

Capitolul 4

PROPRIETĂȚI TOPOLOGICE ȘI DE NUMĂRARE ALE LUI $\overline{\mathbb{R}}$

În cele ce urmează, vom studia unele proprietăți ale mulțimilor din $\overline{\mathbb{R}}$. Astfel, vom caracteriza „locul” unui punct în cadrul unei mulțimi (în limba greacă, „topos” înseamnă „loc”) sau „apropierea” unui punct de o mulțime dată, clasificând de asemenea submulțimile lui \mathbb{R} cu un număr infinit de elemente după cum aceste elemente pot fi numărate sau nu.

4.1 Proprietăți topologice ale lui $\overline{\mathbb{R}}$

4.1.1 Puncte de acumulare

Fie o mulțime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește *punct de acumulare* al mulțimii A dacă orice vecinătate V a lui a conține puncte ale lui A diferite de a , adică

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), (V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset.$$

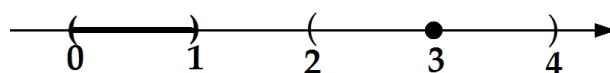
Exemple. 1. $a = 0$ este punct de acumulare al mulțimii $A = (0, 1)$ deoarece orice vecinătate V a lui 0 conține un interval $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, deci și puncte ale lui $(0, 1)$ diferite de 0 . Altfel spus,

$$(V \setminus \{0\}) \cap A \supset (0, \varepsilon) \neq \emptyset.$$



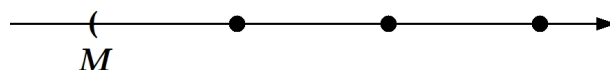
2. $a = 3$ nu este punct de acumulare al mulțimii $A = (0, 1) \cup \{3\}$ deoarece vecinătatea $V = (2, 4)$ a lui 3 nu conține puncte ale lui A diferite de 3. Altfel spus,

$$(V \setminus \{3\}) \cap A = \emptyset.$$



3. $a = +\infty$ este punct de acumulare al mulțimii $A = \mathbb{N}$ deoarece orice vecinătate V a lui $+\infty$ conține un interval $I = (M, +\infty]$, $M > 0$, deci și puncte ale lui \mathbb{N} diferite de $+\infty$. Altfel spus,

$$(V \setminus \{+\infty\}) \cap A = \{[M] + 1, [M] + 2, \dots\} \neq \emptyset.$$



Din exemplele de mai sus se deduc câteva consecințe privind localizarea punctelor de acumulare. Mai întâi, un punct de acumulare al unei mulțimi A poate să nu fie element al acelei mulțimi (exemplul 1). De asemenea, nu orice element al unei mulțimi A este neapărat punct de acumulare al acelei mulțimi (exemplul 2). Din cel de-al treilea exemplu, se poate observa că punctele de acumulare ale unei mulțimi pot fi și la infinit.

Mulțimea tuturor punctelor de acumulare ale mulțimii A se numește atunci *mulțimea derivată* a lui A și se notează A' , în vreme ce un element al unei mulțimi A care nu este punct de acumulare al acelei mulțimi se numește *punct izolat* al lui A . De aici se poate observa că $a \in A$ este punct izolat al lui A dacă există o vecinătate V a lui A care nu conține puncte din A .

Exemple. 1. Dacă $A = (0, 3) \cup \{5\}$, atunci $A' = [0, 3]$, iar 5 este punct izolat al lui A .

2. Dacă $A = \{0, 1, 2\}$, atunci $A' = \emptyset$, toate elementele lui A fiind puncte izolate.
3. Dacă $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, atunci $A' = \{0\}$, toate elementele lui A fiind puncte izolate.

Alegând în mod potrivit în definiția unui punct de acumulare vecinătăți V din ce în ce mai mici se obțin puncte ale lui A diferite de a care sunt din ce în ce mai aproape de a . În acest mod se poate obține următoarea caracterizare echivalentă a unui punct de acumulare cu ajutorul șirurilor, exprimând faptul că o mulțime care are un punct de acumulare a conține elemente „oricât de apropiate” de a și diferite de a .

Teorema 4.1. Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al lui A dacă și numai dacă există un șir $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de elemente ale lui A , diferite de a , cu limita a .

Din cele de mai sus, observând că șirul $\{a_n\}_{n \geq 0}$ poate fi ales cu termenii diferiți între ei, deducem că o mulțime A care are un punct de acumulare a este în mod necesar infinită. În particular, o mulțime finită nu are puncte de acumulare, toate elementele sale fiind deci puncte izolate.

De asemenea, din aceeași observație se obține în mod imediat următorul rezultat.

Corolar 4.1.1. Un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al unei mulțimi $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ dacă și numai dacă orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ conține o infinitate de elemente ale lui A .

Pot fi demonstrate cu ajutorul celor de mai sus următoarele proprietăți de calcul.

Teorema 4.2. Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă $A \subseteq B$, atunci $A' \subseteq B'$.
2. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
3. $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

Faptul că $(A \cap B)'$ și $A' \cap B'$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0, 1)$ și $B = (1, 2)$. Atunci $A' = [0, 1]$ și $B' = [1, 2]$, deci $A' \cap B' = \{1\}$. Totuși, $A \cap B = \emptyset$, deci $(A \cap B)' = \emptyset$, iar $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$.

4.1.2 Puncte aderente

Fie o mulțime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește *punct aderent* al mulțimii A dacă orice vecinătate V a lui a conține puncte ale lui A , adică

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \emptyset.$$

Cum definiția unui punct aderent este mai puțin restrictivă decât definiția unui punct de acumulare (este necesar ca $V \cap A \neq \emptyset$, în loc de $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$, când cea din urmă relație este satisfăcută, fiind satisfăcută în mod evident și cea dintâi), urmează că orice punct de acumulare al unei mulțimi A este în același timp și punct aderent al acelei mulțimi.

De asemenea, deoarece $a \in V$ pentru orice $V \in \mathcal{V}(a)$, urmează că $a \in V \cap A$ pentru orice $a \in A$ și orice $V \in \mathcal{V}(a)$, deci $V \cap A \neq \emptyset$. De aici, orice $a \in A$ este punct aderent al lui A .

Mulțimea tuturor punctelor aderente ale mulțimii A se numește atunci *aderența* sau *închiderea* mulțimii A și se notează \overline{A} . Din cele de mai sus se observă că $A \subseteq \overline{A}$ și $A' \subseteq \overline{A}$.

În mod analog Teoremei 4.1 se poate demonstra următorul rezultat, care afirmă faptul că A conține, pe lângă elementele din A , și limitele de șiruri cu termeni din A .

Teorema 4.3. Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct aderent al lui A dacă și numai dacă există un șir $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de elemente ale lui A , cu limita a .

- Exemple.**
1. Dacă $A = \{0, 1, \dots, n\}$, atunci $\overline{A} = A$.
 2. Dacă $A = (0, 1)$, atunci $\overline{A} = [0, 1]$.
 3. Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$, deoarece orice număr real este limita unui șir de numere raționale, $+\infty$ este limita șirului $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = n \in \mathbb{Q}$, iar $-\infty$ este limita șirului $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = -n \in \mathbb{Q}$.

Cu ajutorul celor de mai sus se pot demonstra următoarele proprietăți de calcul.

Teorema 4.4. Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăți.

1. $\overline{A} = A \cup A'$.
2. Dacă $A \subseteq B$, atunci $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Faptul că $\overline{A \cap B}$ și $\overline{A} \cap \overline{B}$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0, 1)$ și $B = (1, 2)$. Atunci $\overline{A} = [0, 1]$, $\overline{B} = [1, 2]$, deci $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. Totuși, $A \cap B = \emptyset$, deci $\overline{A \cap B} = \emptyset$, iar $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

4.1.3 Puncte interioare

Fie o mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$. Vom spune că $a \in \mathbb{R}$ se numește *punct interior* al mulțimii A dacă A este vecinătate pentru a . Deoarece A este vecinătate pentru a , rezultă că $a \in A$, adică un punct interior al unei mulțimi aparține în mod necesar acelei mulțimi.

Conform definiției vecinătății unui punct, urmează că $a \in \mathbb{R}$ este punct interior al lui A dacă există (c, d) astfel ca $a \in (c, d) \subseteq A$, respectiv $+\infty$ este punct interior lui A dacă există $(c, \infty]$ astfel ca $+\infty \in (c, \infty] \subseteq A$, iar $-\infty$ este punct interior lui A dacă există $[-\infty, d)$ astfel ca $-\infty \in [-\infty, d) \subseteq A$. De asemenea, dacă A nu conține intervale, atunci A nu are puncte interioare, neputând fi vecinătate pentru niciun punct al său. În cele ce urmează, prin „interval deschis I ” vom înțelege un interval de tip (c, d) , $(c, \infty]$ sau $[-\infty, d)$, potrivit cu situația în care este utilizat.

Exemple. 1. $a = \frac{1}{2}$ este punct interior al mulțimii $A = [0, 1) \cup 2$ deoarece $a \in (0, 1) \subseteq A$, dar $a = 0$ și $a = 2$ nu sunt puncte interioare ale lui A , întrucât A nu conține intervale deschise în care se află 0 și 2, neconținând nici numere negative, nici numere mai mari ca 2.

2. $A = \mathbb{Q}$ nu are puncte interioare deoarece nu conține intervale.

Mulțimea tuturor punctelor interioare ale mulțimii A se numește atunci *interiorul* mulțimii A și se notează $\overset{\circ}{A}$.

Teorema 4.5. Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăți.

1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.
2. Dacă $A \subseteq B$, atunci $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.
3. $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
4. $\overset{\circ}{A \cup B} \supseteq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Faptul că $\overset{\circ}{A \cup B}$ și $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0, 1)$ și $B = [1, 2)$. Atunci $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$, $\overset{\circ}{B} = (1, 2)$, deci $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = (0, 1) \cup (1, 2)$. Totuși, $A \cup B = (0, 2)$, deci $\overset{\circ}{A \cup B} = (0, 2)$, iar $\overset{\circ}{A \cup B} \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Un alt tip de legătură între aderența și interiorul unei mulțimi, exprimat cu ajutorul mulțimilor complementare, este precizat în teorema următoare. În cele ce urmează, pentru o mulțime M dată, prin cM se va înțelege complementara mulțimii M în raport cu $\overline{\mathbb{R}}$, adică mulțimea $\overline{\mathbb{R}} \setminus M$. De asemenea, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se va numi *punct exterior* al mulțimii M dacă cM este vecinătate pentru a .

Teorema 4.6. Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc egalitățile

1. $c\overline{A} = \overset{\circ}{cA}$;
2. $\overset{\circ}{cA} = \overline{cA}$.

Corolar 4.6.1. Fie $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc egalitățile

1. $\overline{B} = c(\overset{\circ}{cB})$;
2. $\overset{\circ}{B} = c(\overline{cB})$.

Demonstrație. Demonstrațiile celor două egalități se obțin în mod imediat punând $B = cA$ în Teorema 4.6, ținând seama că $c(cB) = B$. ■

4.1.4 Puncte de frontieră

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește *punct de frontieră* al lui A dacă $a \in \overline{A} \cap \overline{cA}$.

Din definiția de mai sus se observă că un punct $a \in \mathbb{R}$ este punct de frontieră al lui A dacă este limita atât a unui șir de elemente din A cât și a unui șir de elemente din cA , adică există două șiruri $(a_n)_{n \geq 0} \subseteq A$ și $(b_n)_{n \geq 0} \subseteq cA$ astfel ca $a_n \rightarrow a$ și $b_n \rightarrow a$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Mulțimea tuturor punctelor de frontieră ale lui A se numește atunci *frontiera* lui A și se notează $\text{Fr } A$ sau ∂A .

Are loc de asemenea următoarea proprietate de calcul, utilă în determinarea frontierei unei mulțimi.

Teorema 4.7. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Atunci $\text{Fr } A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Demonstrație. Au loc relațiile

$$\text{Fr } A = \overline{A} \cap \overline{cA} = \overline{A} \cap c\overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A},$$

de unde concluzia. ■

Exemple. 1. Dacă $A = (0, 1)$, atunci $\overline{A} = [0, 1]$, $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$, deci $\text{Fr } A = \{0, 1\}$.

2. Dacă $A = \{1, 2, \dots, n\}$, atunci $\overline{A} = A$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ (deoarece A nu conține intervale), deci $\text{Fr } A = A$.

3. Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $\overline{A} = \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, deci $\text{Fr } A = \mathbb{R}$.

4.1.5 Mulțimi deschise, mulțimi închise, mulțimi compacte

Mulțimi deschise

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Vom spune că A este *deschisă* dacă este mulțimea vidă sau este vecinătate pentru orice punct al său.

Exemple. 1. Dacă $A = (0, 1)$, atunci ea este deschisă, fiind vecinătate pentru orice $a \in (0, 1)$.

2. Dacă $A = [0, 2)$, atunci A nu este deschisă, întrucât ea nu este vecinătate pentru $a = 0$.

3. Dacă $A = \mathbb{N}$, atunci A nu este deschisă, întrucât ea nu este vecinătate pentru niciun punct al său, neconținând intervale.
4. Dacă $A = \emptyset$, ea este deschisă prin definiție. Dacă $A = \mathbb{R}$, atunci pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \in (a-1, a+1) \subseteq \mathbb{R}$, deci \mathbb{R} este vecinătate pentru a . Cum a este arbitrar, \mathbb{R} este deschisă. Dacă $A = \overline{\mathbb{R}}$, la observația anterioară se adaugă faptul că $+\infty \in (0, \infty) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, iar $-\infty \in [-\infty, 0) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, deci $\overline{\mathbb{R}}$ este de asemenea deschisă.

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a mulțimilor deschise prin intermediul interiorului acestora.

Teorema 4.8. Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este deschisă dacă și numai dacă $A = \overset{\circ}{A}$.

În particular, din rezultatul de mai sus se obține ușor faptul că $I_1 = (c, d)$, $I_2 = (c, +\infty)$, $I_3 = (c, +\infty]$, $I_4 = [-\infty, d]$ și $I_5 = (-\infty, d)$ sunt mulțimi deschise pentru orice $c, d \in \mathbb{R}$.

Se va observa în cele ce urmează că interiorul unei mulțimi A este mulțime deschisă și este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în A , în sensul că oricare altă mulțime deschisă inclusă în A este conținută în $\overset{\circ}{A}$.

Teorema 4.9. Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\overset{\circ}{A}$ este o mulțime deschisă, iar $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$. Mai mult, dacă $B \subseteq A$ este o altă mulțime deschisă, atunci $B \subseteq \overset{\circ}{A}$.

Operații cu mulțimi deschise

Teorema 4.10. Au loc următoarele proprietăți.

1. Orice reuniune de mulțimi deschise este mulțime deschisă.
2. Orice intersecție finită de mulțimi deschise este mulțime deschisă.

Se poate observa că o intersecție infinită de mulțimi deschise nu este neapărat mulțime deschisă. În acest sens, să considerăm $(A_i)_{i \geq 1} : A_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$. Atunci A_i este deschisă pentru orice $i \geq 1$, dar $\bigcap_{i \geq 1} A_i = \{0\}$, care nu este mulțime deschisă.

Exemplu. $A = (0, 1) \cup (2, 4)$ este deschisă, ca reuniune a mulțimilor deschise $(0, 1)$ și $(2, 4)$.

Mulțimi închise

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Vom spune că A este *închisă* dacă cA este deschisă.

Se poate observa imediat că are loc următoarea teoremă de caracterizare a mulțimilor închise prin intermediul aderenței acestora.

Teorema 4.11. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Atunci A este închisă dacă și numai dacă $A = \bar{A}$.

Demonstrație. Au loc următoarele echivalențe

$$A \text{ închisă} \Leftrightarrow cA \text{ deschisă} \Leftrightarrow cA = \overset{\circ}{cA} \Leftrightarrow cA = c\bar{A} \Leftrightarrow A = \bar{A}. \quad \blacksquare$$

Din teorema de mai sus și din teorema de caracterizare a mulțimilor închise cu ajutorul limitelor de șiruri (Teorema 4.3) se poate observa că $A \subseteq \mathbb{R}$ este închisă dacă și numai dacă ea conține limitele tuturor șirurilor cu elemente din A .

Exemple. 1. $A = [0, 1]$ este mulțime închisă, deoarece $\bar{A} = A$. Altfel, $cA = [-\infty, 0) \cup (0, \infty]$, care este mulțime deschisă, fiind reuniunea mulțimilor deschise $[-\infty, 0)$ și $(0, \infty]$.

2. $A = \mathbb{R}$ nu este mulțime închisă, deoarece $\bar{A} = \overline{\mathbb{R}} \neq A$. Altfel, A nu conține $+\infty$, care este limita șirului $(x_n)_{n \geq 0} : x_n = n$ cu elemente din A .

3. $A = (-\infty, 0]$ nu este mulțime închisă, deoarece $cA = \{-\infty\} \cup (0, \infty]$, care nu este mulțime deschisă, întrucât nu este vecinătate a lui $+\infty$. Altfel, $\bar{A} = [-\infty, 0] \neq A$, sau A nu conține $-\infty$, care este limita șirului $(x_n)_{n \geq 0} : x_n = -n$ cu elemente din A .

4. \emptyset este mulțime închisă deoarece $c\emptyset = \overline{\mathbb{R}}$, care este mulțime deschisă. De asemenea, $\overline{\mathbb{R}}$ este mulțime închisă, deoarece $c\overline{\mathbb{R}} = \emptyset$, care este mulțime deschisă.

Din exemplele de mai sus se poate observa că \emptyset și $\overline{\mathbb{R}}$ sunt atât mulțimi deschise, cât și închise. Se poate demonstra că aceste mulțimi sunt singurele care au simultan cele două proprietăți.

Prin analogie cu Teorema 4.9, se va observa că aderența unei mulțimi date A este mulțime închisă și este cea mai mică mulțime închisă care include pe A , în sensul că oricare altă mulțime închisă care include pe A , conține și \bar{A} .

Teorema 4.12. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Atunci \bar{A} este o mulțime închisă, iar $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$. Mai mult, dacă $B \supset A$ este o altă mulțime închisă, atunci $B \supset \bar{A}$.

Operații cu mulțimi închise

Teorema 4.13. Au loc următoarele proprietăți.

1. Orice reuniune finită de mulțimi închise este mulțime închisă.
2. Orice intersecție de mulțimi închise este mulțime închisă.

Se poate observa că o reuniune infinită de mulțimi închise nu este neapărat mulțime închisă. În acest sens, să considerăm $(A_i)_{i \geq 0} : A_i = [-i, i]$. Atunci A_i este închisă pentru orice $i \geq 0$, dar $\bigcup_{i \geq 0} A_i = \mathbb{R}$, care nu este mulțime închisă.

Exemplu. $A = [-1, 2] \cup [4, 5]$ este închisă, ca reuniune a mulțimilor închise $[-1, 2]$ și $[4, 5]$.

Mulțimi compacte

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Vom spune că A este *compactă* dacă este închisă și mărginită.

- Exemple.**
1. $A = [0, 1]$ este compactă, fiind închisă și mărginită.
 2. $A = [0, 2] \cup [4, 6]$ este compactă, fiind închisă (ca reuniune finită de mulțimi închise) și mărginită.
 3. $A = [0, \infty]$ nu este compactă, nefiind mărginită.
 4. $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ nu este compactă, nefiind închisă, deoarece limita șirului $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ este 0, element neconținut în mulțimea A .

Operații cu mulțimi compacte

Teorema 4.14. *Au loc următoarele proprietăți.*

1. *Orice reuniune finită de mulțimi compacte este mulțime compactă.*
2. *Orice intersecție de mulțimi compacte este mulțime compactă.*

Teorema 4.15. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Atunci A este compactă dacă și numai dacă din orice șir de elemente din A se poate extrage un subșir convergent la un element din A .*

Mulțimi dense

Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Vom spune că A este *densă în B* dacă orice element al lui B este limita unui șir cu elemente din A , adică $B \subseteq \overline{A}$. Dacă $B = \mathbb{R}$, adică orice element al lui \mathbb{R} este limita unui șir cu elemente din A , atunci A se numește *densă*.

Din definiția de mai sus, se observă că dacă A este densă, atunci $\overline{A} = \mathbb{R}$. Într-adevăr, conform definiției, $\mathbb{R} \subseteq \overline{A}$, iar cum $\overline{A} \subseteq \mathbb{R}$, urmează că $\overline{A} = \mathbb{R}$. De asemenea, pentru a se demonstra că A este densă este suficient să se arate că $\overline{A} \supset \mathbb{R}$. În acest sens, dacă $\overline{A} \supset \mathbb{R}$, atunci $\overline{\overline{A}} \supset \mathbb{R}$, iar cum $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, urmează că $\overline{A} \supset \mathbb{R}$.

Exemple. 1. \mathbb{Q} este densă, deoarece orice număr real este limita unui șir de numere raționale.

2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este de asemenea densă, deoarece orice număr real este limita unui șir de numere iraționale. Altfel,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} &= \overline{\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\})} = \overline{c(\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\})} \\ &= c\overline{\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}} = c\emptyset = \mathbb{R}, \end{aligned}$$

deci $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este densă. S-a folosit faptul că $\overline{\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}} = \emptyset$, deoarece $\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$ nu conține intervale.

3. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ este densă în $[0, 1]$, deoarece $\overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{[0, 1]} = \mathbb{R} \cap [0, 1] = [0, 1]$.

4. $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ nu este densă în $[0, 1]$, deoarece $\bar{A} = A \cup \{0\} \not\subseteq [0, 1]$.

Denumirea de mulțime densă este justificată de următoarea teoremă, care afirmă faptul că pentru oricare două numere reale date, o mulțime densă conține măcar un element situat între acestea.

Teorema 4.16. Fie $A \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Atunci A este densă dacă și numai dacă pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, există $a \in A$ astfel ca $x < a < y$.

Exemple. 1. \mathbb{Z} nu este densă, deoarece nu conține niciun punct situat între 0 și 1.

2. $(\mathbb{Q} \cap (-\infty, -1]) \cup (\mathbb{Q} \cap [1, \infty))$ nu este densă, deoarece nu conține niciun punct situat între -1 și 1 .

4.2 Proprietăți de numărare ale lui $\bar{\mathbb{R}}$

4.2.1 Numere cardinale

Fie $A, B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Vom spune că A, B au același cardinal și vom nota $A \sim B$ dacă există o funcție bijectivă $f : A \rightarrow B$. Se observă că relația „ \sim ” astfel definită între mulțimi este relație de echivalență, întrucât este

1. reflexivă, deoarece $A \sim A$, cu $f : A \rightarrow A$, $f(x) = x$.
2. simetrică, deoarece dacă $A \sim B$, cu $f : A \rightarrow B$ bijectivă, atunci și $B \sim A$, cu $f^{-1} : B \rightarrow A$ bijectivă.
3. tranzitivă, deoarece dacă $A \sim B$, cu $f : A \rightarrow B$ bijectivă, iar $B \sim C$, cu $g : B \rightarrow C$ bijectivă, atunci $A \sim C$, cu $g \circ f : A \rightarrow C$ bijectivă.

Mulțimi finite

O mulțime A va fi numită *finită* dacă este mulțimea vidă (și atunci are cardinal 0, sau are 0 elemente) sau are același cardinal cu $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ pentru un $n \in \mathbb{N}$ oarecare (și atunci se spune că are cardinal n , sau are n elemente).

4.2.2 Mulțimi numărabile

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *numărabilă* dacă există o funcție bijectivă $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. În această situație, cardinalul mulțimii A se va nota cu \aleph_0 (alef zero). O mulțime care nu este numărabilă se va numi *nenumerabilă*.

Dacă notăm $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, atunci se observă că A este numărabilă dacă elementele sale pot fi puse sub forma unui șir cu termeni distincți, anume

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}.$$

O mulțime A se va numi *cel mult numărabilă* dacă este finită sau numărabilă. Se observă atunci că A este cel mult numărabilă dacă și numai dacă există o funcție injectivă $f : A \rightarrow \mathbb{N}$.

Exemple. 1. $A = \mathbb{N}$ este numărabilă. În acest caz, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n$ este funcția căutată. Altfel, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, elementele sale putând fi puse sub forma unui șir cu termeni distincți.

2. $A = \mathbb{Z}$ este numărabilă, deoarece $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$, elementele sale putând fi puse sub forma unui șir cu termeni distincți. Altfel,

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}.$$

este bijectivă.

Din Exemplul 2, în care s-a construit o funcție bijectivă $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, se observă că o mulțime infinită poate avea același cardinal ca și o submulțime proprie a sa. De asemenea,

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), \quad f_1(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{dacă } x \in [0, \infty) \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

sunt bijective, deci \mathbb{R} , $(0, \infty)$ și $(-1, 1)$ au același cardinal. De fapt, toate intervalele deschise (a, b) au același cardinal, întrucât au același cardinal cu $(-1, 1)$, acest lucru observându-se din faptul că

$$f_3 : (a, b) \rightarrow (-1, 1), \quad f_3(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}$$

este bijectivă. Similar, intervalele (a, ∞) au același cardinal cu $(0, \infty)$ întrucât

$$f_4 : (a, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad f_4(x) = x - a$$

este bijectivă, iar intervalele $(-\infty, b)$ au același cardinal cu $(-\infty, 0)$ întrucât

$$f_5 : (-\infty, b) \rightarrow (-\infty, 0), \quad f_5(x) = x - b$$

este bijectivă. Cum $(0, \infty)$ și $(-\infty, 0)$ au același cardinal, întrucât

$$f_6 : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0), \quad f_6(x) = -x$$

este bijectivă, urmează că mulțimile \mathbb{R} , (a, ∞) , $(-\infty, b)$, (a, b) au același cardinal pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$. Vom demonstra ulterior că aceste mulțimi nu sunt numărabile.

Operații cu mulțimi numărabile

Se poate observa că o reuniune finită de mulțimi numărabile este numărabilă. În acest sens, fie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ o familie finită de mulțimi numărabile. Atunci A_i poate fi pusă sub forma unui șir cu termeni distincți, $A_i = \{a_0^i, a_1^i, a_2^i, \dots\}$ pentru orice $1 \leq i \leq n$. De aici,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{a_0^1, a_0^2, \dots, a_0^n, a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n, \dots\}.$$

Eliminând eventualele repetări, elementele mulțimii $\bigcup_{i=1}^n A_i$ pot fi scrise sub forma unui șir cu termeni distincți, iar $\bigcup_{i=1}^n A_i$ este numărabilă. Cu un raționament asemănător, se poate demonstra că dacă F este finită iar A este numărabilă, atunci $A \cup F$ este numărabilă. De asemenea, dacă A este numărabilă, atunci orice submulțime a sa este finită sau numărabilă.

Vom studia acum situația în care se face reuniunea unei familii numărabile de mulțimi numărabile.

Teorema 4.17. Fie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ o familie de mulțimi numărabile. Atunci $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ este numărabilă.

Cu ajutorul acestei teoreme se poate demonstra că mulțimea numerelor raționale este numărabilă.

Teorema 4.18. \mathbb{Q} este numărabilă.

4.2.3 Mulțimi de puterea continuului

Vom demonstra în cele ce urmează că intervalul $[0, 1]$ „are mai multe elemente” decât \mathbb{Q} , proprietate care nu este evidentă intuitiv, în sensul că elementele lui \mathbb{Q} se pot număra, iar elementele lui $[0, 1]$ nu, deși este evident că ambele mulțimi au un număr infinit de elemente.

Teorema 4.19. Intervalul $[0, 1]$ nu este o mulțime numărabilă.

Demonstrație. Presupunem prin reducere la absurd că $[0, 1]$ este o mulțime numărabilă. Atunci

$$[0, 1] = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\},$$

intervalul $[0, 1]$ putându-se pune sub forma unui șir cu termeni distincți.

Notăm $I_0 = [0, 1]$ și împărțim acest interval în subintervalele $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ de lungimi egale; fie I_1 un interval dintre acestea care nu-l conține pe x_0 . Împărțim acum I_1 în trei subintervale de lungimi egale și fie I_2 un interval dintre acestea care nu-l conține pe x_1 . Procedând în mod inductiv, obținem un șir de intervale $(I_n)_{n \geq 0}$, $I_n = [a_n, b_n]$, $b_n - a_n = \frac{1}{3^n}$, astfel ca

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \dots \supset I_n \supset \dots$$

și I_n nu conține x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Șirul de intervale $(I_n)_{n \geq 0}$ este descrescător, cu lungimea tinzând la 0, intersecția tuturor intervalelor fiind un punct.

Urmează că $\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{x\}$, iar cum $x \in [0, 1]$, $x = x_{n_0}$ pentru $n_0 \in \mathbb{N}$ oarecare, ceea ce este o contradicție, deoarece atunci $x \notin I_{n_0+1}$, deci $x \notin \bigcap_{n \geq 0} I_n$. ■

Vom nota cardinalul intervalului $[0, 1]$ cu c (*puterea continuului*), înțelegând că o mulțime cu cardinal c „are mai multe elemente” decât o mulțime numărabilă, de cardinal \aleph_0 . Cum

$$f : [0, 1] \rightarrow (0, 1), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0, \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \\ x, & \text{în rest} \end{cases}$$

este bijectivă, urmează că $[0, 1]$ și $(0, 1)$ au același cardinal. Cu ajutorul unei construcții similare se poate demonstra că $[0, 1]$ și $[0, 1)$ au același cardinal. Din considerațiile enunțate anterior se deduce că atât mulțimea \mathbb{R} cât și toate intervalele $[a, b]$, (a, b) , $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $[a, \infty)$, (a, ∞) au același cardinal c .

Din cele ce urmează se va observa că numerele iraționale, fiind în număr mai mare decât cele raționale, sunt „responsabile” pentru faptul că mulțimea numerelor reale nu este numărabilă.

Corolar 4.19.1. *Mulțimea I a numerelor iraționale nu este numărabilă.*

Demonstrație. Presupunem prin reducere la absurd că I este numărabilă. Atunci, deoarece $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$, urmează că \mathbb{R} este numărabilă, ca reuniunea unui număr finit de mulțimi numărabile, contradicție. ■

Aplicații

4.1. *Precizați interiorul următoarelor mulțimi:*

$A_1 = (0, 1) \cup [2, 3]$; $A_2 = [0, 2) \cup (4, 5] \cup \{6\}$; $A_3 = [2, \infty)$; $A_4 = [-\infty, 5]$;
 $A_5 = \mathbb{Q} \cap [1, 2]$; $A_6 = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [2, 3]$; $A_7 = \{x \in \mathbb{R}; 4 \leq x < 8\}$; $A_8 = \mathbb{R}^*$;
 $A_9 = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$.

4.2. *Precizați mulțimea derivată și aderența următoarelor mulțimi:*

$A_1 = (0, 1) \cup (1, 2)$; $A_2 = (1, 2) \cup (3, 4) \cup \{7\}$; $A_3 = \mathbb{N}$; $A_4 = (2, \infty)$;
 $A_5 = \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$; $A_6 = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, 2)$; $A_7 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\}$; $A_8 = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots\}$.

4.3. *Fie $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{6\}$. Determinați A' , \bar{A} , $\overset{\circ}{A}$, $\text{Fr } A$. Este A deschisă? Dar închisă sau compactă?*

4.4. *Demonstrați că $A = \bigcup_{i \geq 0} (\frac{2i+1}{i+1}, \frac{2i+3}{i+1})$ este mulțime deschisă.*

4.5. *Demonstrați că $A = \bigcap_{i=1}^{10} [\frac{2n+1}{n+1}, \frac{3n+5}{n+2}]$ este mulțime închisă.*

4.6. *Precizați dacă următoarele mulțimi sunt dense în mulțimile precizate:*

$A_1 = \mathbb{Z}$ în $B_1 = \mathbb{R}$; $A_2 = \mathbb{N}$ în $B_2 = \mathbb{Z}$; $A_3 = [0, 1]$ în $B_3 = [-1, 2]$; $A_4 = \mathbb{Q}^*$ în $B_4 = \mathbb{R}$; $A_5 = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ în $B_5 = [0, 10]$; $A_6 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\}$ în $B_6 = [0, 1]$.

4.7. *Precizați care dintre următoarele mulțimi sunt numărabile:*

$$A_1 = [0, 1) \cup (2, 3]; \quad A_2 = 2\mathbb{Z} = \{x; x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}; \quad A_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}; \quad A_4 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}; \quad A_5 = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}; \quad A_6 = \mathbb{R}^n; \quad A_7 = \mathbb{Q}^n.$$