcții într-un punct

Următoarea *teoremă de caracterizare cu $\varepsilon - \delta$* se poate obține în mod imediat din rezultatul similar pentru limite de funcții, Teorema 5.1.

Teorema 6.3. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$. Atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon, x_0} > 0$ astfel ca $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon, x_0}$.

În teorema de mai sus, $\delta_{\varepsilon, x_0} > 0$ depinde (implicit) și de punctul x_0 în care se studiază continuitatea funcției, pe lângă dependența de ε .

6.1.7 Operații cu funcții continue

Se poate observa că operațiile uzuale cu funcții continue au ca rezultat funcții continue, în măsura în care ele sunt bine definite, fapt observat în teorema de mai jos.

Teorema 6.4. Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f, g continue în x_0 . Atunci

1. $f + g, f - g$ sunt continue în x_0 .
2. αf este continuă în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. fg este continuă în x_0 .
4. $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0 dacă $g(x_0) \neq 0$.
5. f^g este continuă în x_0 dacă $f(x_0)^{g(x_0)}$ este bine definită.

Demonstrația este imediată, obținându-se cu ajutorul proprietăților operațiilor cu limite de funcții. O proprietate asemănătoare se poate formula în mod similar pentru funcții continue pe întreg domeniul de definiție.

Exemple. 1. $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \log_2 x$ este continuă, fiind suma a două funcții elementare.

2. $f : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)^x$ este continuă, întrucât $f_1 : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x + 2$, $f_2 : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x$ sunt continue, iar $f_1^{f_2}$ este bine definită.

Continuitatea funcției compuse

S-a observat anterior că operațiile uzuale cu funcții continue au ca rezultat tot funcții continue. Teorema de mai jos exprimă faptul că prin compunerea a două funcții continue se obține tot o funcție continuă.

Teorema 6.5. Fie $u : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ astfel încât u este continuă în x_0 , iar f este continuă în $u(x_0)$. Atunci funcția compusă $f \circ u : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în x_0 .

Demonstrație. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ un șir astfel ca $a_n \in D$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$. Deoarece funcția u este continuă în x_0 , urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} u(a_n) = u(x_0)$, conform teoremei de caracterizare cu șiruri. Deoarece și funcția f este continuă, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u(a_n)) = f(u(x_0))$, de unde concluzia. Cum $(a_n)_{n \geq 0}$ era arbitrar, urmează conform teoremei de caracterizare cu șiruri că $f \circ u$ este continuă în x_0 . ■

Exemplu. Funcția $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ este continuă, deoarece $f = f_1 \circ f_2$, unde $f_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2 : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f_2(x) = x^3 - 1$, sunt continue.

Cum funcția modul este continuă, se poate demonstra că modulul unei funcții continue este tot o funcție continuă, iar maximul, respectiv minimul, a două funcții sunt de asemenea funcții continue.

Teorema 6.6. Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f, g continue în x_0 . Atunci

1. $|f|$ este continuă în x_0 .
2. $\min(f, g)$ și $\max(f, g)$ sunt continue în x_0 .

Demonstrație. 1. Cum $|f|$ reprezintă compunerea funcțiilor continue $|\cdot|$ și f , $|f| = |\cdot| \circ f$, ea este continuă în x_0 .

2. Este cunoscut că

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

Cum $f + g$, $f - g$ sunt continue, reprezentând operații uzuale cu funcții continue, iar $|f - g|$ este de asemenea continuă, conform celor de mai sus, urmează că $\max(f, g)$ și $\min(f, g)$ sunt continue, fiind obținute prin operații uzuale cu funcții continue. ■

6.1.8 Proprietăți locale ale funcțiilor continue

Conform unei proprietăți anterioare, continuitatea unei funcții într-un punct presupune egalitatea între valoarea limitei și valoarea funcției în punct, funcțiile continue moștenind pe această cale proprietățile funcțiilor cu limită.

Mărginirea funcțiilor continue

Teorema 6.7. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ astfel încât f este continuă în x_0 . Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f este mărginită.

Proprietatea de păstrare a semnului

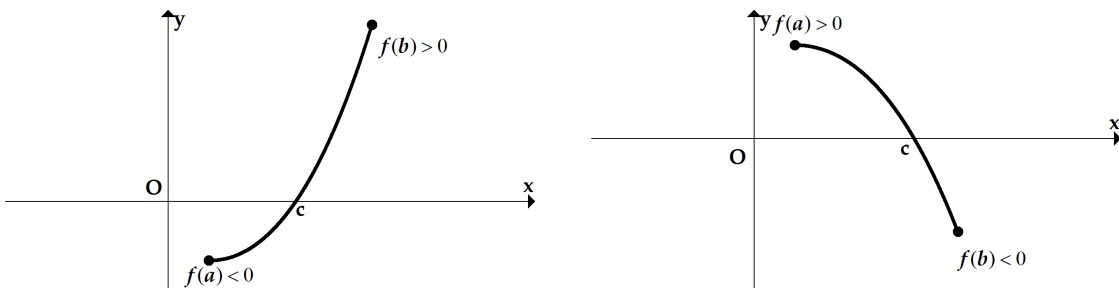
Teorema 6.8. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ astfel încât f este continuă în x_0 , iar $f(x_0) \neq 0$. Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f păstrează semnul lui $f(x_0)$.

6.2 Proprietăți ale funcțiilor continue pe o mulțime

6.2.1 Proprietatea lui Darboux

În cele ce urmează vom demonstra că o proprietate caracteristică a funcțiilor continue este aceea de a nu omite valori. Începem mai întâi prin a demonstra următoarea proprietate, numită *lema lui Bolzano*, ce exprimă faptul că dacă o funcție continuă are valori de semne opuse la capetele unui interval, atunci ea are o rădăcină în interiorul acestui interval.

Teorema 6.9. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, cu proprietatea că $f(a)f(b) < 0$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel ca $f(c) = 0$.



Lema lui Bolzano, demonstrată mai sus, este instrumentală în determinarea aproximativă a rădăcinilor unor ecuații care nu pot fi rezolvate explicit, un exemplu fiind indicat mai jos.

Exercițiu. Demonstrați că ecuația $e^x = 2 \cos x$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(0, \frac{\pi}{3})$.

Soluție. Ecuația $e^x = 2 \cos x$ poate fi pusă sub forma $e^x - 2 \cos x = 0$. Fie atunci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 2 \cos x$. Atunci f este continuă pe \mathbb{R} , iar $f(0) = -1 < 0$, $f(\frac{\pi}{3}) = e^{\frac{\pi}{3}} - 1 > 0$. Cum f ia valori de semne opuse în capetele intervalului $[0, \frac{\pi}{3}]$, există cel puțin o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ în interiorul acestui interval, ceea ce trebuia demonstrat.

Exercițiu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0$ o funcție polinomială de grad impar. Atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină reală.

Soluție. Deoarece f este o funcție polinomială de grad impar, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, de unde, conform definiției limitei, există $x_1 < 0$ astfel ca $f(x_1) < 0$, deoarece într-o vecinătate a lui $-\infty$ valorile funcției f păstrează semnul limitei. Similar, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, de unde există $x_2 > 0$ astfel ca $f(x_2) > 0$. Cum f este continuă, fiind funcție elementară, iar valorile lui f în capetele intervalului $[x_1, x_2]$ au semne opuse, există măcar o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ în interiorul acestui interval.

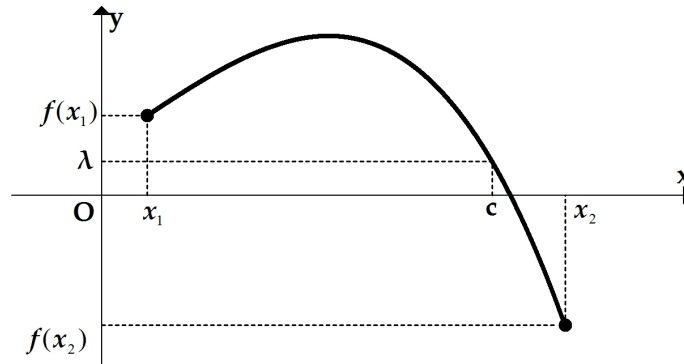
Existența rădăcinilor unor ecuații

Din cele de mai sus se desprinde următorul procedeu general de localizare a rădăcinilor unei ecuații.

Fie o ecuație de forma $f(x) = 0$, unde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe un interval I . Se determină mai întâi două puncte $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, astfel încât $f(x_1)$ și $f(x_2)$ au semne opuse, adică $f(x_1)f(x_2) < 0$. Deoarece f este continuă pe I , rezultă atunci conform lemei lui Bolzano că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f(c) = 0$, adică ecuația $f(x) = 0$ are măcar rădăcina c în intervalul (x_1, x_2) . Dacă $f(x_1)f(x_2) \leq 0$, ecuația $f(x) = 0$ are măcar rădăcina c în intervalul $[x_1, x_2]$. În plus, dacă f este strict monotonă pe intervalul $[x_1, x_2]$ (fiind deci și injectivă pe acest interval), atunci această rădăcină este unică.

Dacă ecuația de rezolvat este prezentată sub forma $f(x) = g(x)$, unde $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continuă pe I , atunci această ecuație se pune mai întâi sub forma $f(x) - g(x) = 0$, aplicându-se apoi considerațiile de mai sus.

Dat un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, vom spune că f are proprietatea lui Darboux pe I , sau a valorii intermediare pe I dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$ astfel ca $x_1 < x_2$ și $f(x_1) \neq f(x_2)$ și orice număr real λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$ există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f(c) = \lambda$.



Altfel spus, o funcție f are proprietatea lui Darboux dacă odată cu două valori arbitrare $f(x_1)$ și $f(x_2)$ aceasta ia pe intervalul (x_1, x_2) și orice valori intermediare situate între $f(x_1)$ și $f(x_2)$ (adică toate valorile din intervalul deschis determinat de $f(x_1)$ și $f(x_2)$). Conform acestei observații, rezultă imediat că funcțiile cu proprietatea lui Darboux transformă intervalele în intervale.

Teorema 6.10. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux pe intervalul $I \subseteq D$. Atunci $f(I)$ este un interval.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$. Atunci $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, dar f nu ia pe intervalul $(0, 1)$ și valoarea intermediară $\frac{1}{2}$, deci f nu are proprietatea lui Darboux pe \mathbb{R} . Alternativ, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$, deci f nu transformă intervalul deschis $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ tot într-un interval, neavând în concluzie proprietatea lui Darboux.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Atunci $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$, deci f nu transformă \mathbb{R} tot într-un interval, neavând în concluzie proprietatea lui Darboux.

I Darboux.

Restrângând în mod potrivit intervalul I de mai sus în jurul unui punct x_0 în care o funcție cu proprietatea lui Darboux are o limită laterală, se obține imediat următorul rezultat.

Teorema 6.11. Fie $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, I_1 fiind un interval pe care f are proprietatea lui Darboux, și fie $x_0 \in I_1$ astfel încât există o limită laterală a lui f în x_0 . Atunci această limită este egală cu $f(x_0)$.

Conform acestei proprietăți, funcțiile cu proprietatea Darboux sunt „aproape continue”, în sensul că nu pot avea decât puncte de discontinuitate de o anumită natură.

Corolar 6.11.1. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea lui Darboux pe intervalul I . Atunci f nu poate avea decât puncte de discontinuitate de specia a doua pe I .

Vom demonstra în cele ce urmează că funcțiile continue pe un interval au proprietatea lui Darboux pe acel interval.

Teorema 6.12. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci f are proprietatea lui Darboux pe I .

Demonstrație. Fie $x_1, x_2 \in I$ astfel ca $x_1 < x_2$ și $f(x_1) \neq f(x_2)$ și fie λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$. Fie deasemenea $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda$.

Atunci g este continuă pe I , iar $g(x_1)g(x_2) = (f(x_1) - \lambda)(f(x_2) - \lambda) < 0$. Conform teoremei Cauchy-Bolzano, există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $g(c) = 0$, de unde $f(c) = \lambda$, iar f are proprietatea lui Darboux pe I . ■

Corolar 6.12.1. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul $I \subseteq D$. Atunci $f(I)$ este un interval.

6.2.2 Funcții uniform continue

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$. Dacă f este continuă în x_0 atunci, conform teoremei de caracterizare cu $\varepsilon - \delta$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon, x_0} > 0$ astfel ca $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon, x_0}$. Așa cum s-a afirmat, $\delta_{\varepsilon, x_0}$ depinde atât de ε , cât și de x_0 , valoarea sa putând să se schimbe după substituirea

lui x_0 cu un alt argument x_1 . Când această valoare nu se schimbă indiferent de valoarea argumentului considerat, f se numește *uniform continuă*.

În acest sens, vom spune că f este *uniform continuă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pentru orice $x, y \in D$ cu proprietatea că $|x - y| < \delta_\varepsilon$.

Definiția de mai sus exprimă faptul că, pentru o funcție uniform continuă, dacă diferența între două argumente x și y este suficient de mică, atunci diferența dintre valorile $f(x)$ și $f(y)$ este de asemenea mică indiferent de locul argumentelor x și y în domeniul de definiție. Din punct de vedere geometric, imaginea oricărui interval cu o lungime mai mică decât δ_ε este tot un interval, cu lungime mai mică decât ε . Desigur, orice funcție uniform continuă pe o mulțime este și continuă pe acea mulțime, definiția uniforme continuități fiind mai restrictivă.

Exemplu. 1. $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este uniform continuă pe $[0, 2]$.

Într-adevăr,

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq 4|x - y|,$$

de unde f este uniform continuă, cu $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$.

2. $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ nu este uniform continuă pe $(0, 1]$. Să presupunem prin reducere la absurd că g este uniform continuă pe $(0, 1]$. Fie atunci $\varepsilon = 1$ și fie $\delta_1, 0 < \delta_1 < 1$, astfel ca $|g(x) - g(y)| < 1$ pentru orice $x, y \in (0, 1]$, $|x - y| < \delta_1$. Pentru $x = \delta_1$, $y = \frac{\delta_1}{2}$, urmează că

$$|x - y| = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1, \quad |g(x) - g(y)| = \frac{1}{\delta_1} > 1,$$

contradicție. Urmează că g nu este uniform continuă pe $(0, 1]$

6.2.3 Funcții Lipschitz. Contractii

Vom preciza în cele ce urmează o categorie specială de funcții uniform continue.

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă există $L > 0$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ pentru orice $x, y \in D$, atunci f se numește *funcție Lipschitz* (sau *funcție lipschitziană*) pe D , L numindu-se *constantă Lipschitz* a funcției f .

Teorema 6.13. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f lipschitziană pe D . Atunci f este uniform continuă pe D .

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și fie $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$, unde L este o constantă Lipschitz a funcției f . Atunci

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

pentru orice $x, y \in D$ cu $|x - y| < \delta_\varepsilon$, deci f este uniform continuă pe D . ■

Teorema de punct fix a lui Banach

Fie $T : D \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că $x_0 \in D$ este un *punct fix* al lui T dacă $T(x_0) = x_0$. De asemenea, vom numi *contracție* o funcție Lipschitz care admite o constantă Lipschitz $L < 1$. În cele ce urmează vom folosi notația simplificată $T(x) = Tx$, iar $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ ori } T}$.

Următoarea teoremă, numită *teorema de punct fix a lui Banach* precizează existența și unicitatea punctului fix al unei contracții a unei mulțimi închise D în ea însăși, precizând și o metodă de obținere a acestui punct fix, lucru care o face utilă în determinarea aproximativă a soluțiilor unor clase largi de ecuații.

Teorema 6.14. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ închisă, iar $T : D \rightarrow D$ o contracție a lui D în ea însăși. Există atunci un unic punct fix al lui T , iar șirul $(T^n x_0)_{n \geq 0}$ este convergent la acest punct fix pentru orice punct inițial $x_0 \in D$.

6.2.4 Funcții continue definite pe intervale închise și mărginite

A fost demonstrat deja că funcțiile continue transformă intervalele în intervale. O precizare ce se poate aduce este că funcțiile continue transformă intervalele închise și mărginite tot în intervale închise și mărginite. Acest lucru este exprimat în următorul rezultat, numit *teorema lui Weierstrass*.

Teorema 6.15. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci f este mărginită și își atinge marginile pe $[a, b]$.

Deși s-a observat mai sus că funcțiile continue nu sunt necesar uniform continue, acestea devin totuși uniform continue atunci când domeniul lor este un interval închis și mărginit.

Teorema 6.16. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă pe $[a, b]$. Atunci f este uniform continuă pe $[a, b]$.

Aplicații

6.1. Precizați un exemplu de funcție $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $|f|$ este continuă fără ca f să fie continuă.

6.2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x^2} - a}{x^2}, & x > 0 \\ 2x^3 - 4x + b, & x \geq 0 \end{cases}$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 0$.

6.3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}, & x \neq 2 \\ ax, & x = 2 \end{cases}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 2$.

6.4. Demonstrați că funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă în $x_0 = 0$.

6.5. Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^p \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Determinați $p \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 0$.

6.6. Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^p \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Determinați $p \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 0$.

6.7. Precizați punctele de discontinuitate ale funcției $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x^2]$ și natura acestora.

6.8. 1. Precizați punctele de discontinuitate ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$ și natura acestora.

2. Demonstrați că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \{x\}(1 - \{x\})$, este continuă pe \mathbb{R} .

6.9. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$. Prelunghiți f prin continuitate în $x_0 = 0$.

6.10. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^2 \sin \frac{1}{x+2}$. Prelunghiți f prin continuitate în $x_0 = -2$.

6.11. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{3^x-3}{x-1}, & x < 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$. Demonstrați că f nu poate fi prelungită prin continuitate în $x_0 = 1$.

6.12. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|f(x) - x| \leq x^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

1. Determinați $f(0)$.
2. Demonstrați că f este continuă în 0.

6.13. 1. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue în $x = 0$ pentru care $f(x) = f(2x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Determinați funcțiile $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continue în $x = 1$ pentru care $f(x) = f(x^2)$ pentru orice $x \in [0, \infty)$.

6.14. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Dacă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$, atunci $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Dacă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
3. Dacă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, rezultă că $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$?

6.15. Fie $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f_1, f_2 continue și fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.
Atunci f este continuă în $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

6.16. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$.

1. Dacă f este continuă în x_0 , iar g este discontinuă în x_0 , atunci $f + g$ este discontinuă în x_0 .
2. Dacă f, g discontinue în x_0 , rezultă că $f + g$ este discontinuă în x_0 ?

6.17. 1. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$, f, g continue în x_0 . Dacă $f(x_0) < g(x_0)$, arătați că există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ cu proprietatea că $f(x) < g(x)$ pentru orice $x \in U \cap D$.

2. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$, f continuă în x_0 . Dacă $m, M \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât $m < f(x_0) < M$, arătați că există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ cu proprietatea că $m < f(x) < M$ pentru orice $x \in U \cap D$.

6.18. Demonstrați că ecuația $3^x(x^3 + 1) - 2 = 0$ are o unică rădăcină în intervalul $(0, 1)$.

6.19. Demonstrați că ecuația $x^5 - 3x^4 - 2x + 1 = 0$ admite cel puțin o rădăcină reală.

6.20. Demonstrați că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci ecuația $x \cos \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{x}$ are măcar o rădăcină în intervalul $(\frac{1}{(2n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi})$.

6.21. 1. Demonstrați că ecuația $x^3 + 2x = 3 + \frac{1}{n}$ are o unică soluție reală x_n pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

6.22. Fie $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, f continuă. Demonstrați că există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$.

6.23. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă. Demonstrați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$.

6.24. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă și fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. Demonstrați că există $c \in [a, b]$ astfel ca $f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$.

6.25. Fie $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + 2, & x \in [-2, -1) \\ x + a, & x \in [-1, 2] \end{cases}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f să aibă proprietatea lui Darboux pe $[-2, 2]$.

6.26. Demonstrați că $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$, este bijectivă.

6.27. Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \cup [2, 3]$, f continuă. Demonstrați că f nu este surjectivă.

6.28. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ este finită. Atunci f este mărginită.

- 6.29.** Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f crescătoare. Demonstrați că $\text{Im } f = [f(a), f(b)]$.
- 6.30.** 1. Folosind eventual inegalitatea $\sin x < x$ pentru $x > 0$, demonstrați că $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$ este uniform continuă pe $[0, \infty)$.
2. Folosind eventual inegalitatea $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ pentru $x, y \geq 0$, demonstrați că $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, este uniform continuă pe $[0, \infty)$.
- 6.31.** 1. Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este uniform continuă pe D , $D_1 \subseteq D$, iar $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ este o restricție a lui f la D_1 , atunci f_1 este uniform continuă pe D_1 .
2. Demonstrați că $f_1 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$, este uniform continuă pe $(0, 1]$.
- 6.32.** 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă. Dacă există limitele $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ și sunt finite, atunci f este uniform continuă pe \mathbb{R} .
2. Demonstrați că $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{arctg } x$, este uniform continuă pe \mathbb{R} .
3. Demonstrați că $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, este uniform continuă pe \mathbb{R} .
- 6.33.** Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și periodică. Atunci f este uniform continuă.
- 6.34.** 1. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă. Dacă există $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0} \subseteq D$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$, atunci f nu este uniform continuă pe D .
2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă. Dacă există $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0} \subseteq (a, b)$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$, atunci f nu este uniform continuă pe (a, b) .
3. Demonstrați că $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, nu este uniform continuă pe $(0, \infty)$.
4. Demonstrați că $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, nu este uniform continuă pe $(0, \infty)$.
5. Demonstrați că $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x$, nu este uniform continuă pe $[0, \infty)$.
- 6.35.** 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f uniform continuă. Folosind eventual criteriul Cauchy-Bolzano, arătați că există limitele $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)$ și sunt finite.

2. *Demonstrați că $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, nu este uniform continuă pe $(0, \frac{\pi}{2})$.*
3. *Demonstrați că $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, nu este uniform continuă pe $(0, \infty)$.*