

Capitolul 3

SERII NUMERICE

Date fiind numerele reale x_0, x_1, \dots, x_n , în număr finit, suma lor $x_0 + x_1 + \dots + x_n$ se poate calcula fără dificultate, după regulile uzuale. Extinderea noțiunii de sumă pentru mulțimi infinite de numere nu este însă la fel de imediată. Acest lucru se poate observa încercând să se calculeze suma

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) + \dots$$

(termenii sumei sunt, alternativ, 1 și -1). Gruparea în modul

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots + (1 + (-1)) + \dots,$$

în care suma termenilor din fiecare grup este 0, poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 0. De asemenea, gruparea în modul

$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \dots + ((-1) + 1) + \dots,$$

poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 1; desigur, asocierea a două valori distincte pentru o aceeași sumă de numere reale reprezintă o situație inacceptabilă. În special, din cele de mai sus se observă faptul că în cazul adunării unui număr infinit de numere reale nu are neapărat loc proprietatea de asociativitate.

În lipsa proprietății de asociativitate, singura posibilitate de calcul a unei sume infinite rămâne de a aduna termenii din sumă unul câte unul. În concluzie, pentru a calcula o sumă de forma

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

vom determina

$$S_0 = x_0, \quad S_1 = x_0 + x_1, \quad S_2 = x_0 + x_1 + x_2, \dots,$$

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n, \dots$$

și vom încerca să extragem informații despre comportarea șirului $(S_n)_{n \geq 0}$, utilizând aceste informații pentru determinarea sumei.

Numim atunci *serie numerică de termen general* x_n (sau, mai simplu, *serie de termen general* x_n) cuplul $((x_n)_{n \geq 0}, (S_n)_{n \geq 0})$ format din șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ al termenilor seriei și șirul $(S_n)_{n \geq 0}$ al sumelor parțiale, definit după regula

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

În această situație, x_n se va numi și *termenul de rang* n sau *indice* n al seriei. Vom nota o serie de termen general x_n prin

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots,$$

sau, sub formă prescurtată, prin

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Dacă primii k termeni x_0, x_1, \dots, x_{k-1} nu sunt definiți, vom nota seria de termen general x_n prin

$$x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n + \dots,$$

respectiv prin

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n.$$

Notățiile de mai sus sugerează și denumirea de „sumă infinită” pentru o serie, deși, conform exemplului anterior, sumele infinite de numere reale nu au neapărat aceleași proprietăți ca și sumele finite de numere reale, această denumire nefiind deci întrutotul justificată.

Serii convergente, serii divergente

Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este *convergentă* dacă șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este convergent, respectiv că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este *divergentă* dacă șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este divergent. Dacă șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ are limită, atunci

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$ se va numi *suma* seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Seriilor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ nu are limită nu li se asociază nicio sumă.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Termenul general al acestei serii este $x_n = \frac{1}{2^n}$. Sub formă desfășurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Deoarece

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, iar suma sa este 2.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} n$. Termenul general al acestei serii este $x_n = n$. Sub formă desfășurată, seria se poate scrie în modul următor

$$0 + 1 + 2 + \dots + n + \dots$$

Deoarece

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} n$ este divergentă, iar suma sa este $+\infty$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Termenul general al acestei serii este $x_n =$

$(-1)^n$. Sub formă desfășurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) + \dots$$

Deoarece

$$S_{2n} = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots + (1 + (-1)) + 1 = 1,$$

iar

$$S_{2n+1} = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) = 0,$$

urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = 0,$$

deci nu există $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ este divergentă, suma sa nepu-
tând fi definită.

În cele ce urmează, vom preciza condiții pentru a stabili dacă o serie dată este sau nu convergentă, acolo unde este posibil determinându-se explicit și suma seriei.

Sume calculabile exact

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

Termenul general al acestei serii este $x_n = q^n$. Dacă $q \neq 1$, atunci

$$S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

în vreme ce dacă $q = 1$, atunci $S_n = n + 1$.

Urmează atunci că seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă pentru $q \in (-1, 1)$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$ pentru $q \in (-1, 1)$. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

De asemenea, pentru $q = 1$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) =$

$+\infty$, iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q = 1.$$

Dacă $q \in (1, +\infty)$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = +\infty$ pentru $q \in (1, \infty)$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q \in (1, +\infty).$$

Dacă $q \in (-\infty, -1]$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nu există, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}$ nu există pentru $q \in (-\infty, -1]$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă, acestei serii neputându-i-se asocia o sumă.

Discuția de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{nu este definită,} & \text{dacă } q \leq -1 \\ \frac{1}{1-q}, & \text{dacă } q \in (-1, 1). \\ +\infty, & \text{dacă } q \geq 1 \end{cases}$$

Exemplu. Fie suma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n}$. Atunci termenul general al acestei serii este

$$x_n = \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \left(\frac{(-1)2^3}{9} \right)^n = \left(-\frac{8}{9} \right)^n,$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{8}{9} \right)^n = \frac{1}{1 - (-\frac{8}{9})} = \frac{9}{17}.$$

Serii telescopice

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie telescopică* dacă există șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, astfel ca

$$x_n = a_n - a_{n+1} \text{ pentru orice } n \geq 0,$$

adică există un șir pentru care termenul general al seriei se poate scrie ca diferența a doi termeni consecutivi ai acestui șir, primul cu același indice ca și indicele termenului general al seriei. În această situație,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_0 - a_{n+1}, \end{aligned}$$

de unde seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent.

În această ultimă situație,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 - a_{n+1}) = a_0 - l,$$

unde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Atunci termenul general al sumei este $x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Observăm că

$$x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$. Atunci termenul general al sumei

este $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$. Observăm că

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})} \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ &= \sqrt{n+2} - 1, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - 1) = +\infty.$$

Proprietăți generale ale seriilor

Eliminarea termenilor

În Capitolul 2, a fost observat că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai unui șir nu-i modifică acestuia proprietatea de a avea sau nu avea limită. Cum convergența unei serii este definită prin intermediul șirului sumelor parțiale, este natural ca nici eliminarea unui număr finit de termeni ai unei serii date să nu modifice natura acesteia. Prin „natură” înțelegem aici proprietatea unei serii de a fi convergentă sau divergentă, iar prin serii „cu aceeași natură” înțelegem două serii care sunt ambele convergente sau ambele divergente.

Teorema 3.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă se adaugă sau se elimină un număr finit de termeni, atunci seria obținută are aceeași natură cu seria inițială, putându-se modifica în schimb suma sa, dacă seria este convergentă. Dacă suma seriei este $+\infty$ sau $-\infty$, aceasta nu se modifică.

Comutativitate (Schimbarea ordinii termenilor)

Este cunoscut că o sumă finită are proprietatea de comutativitate, în sensul că valoarea sumei rămâne aceeași după orice schimbare a ordinii termenilor. Cu

anumite precauții (schimbarea ordinii va afecta doar un număr finit de termeni), această proprietate rămâne valabilă și pentru serii.

Teorema 3.2. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni, atunci seria obținută are aceeași natură cu seria inițială și aceeași sumă.

Proprietăți generale ale seriilor convergente

Asociativitate

S-a observat deja că pentru cazul seriei divergente $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ asocierea termenilor cu ajutorul parantezelor conduce la mai multe valori posibile ale sumei sale. Totuși, se poate demonstra că prin gruparea termenilor unei serii convergente cu ajutorul parantezelor se obține tot o serie convergentă, cu aceeași sumă ca și seria inițială.

Teorema 3.3. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă. Asocierea termenilor săi cu ajutorul parantezelor conduce la o serie convergentă, cu aceeași sumă ca și seria inițială.

Restul de ordin p

Dată fiind seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, vom numi *rest de ordin p* al acesteia seria

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots,$$

obținută din seria inițială prin eliminarea termenilor x_0, x_1, \dots, x_p , cu indici mai mici sau egali cu p . Se observă atunci că

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S_p + R_p, \quad \text{pentru orice } p \geq 0,$$

unde $(S_n)_{n \geq 0}$ este șirul sumelor parțiale asociat seriei date. Din acest motiv, dacă seria dată este convergentă, atunci șirul sumelor parțiale tinde la suma seriei, iar șirul resturilor tinde la 0, conform formulei de mai sus. Mai precis, are loc următorul rezultat.

Teorema 3.4. *Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă R_p , restul de ordin p , este o serie convergentă pentru orice $p \in \mathbb{N}$. În plus, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{p \rightarrow \infty} R_p = 0$.*

Criteriul de convergență Cauchy

A fost deja demonstrat în Capitolul 2 că un șir este convergent dacă și numai dacă este șir fundamental (Cauchy). De aici, o serie dată este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor sale parțiale este șir Cauchy. Acest lucru se reflectă în următorul rezultat.

Teorema 3.5. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| \leq \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \geq 0.$$

Demonstrație. Fie $(S_n)_{n \geq 0}$ șirul sumelor parțiale asociate seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Atunci

$$|S_{n+p} - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}|, \quad \text{pentru orice } n, p \geq 0.$$

Cum $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $(S_n)_{n \geq 0}$ este șir fundamental, adică dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \geq 0,$$

rezultă concluzia. ■

Divergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

A fost demonstrat în Capitolul 2 că șirul

$$(S_n)_{n \geq 1} : x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

nu este șir Cauchy. Cum acesta este șirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. Seria de mai sus se numește și *seria armonică*, întrucât fiecare termen al seriei este media armonică a termenilor care-l înconjoară, adică $\frac{1}{n} = \frac{2}{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}}$ pentru orice $n > 1$.

Limita termenului general

Teorema 3.6. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Demonstrație. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă, cu suma l . Deoarece

$$x_n = S_n - S_{n-1} \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = l$, urmează concluzia. ■

Se observă de aici că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nu există, sau există și nu este 0, atunci seria dată nu este convergentă. Se obține deci următorul rezultat.

Corolar 3.6.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nu există, sau există și nu este 0, atunci seria dată este divergentă.

Exercițiu. Demonstrați că următoarele serii sunt divergente:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n + \frac{1}{n}}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}.$$

Soluție. Putem calcula limita termenului general în fiecare dintre aceste cazuri. Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{3n + \frac{1}{n}}{2n}} = e^{\frac{3}{2}} \neq 0,$$

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n + \frac{1}{n}}$ este divergentă. Se observă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(\frac{2^n}{5^n} + 1\right)}{5^{n+1} \left(\frac{2^{n+1}}{5^{n+1}} + 1\right)} = \frac{1}{5} \neq 0,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}$ este divergentă. De asemenea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} = +\infty \neq 0,$$

deci și seria $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}$ este divergentă.

Se poate observa de asemenea faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ nu este o condiție suficientă pentru convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (fiind doar necesară). În acest sens, se poate observa că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, dar totuși seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Mărginirea șirului sumelor parțiale

Teorema 3.7. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă. Atunci șirul $(S_n)_{n \geq 0}$ al sumelor parțiale asociate seriei este mărginit.

Demonstrație. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă și fie $(S_n)_{n \geq 0}$ șirul sumelor parțiale asociate seriei. Cum $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, urmează că $(S_n)_{n \geq 0}$ este convergent, iar cum orice șir convergent este mărginit, urmează că $(S_n)_{n \geq 0}$ este mărginit. ■

Reciproc, dacă șirul sumelor parțiale asociate unei serii date este nemărginit, atunci seria este divergentă. Se obține deci următorul rezultat.

Corolar 3.7.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată și fie $(S_n)_{n \geq 0}$ șirul sumelor parțiale asociate seriei.

Dacă $(S_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Exercițiu. Demonstrați că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ este divergentă.

Soluție. Are loc estimarea

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}.$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = +\infty$, urmează că $(S_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit, și atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ este divergentă.

Operații cu serii convergente

Întrucât, așa cum s-a menționat anterior, convergența unei serii se definește prin intermediul convergenței șirului sumelor sale parțiale, se va observa că proprietatea unor serii de a fi convergente se păstrează după efectuarea operațiilor uzuale de sumă, diferență și produs cu o constantă.

Teorema 3.8. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii convergente de numere reale astfel ca $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = B$. Atunci seria sumă $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ și seria produs cu o constantă $\sum_{n=0}^{\infty} cx_n$, $c \in \mathbb{R}$, sunt convergente. În plus, au loc relațiile

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n + y_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n = A + B;$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} cx_n = c \sum_{n=0}^{\infty} x_n = cA.$

Demonstrația este imediată, utilizând proprietățile operațiilor cu șiruri convergente.

Serii cu termeni pozitivi, serii cu termeni negativi, serii alternante, serii cu termeni oarecare

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Spunem că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie cu termeni pozitivi* dacă toți termenii săi de la un indice încolo sunt pozitivi, adică există $N_1 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n \geq 0$ pentru orice $n \geq N_1$. Similar, spunem că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie cu termeni negativi* dacă toți termenii săi de la un indice încolo sunt negativi, adică există $N_2 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n \leq 0$ pentru orice $n \geq N_2$.

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se va numi *serie cu termeni oarecare* dacă are atât o infinitate de termeni pozitivi, cât și o infinitate de termeni negativi. Un caz particular de serii

cu termeni oarecare sunt *seriile alternante*. O serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se va numi *alternantă* dacă termenii săi sunt alternativ pozitivi și negativi de la un rang încolo, adică există $N_3 \in \mathbb{N}$ pentru care $x_n = (-1)^n a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, unde $(a_n)_{n \geq 0}$ este un șir de termeni nenuli cu semn constant. În concluzie, pentru o serie alternantă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, fie $x_n = (-1)^n a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, fie $x_n = (-1)^{n+1} a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, unde $(a_n)_{n \geq 0}$ este un șir cu termeni strict pozitivi.

În cele ce urmează, conform faptului că eliminarea unui număr finit de termeni ai seriei nu modifică natura acesteia, vom presupune acolo unde este necesar că proprietatea de pozitivitate (respectiv negativitate, alternanță) are loc începând cu primul termen al seriei. De asemenea, întrucât înmulțirea cu un număr negativ nu modifică natura unei serii, seriile cu termeni negativi nu vor fi tratate separat, rezultate privind convergența acestora putând fi deduse cu ușurință din rezultatele corespunzătoare privind convergența seriilor cu termeni pozitivi.

3.1 Serii cu termeni pozitivi

Monotonia șirului sumelor parțiale

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Deoarece

$$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0,$$

urmează că șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este monoton crescător. Acest lucru are consecințe importante asupra convergenței unei serii cu termeni pozitivi, deoarece dacă $(S_n)_{n \geq 0}$ este monoton, o condiție necesară și suficientă pentru convergența sa este ca el să fie mărginit superior. Obținem deci următorul criteriu de convergență pentru serii cu termeni pozitivi.

Teorema 3.9. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul $(S_n)_{n \geq 0}$ al sumelor parțiale asociate seriei este mărginit superior.

În plus, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie cu termeni pozitivi cu $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$, atunci, deoarece $(S_n)_{n \geq 0}$ tinde monoton crescător către limita sa A , urmează că $S_n \leq A$ pentru orice $n \geq 0$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Deoarece

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \text{pentru orice } n \geq 2,$$

urmează că

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2, \end{aligned}$$

iar șirul $(S_n)_{n \geq 1}$ al sumelor parțiale este mărginit superior, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

De asemenea, se poate observa că pentru serii cu termeni pozitivi are loc proprietatea de comutativitate, în care de această dată se pot schimba locurile unui număr infinit de termeni.

Teorema 3.10. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi. Dacă se schimbă ordinea unor termeni din serie (chiar în număr infinit), seria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ astfel obținută este convergentă și are aceeași sumă.

3.1.1 Criteriul de condensare

Un criteriu util pentru stabilirea, între altele, a convergenței așa-numitei serii armonice generalizate, care va fi folosită ca termen de comparație pentru alte serii, este următorul rezultat, numit *criteriul de condensare*.

Teorema 3.11. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir monoton descrescător cu termeni pozitivi. Atunci

seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură.

Exercițiu. Studiați convergența seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Soluție. Deoarece $(x_n)_{n \geq 2}$: $x_n = \left(\frac{1}{n \ln n}\right)_{n \geq 2}$ este un șir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează conform criteriului de condensare că $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ și $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$ au aceeași natură. Cum $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$ este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că și $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ este divergentă.

Convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Dacă $p < 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este divergentă, întrucât termenul său general nu tinde la 0. Similar, pentru $p = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este de asemenea divergentă.

Fie acum $p > 0$. Conform criteriului de condensare, seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$ au aceeași natură. Cum

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n,$$

iar $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$ pentru $p \in (0, 1]$, respectiv $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ pentru $p > 1$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este divergentă pentru $p \in (0, 1]$, respectiv convergentă pentru $p > 1$.

Discuția de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ este } \begin{cases} \text{divergentă,} & \text{dacă } p \leq 1 \\ \text{convergentă,} & \text{dacă } p > 1 \end{cases}.$$

Reprezentând o formă mai generală a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ se mai numește și *seria armonică generalizată*.

3.1.2 Criterii de comparație

În cele ce urmează vom prezenta un set de criterii care permit analiza convergenței sau divergenței unei serii cu termeni pozitivi date prin stabilirea unei relații între termenii seriei și termenii unei alte serii a cărei natură este cunoscută (deoseori cu seria armonică generalizată). Revenind la faptul că, pentru serii cu termeni pozitivi, convergența acestora este echivalentă cu nemărginirea șirului sumelor parțiale, interpretarea următorului rezultat este imediată: o serie ai cărei termeni sunt mai mari decât termenii unei serii „nemărginite” (i.e., divergente) date este de asemenea „nemărginită” (i.e., divergentă), în vreme ce o serie ai cărei termeni sunt mai mici decât termenii unei serii „mărginite” (i.e., convergente) date este de asemenea „mărginită” (i.e., convergentă).

Teorema 3.12. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n \leq y_n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.

Date fiind $c \in (0, \infty)$ și o serie cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, se observă că seriile $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$ au aceeași natură. În aceste condiții, se poate obține ușor următorul corolar al teoremei de mai sus, numit *criteriul de comparație cu inegalități*.

Corolar 3.12.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni pozitivi și fie $c \in (0, \infty)$. Dacă

există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n \leq cy_n \text{ pentru orice } n \geq N, \quad (3.1)$$

atunci au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.

Exercițiu. Studiați convergența următoarelor serii:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}.$$

Soluție. 1) Deoarece $\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$ este de asemenea convergentă.

2) Deoarece $\frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$ este de asemenea convergentă.

3) Deoarece $\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^4}} = \frac{1}{n+1}$, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ este divergentă (este același lucru cu seria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$), urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}$ este divergentă.

4) Deoarece $n \leq 2^n$ pentru orice $n \geq 2$, urmează că $\sqrt[n]{n} \leq 2$ pentru orice $n \geq 2$, deci $\frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ pentru orice $n \geq 2$. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, urmează că și seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}$ este divergentă.

Informații despre îndeplinirea relației (3.1), necesară pentru utilizarea criteriului de comparație, se pot obține studiind comportarea raportului $\frac{x_n}{y_n}$.

În acest sens, să presupunem că $y_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$. Conform Teoremei 2.36, dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L < \infty$, iar $\varepsilon > 0$, atunci există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel

că $\frac{x_n}{y_n} < L + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$. Se obține că

$$x_n < (L + \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1.$$

Similar, dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l > 0$, iar $\varepsilon \in (0, l)$, atunci există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel că $\frac{x_n}{y_n} > l - \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^2$. De aici,

$$x_n > (l - \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

Putem atunci obține următorul rezultat, numit *criteriul de comparație cu limite extreme*.

Corolar 3.12.2. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ o serie cu termeni strict pozitivi.

1. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L < \infty$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l > 0$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. 1) Concluzia se obține deoarece $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă și există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n < (L + \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1.$$

2) Concluzia se obține deoarece $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă și există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n > (l - \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2. \quad \blacksquare$$

În situația în care există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există și $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$. În plus, au loc egalitățile

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită și *criteriul de comparație cu limită*.

Corolar 3.12.3. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $l < \infty$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $l > 0$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ au aceeași natură.

În multe situații, un bun termen de comparație este seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\frac{1}{n^p}$ precizând comportarea „aproximativă” a termenului general al seriei de studiat. De exemplu, în studiul convergenței seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 2n + 1}$ este utilă comparația cu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, întrucât $\frac{1}{n^3 - 2n + 1}$ are comportarea „aproximativă” a lui $\frac{1}{n^3}$ pentru $n \rightarrow \infty$, iar în studiul convergenței seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n} - n + 1}$ este utilă comparația cu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, întrucât $\frac{n}{n^2\sqrt{n} - n + 1}$ are comportarea „aproximativă” a lui $\frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exemplu. Studiați convergența seriilor:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 2}{n^2 + 6n + 11}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$;
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$.

Soluție. 1) Vom compara seria dată cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Se obține că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ au aceeași natură. Cum cea din urmă este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = \frac{3}{2} > 1$, urmează că și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ este convergentă.

2) Vom compara seria dată cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Se obține că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{n^2+6n+11}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{n^2+6n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ au aceeași natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind o serie armonică, urmează că și $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$ este divergentă.

3) Vom compara seria dată cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. Se obține că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ au aceeași natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că și $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$ este divergentă.

4) Este deja cunoscut că $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n) = c \in (0, 1)$. De aici,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n}{\ln n} = 0,$$

iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$ și $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ au aceeași natură. Deoarece $(x_n)_{n \geq 0}$: $(\frac{1}{\ln n})_{n \geq 2}$ este un șir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează

conform criteriului de condensare că $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ și $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{\ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{n \ln 2}$ au aceeași natură. Deoarece $n \leq 2^n$ pentru orice $n \geq 2$, urmează că $2^n \frac{1}{n \ln 2} \geq \frac{1}{\ln 2}$, deci termenul general al seriei $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{n \ln 2}$ nu tinde la 0, aceasta fiind în concluzie divergentă. Urmează că și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$ este divergentă.

Vom preciza în cele ce urmează un alt criteriu, numit și *criteriul de comparație cu rapoarte*, prin care convergența sau divergența unei serii se poate stabili prin intermediul comparației cu o serie a cărei natură este cunoscută, ce poate fi dedus cu ajutorul Corolarului 3.12.1.

Teorema 3.13. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni strict pozitivi. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n} \quad \text{pentru orice } n \geq N, \quad (3.2)$$

atunci au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.

Demonstrație. Cu ajutorul (3.2) se deduce că

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

de unde

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{x_N}{y_N} \quad \text{pentru orice } n \geq N.$$

Cu notația $\frac{x_N}{y_N} = c$, urmează că

$$\frac{x_n}{y_n} \leq c \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

de unde concluzia urmează conform Corolarului 3.12.1. ■

3.1.3 Criterii ale radicalului

Un dezavantaj al criteriilor de comparație este că utilizarea acestora necesită construcția unor serii ajutătoare, alegerea acestora din urmă nefiind totdeauna imediată. Următorul criteriu, numit și *criteriul radicalului cu inegalități*, este utilizat îndeosebi pentru studierea convergenței unor serii pentru care termenul general conține puterea de ordin n a unui alt șir și nu necesită construcția unei serii ajutătoare.

Teorema 3.14. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți:

1. Dacă există $q < 1$ și $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru o infinitate de valori ale lui } n,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. 1. Dacă

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

urmează că

$$x_n \leq q^n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

iar cum $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă se obține că și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Deoarece

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru o infinitate de valori ale lui } n,$$

se obține că $x_n \geq 1$ pentru o infinitate de valori ale lui n , deci șirul termenilor generali $(x_n)_{n \geq 0}$ nu este convergent la 0, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

Se poate obține atunci următorul criteriu al radicalului cu limite extreme.

Teorema 3.15. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți:

1. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului radicalului cu limite extreme (spunem că este un caz de dubiu).

În situația în care există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există și $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$, iar

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$

Teorema de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită și criteriu radicalului cu limită.

Corolar 3.15.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului radicalului cu limită.

Exercițiu. Studiați convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$.

Soluție. 1) Termenul general al seriei este $x_n = \left(\frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} \\ &= \frac{3}{2} > 1 \end{aligned}$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$ este divergentă.

Exercițiu. Discutați natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an + 1}{n + 2} \right)^n$, unde $a > 0$.

Soluție. Termenul general al seriei este $x_n = \left(\frac{an + 1}{n + 2} \right)^n$. Urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{an + 1}{n + 2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + 1}{n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(a + \frac{1}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)} = a.$$

De aici, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an + 1}{n + 2} \right)^n$ este convergentă dacă $a \in (0, 1)$, respectiv divergentă dacă $a > 1$.

Dacă $a = 1$, urmează că $x_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{-(n+2)} \right]^{-\frac{n}{n+2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Urmează că $(x_n)_{n \geq 0}$ nu este convergent la 0, iar $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$ este divergentă.

3.1.4 Criterii ale raportului

Un alt criteriu util pentru studiul convergenței unor serii cu termeni pozitivi, în special a acelor pentru care termenul general conține produse, este *criteriul raportului cu inegalități*, indicat mai jos. De asemenea, acesta nu necesită construcția unei serii ajutoare.

Teorema 3.16. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți:

1. Dacă există $q < 1$ și $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. 1. Deoarece

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

urmează că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

iar deoarece $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă, se obține cu ajutorul Teoremei 3.13 (criteriul

de comparație cu rapoarte) că și seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Se observă că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1^{n+1}}{1^n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

iar cum seria $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ este divergentă, se obține cu ajutorul Teoremei 3.13 (criteriul

de comparație cu rapoarte) că și seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

Se poate obține atunci următorul criteriu al raportului cu limite extreme.

Teorema 3.17. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți.

1. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului cu limite extreme.

În situația în care există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există și $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

În plus, au loc egalitățile

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită și *criteriul raportului cu limită*.

Corolar 3.17.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului cu limită.

Exercițiu. Studiați convergența seriilor

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$$

Soluție. 1) Termenul general al seriei este $x_n = \frac{2^n n!}{n^n}$. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{2}{e} < 1, \end{aligned}$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ este convergentă.

2) Termenul general al seriei este $x_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)(3n+5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)(2n+3)}}{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)(3n+5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{2n+3} = \frac{3}{2} > 1, \end{aligned}$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$ este divergentă.

În ceea ce privește relația între domeniile de aplicabilitate ale criteriilor raportului și radicalului, să notăm că dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un șir cu termeni strict pozitivi atunci, așa cum reiese din Teorema 2.40, are loc inegalitatea

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Se observă de aici că dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ atunci și $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, iar dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, atunci și $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$. De aici, dacă sunt îndeplinite condițiile pentru aplicarea criteriului raportului cu limite extreme, atunci sunt îndeplinite și condițiile pentru aplicarea criteriului radicalului cu limite extreme, obținându-se același rezultat. De asemenea, dacă există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci

există și limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ există și are aceeași valoare, deci dacă sunt îndeplinite condițiile pentru aplicarea criteriului raportului cu limită, atunci sunt îndeplinite și condițiile pentru aplicarea criteriului radicalului cu limită, obținându-se același rezultat.

În plus, există situații în care criteriile raportului nu sunt aplicabile, fiind aplicabile în schimb criterii ale radicalului. Un exemplu în acest sens este seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n}$. Deoarece termenul general este $x_n = \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$, urmează că $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n} \cdot \frac{1}{2}$, de unde

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3}{2} > 1; \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{6} < 1,$$

deci criteriul raportului cu limite extreme nu este aplicabil. Totuși, $\frac{1}{2^n} \leq x_n \leq \frac{3}{2^n}$, de unde $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \frac{\sqrt[n]{3}}{2}$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{2} < 1$, conform criteriului cleștelui. De aici, criteriul radicalului cu limită (și de fapt și cel cu limite extreme) este aplicabil, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n}$ este convergentă. Se poate deci concluziona faptul că sus-menționatele criterii ale radicalului au o arie de aplicabilitate mai largă decât criteriile corespunzătoare ale raportului.

3.1.5 Criteriul Raabe-Duhamel

Diversele variante ale criteriului Raabe-Duhamel, menționate în cele ce urmează, sunt în general utilizate atunci când aplicarea criteriului raportului conduce la un caz de dubiu. Vom prezenta mai întâi *criteriul Raabe-Duhamel cu inegalități*; a se remarca faptul că utilizarea raportului inversat ($\frac{x_n}{x_{n+1}}$, în contrast cu raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, utilizat în cadrul criteriului raportului) conduce la obținerea unor situații inverse de convergență față de cele obținute în criteriul raportului, respectiv „ $\geq q > 1$ ” pentru convergență (în loc de „ $\leq q < 1$ ” pentru criteriul raportului) și „ ≤ 1 ” pentru divergență (în loc de „ ≥ 1 ” pentru criteriul raportului).

Teorema 3.18. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți:

1. Dacă există $q > 1$ și $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \geq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Se poate obține atunci următorul criteriu Raabe-Duhamel cu limite extreme.

Teorema 3.19. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți:

1. Dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

3. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limite extreme.

În situația în care există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există și limitele $\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$. În plus, au loc egalitățile

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită și criterium Raabe-Duhamel cu limită.

Corolar 3.19.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limită.

Exercițiu. Demonstrați că seria armonică generalizată $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este convergentă pentru $p > 1$, respectiv divergentă pentru $p < 1$.

Soluție. Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1}{n^p}$. Urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = p.$$

Concluzia urmează atunci conform criteriului Raabe-Duhamel cu limită.

Exercițiu. Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$.

Soluție. Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$, de unde

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2}. \end{aligned}$$

Urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, deci aplicarea criteriului raportului conduce la un caz de dubiu. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria dată este divergentă.

3.2 Serii cu termeni oarecare

Comparativ cu situația seriilor cu termenilor pozitivi, pentru care studiul convergenței se reduce la studiul mărginirii șirului sumelor parțiale, deoarece monotonia acestuia este asigurată *a priori*, situația seriilor cu termeni oarecare este mult mai complicată, întrucât această cale de abordare se pierde, șirul sumelor parțiale nemaifiind monoton. În concluzie, nici criteriile de convergență obținute anterior (criteriile de comparație, ale raportului și radicalului, ș. a. m. d.) nu mai sunt valabile.

Principala strategie de demonstrare a convergenței seriilor cu termeni oarecare va fi acum scrierea termenului general ca un produs de doi factori, construirea seriei care are ca termen general unul din factori și a șirului care are ca termen general pe cel de-al doilea factor și determinarea unor proprietăți de convergență, monotonie și mărginire pentru acestea care vor conduce la convergența seriei inițiale. În situația în care seria care are ca termen general modulul termenului general al seriei inițiale este convergentă, convergența seriei inițiale se va obține din convergența acesteia din urmă; desigur, convergența celei de-a doua serii este mult mai simplu de obținut, fiind vorba despre o serie cu termeni pozitivi. În fine, pentru cazul particular al seriilor alternante, convergența acestora se poate obține demonstrând monotonia șirului obținut prin eliminarea factorului alternant.

3.2.1 Criteriul lui Dirichlet

În situația în care $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie nu neapărat convergentă, dar cu șirul sumelor parțiale mărginit, înmulțirea termenului general x_n cu termenul general y_n al unui șir cu valori „mici” (monoton descrescător și convergent la 0) „îmbunătățește” convergența seriei, în sensul că seria rezultat $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Are loc atunci următorul rezultat, numit *criteriul lui Dirichlet*.

Teorema 3.20. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie cu șirul sumelor parțiale mărginit, iar $(y_n)_{n \geq 0}$ este un șir monoton descrescător și convergent la 0, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Exercițiu. Demonstrați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ este convergentă, unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluție. Mai întâi, fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Fie $(S_n)_{n \geq 1}$ șirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,

$$S_n = \sin 0x + \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

Să observăm că

$$|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{2}{2|\sin \frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|},$$

dacă $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ (adică $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$), respectiv

$$|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| = |0 + 0 + \dots + 0| = 0,$$

dacă $\sin \frac{x}{2} = 0$ (adică $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$), deci în orice caz $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ are șirul sumelor parțiale mărginit. Cum $(y_n)_{n \geq 1} = (\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ este monoton descrescător și convergent la 0, urmează concluzia.

3.2.2 Criteriul lui Abel

Dacă se pornește de această dată de la o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, înmulțirea termenului general x_n cu termenul general y_n al unui șir cu proprietăți suficient de

bune (i.e. monoton și mărginit) păstrează convergența seriei, în sensul că seria rezultat $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este de asemenea convergentă. Are loc atunci următorul rezultat, numit *criteriul lui Abel*.

Teorema 3.21. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie convergentă, iar $(y_n)_{n \geq 0}$ este un șir monoton și mărginit, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Exercițiu. Demonstrați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n}$ este convergentă.

Soluție. Observăm mai întâi că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos(\frac{1}{n}).$$

A fost deja demonstrat că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ este convergentă, unde $x \in \mathbb{R}$, deci, pentru $x = 1$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ este convergentă. Cum șirul $(y_n)_{n \geq 1}$: $y_n = \frac{1}{n}$ este monoton descrescător și convergent la 0, luând valori între 0 și 1, iar funcția cosinus este descrescătoare pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$, urmează că $(y_n)_{n \geq 1}$ este monoton crescător. În plus, $(y_n)_{n \geq 1}$ este mărginit, deoarece funcția cosinus este mărginită. Urmează că seria din enunț este convergentă, conform criteriului lui Abel.

3.2.3 Serii alternante. Criteriul Leibniz

Pentru cazul particular al seriilor alternante, se poate observa cu ajutorul criteriului lui Dirichlet că pornindu-se de la seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, cu șirul sumelor parțiale mărginit, prin înmulțirea termenului general $(-1)^n$ cu termenul general y_n al unui șir cu valori monoton descrescător și convergent la 0 se obține o serie convergentă. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *criteriul lui Leibniz*.

Teorema 3.22. Dacă $(y_n)_{n \geq 0}$ este un șir monoton descrescător și convergent la 0, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ este convergentă.

Demonstrație. Fie $(S_n)_{n \geq 0}$ șirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Deoarece $S_{2k} = 1, S_{2k+1} = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, urmează că $(S_n)_{n \geq 0}$ este mărginit. Aplicând criteriul lui Dirichlet, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ este convergentă. ■

Exercițiu. Demonstrați că seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă.

Soluție. Se observă că

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Deoarece $(y_n)_{n \geq 0}$: $y_n = \frac{1}{n+2}$ este monoton descrescător și convergent la 0, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă, conform criteriului lui Leibniz.

Atunci și seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă, fiind obținută prin înmulțirea seriei convergente $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ cu constanta -1 .

Monotonia unor subșiruri ale șirului sumelor parțiale

Să presupunem acum că $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ este o serie alternantă, în condițiile de aplicare ale criteriului lui Leibniz, adică $(y_n)_{n \geq 0}$ este un șir monoton descrescător și convergent la 0. Fie deasemenea $(S_n)_{n \geq 0}$ șirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$. Se observă atunci că $(S_{2k})_{k \geq 0}$ este monoton descrescător iar $(S_{2k+1})_{k \geq 0}$ este monoton crescător. În plus, are loc relația

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n \leq S_{2k} \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

Într-adevăr,

$$S_{2(k+1)} - S_{2k} = (-1)^{2k+1}a_{2k+1} + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0$$

deci $(S_{2k})_{k \geq 0}$ este monoton descrescător. Similar,

$$S_{2(k+1)+1} - S_{2k+1} = (-1)^{2k+2}a_{2k+2} + (-1)^{2k+3}a_{2k+3} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0,$$

deci $(S_{2k+1})_{k \geq 0}$ este monoton crescător. Deoarece orice termen al unui șir crescător este mai mic sau egal cu limita șirului, respectiv orice termen al unui șir descrescător este mai mare sau egal cu limita șirului, urmează că

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n \leq S_{2k} \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

3.2.4 Serii absolut convergente

Cu ajutorul criteriului lui Leibniz, se poate observă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă. Totuși, seria asociată a modulelor, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

În același timp, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este convergentă, iar seria asociată a modulelor, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este de asemenea convergentă.

Aceste exemple sugerează o posibilă clasificare a seriilor convergente în serii pentru care seria asociată a modulelor este convergentă, respectiv divergentă.

În acest sens, o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă se

va numi *absolut convergentă*, în vreme ce o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care

$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este divergentă se va numi *condiționat convergentă* sau *semiconvergentă*.

Din cele de mai sus, se observă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este absolut convergentă, în

vreme ce seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nu este convergentă (este condiționat convergentă, sau semiconvergentă).

Se observă de asemenea că pentru serii cu termeni pozitivi noțiunile de convergență și absolută convergență coincid, deoarece modulul unui număr pozitiv este chiar numărul în cauză. În general, pentru serii cu termeni oarecare, convergența nu implică absolută convergență, după cum se poate deduce din exemplul seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ de mai sus. Totuși, are loc implicația inversă, în sensul că orice serie absolut convergentă este convergentă.

Teorema 3.23. Dacă o serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă, atunci ea este și convergentă.

Deoarece seria modulelor $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este o serie cu termeni pozitivi, pentru studierea convergenței acesteia se pot utiliza criteriile de convergență pentru serii cu termeni pozitivi stabilite anterior. Acest lucru sugerează faptul că se poate obține convergența unei serii cu termeni oarecare demonstrând mai întâi convergența seriei modulelor cu ajutorul unui criteriu oarecare de convergență, convergența seriei date fiind atunci o consecință a absolutei ei convergențe.

Exercițiu. Studiați absoluta convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluție. Cum

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = 2 > 1$, urmează că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right|$ este convergentă, conform criteriului de comparație cu inegalități. De aici, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ este absolut convergentă.

Exercițiu. Studiați absoluta convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Soluție. Deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nu este absolut convergentă. Ea este doar convergentă, conform criteriului lui Leibniz.

3.2.5 Produsul după Cauchy a două serii

Fie seriile cu termeni oarecare $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. Vom numi *seria produs după Cauchy* a celor două serii seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ definită prin

$$c_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \dots + x_n y_0 = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k},$$

pentru care c_n , termenul de ordin n , conține suma tuturor produselor de forma $x_k y_l$ în care suma indicilor celor doi factori x_k și y_l este n .

Se observă că, definită în acest mod, seria produs după Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ conține într-adevăr toate produsele de forma $x_k y_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, câte o singură dată, un astfel de produs fiind un termen al sumei prin care este definit c_{k+l} și numai al acesteia.

Totuși, acest procedeu de sumare nu asigură proprietatea de păstrare a convergenței a două serii. Mai precis, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt două serii convergente, seria produs după Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nu este neapărat convergentă. În acest sens, să considerăm exemplul seriilor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \quad \text{cu } x_n = y_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

În primul rând, se observă cu ajutorul criteriului lui Leibniz că aceste serii sunt convergente. În plus,

$$c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} (-1)^{n-k} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}.$$

Cum

$$\sqrt{(k+1)(n+1-k)} \leq \sqrt{(n+1)(n+1)} = n+1,$$

urmează că

$$|c_n| = \left| (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \right| \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} = 1,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este divergentă, întrucât termenul general c_n nu tinde la 0.

Totuși, convergența seriei produs după Cauchy este asigurată dacă măcar una dintre cele două serii $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este absolut convergentă. În acest sens, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Mertens*.

Teorema 3.24. *Dacă seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, măcar una dintre ele fiind și absolut convergentă, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este și ea convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii, adică*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right).$$

În situația în care se îmbunătățește convergența seriilor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, în sensul că ambele serii sunt asumate a fi absolut convergente, se îmbunătățește și convergența seriei produs după Cauchy, în sensul că seria produs devine și ea absolut convergentă. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Cauchy*.

Teorema 3.25. *Dacă seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt absolut convergente, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este și ea absolut convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.*

Cum pentru cazul seriilor cu termeni pozitivi proprietățile de convergență și absolută convergență coincid, are loc următoarea consecință.

Corolar 3.25.1. *Dacă seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, atunci și seria produs după Cauchy a celor două serii este convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.*

În fine, în situația în care $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ și seria produs după Cauchy a celor două serii $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sunt toate convergente, acest lucru este suficient pentru a arăta că suma seriei produs este produsul sumelor celor două serii. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Abel*.

Teorema 3.26. Dacă seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, cu $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = B$, iar seria produs după Cauchy a celor două serii $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este de asemenea convergentă, cu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$, atunci $C = AB$.

3.3 Estimarea restului de ordin p

Din punct de vedere practic, pentru calculul aproximativ al sumei unei serii convergente, este important să se cunoască o estimare a restului de ordin p al seriei, această estimare reprezentând de fapt o estimare a erorii cu care S_p , suma parțială de ordin p , aproximează suma S a seriei.

Pentru serii cu termeni pozitivi, se poate stabili o estimare a restului de ordin p în condițiile de aplicare ale criteriului radicalului, respectiv criteriului raportului.

Teorema 3.27. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q < 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci

$$0 \leq R_p \leq \frac{q^{p+1}}{1-q} \quad \text{pentru orice } p \geq N.$$

Demonstrație. Se observă că

$$R_p = x_{p+1} + x_{p+2} + \dots \geq 0 \quad \text{pentru orice } p \geq 0.$$

Deoarece $\sqrt[n]{x_n} \leq q$ pentru orice $n \geq N$, urmează că $x_n \leq q^n$ pentru orice $n \geq N$.
Atunci

$$\begin{aligned} R_p &= x_{p+1} + x_{p+2} + \dots \\ &\leq q^{p+1} + q^{p+2} + \dots \\ &\leq q^{p+1}(1 + q + q^2 + \dots) \\ &\leq \frac{q^{p+1}}{1 - q}, \quad \text{pentru orice } p \geq N, \end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

Teorema 3.28. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Dacă

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci

$$0 \leq R_p \leq x_N \frac{q^{p-N+1}}{1 - q} \quad \text{pentru orice } p \geq N.$$

Pentru serii alternante, se poate stabili o estimare a restului de ordin p în condițiile de aplicare ale criteriului lui Leibniz.

Teorema 3.29. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ o serie alternantă, unde $(y_n)_{n \geq 0}$ este un șir monoton descrescător și convergent la 0. Atunci

$$|R_p| \leq y_{p+1} \quad \text{pentru orice } p \geq 0.$$

Aplicații

3.1. Determinați sumele următoarelor serii folosind formula de sumare a progresiei geometrice

$$\begin{aligned} 1) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{7^n}; & 2) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}}; & 3) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}; & 4) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{3^{2n}}; \\ 5) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}; & 6) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{[3 + (-1)^n]^n}. \end{aligned}$$

3.2. Ținând seama de relația

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!}, \quad n \geq 0,$$

determinați suma seriei telescopice $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

3.3. Ținând seama de relația

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{n+1} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{n}, \quad n \geq 1,$$

determinați suma seriei telescopice $\sum_{n=1}^{\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

3.4. Ținând seama de relația

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1,$$

determinați suma seriei telescopice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3.5. Ținând seama de relația

$$\frac{n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}, \quad n \geq 1,$$

determinați suma seriei telescopice $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$.

3.6. Demonstrați că următoarele serii sunt divergente analizând comportarea termenului general

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{1 + 3^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{5} - 1);$$

$$5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(e^n + 2)}{n}; \quad 7) \sum_{n=2}^{\infty} \ln(\ln n).$$

3.7. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $x_0 \in (0, 1)$.

1. Demonstrați că $x_n \in (0, 1)$ pentru orice $n \geq 0$.

2. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător.

3. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
4. Demonstrați că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ este convergentă.
- 3.8. Demonstrați că nu există șiruri $(x_n)_{n \geq 0}$ astfel ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} (|x_n - 2| + |3 - x_n|)$ să fie convergentă.
- 3.9. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.
1. Demonstrați, folosind eventual criteriul de convergență Cauchy, că dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ este convergentă.
 2. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ este convergentă, rezultă neapărat că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă?
- 3.10. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă cu termeni strict pozitivi. Demonstrați că seriile $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ și $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}}}$ sunt de asemenea convergente.
- 3.11. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului de condensare
- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n(\ln n)^2}$.
- 3.12. Demonstrați cu ajutorul criteriului de condensare că seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ este convergentă dacă $p > 1$, respectiv divergentă dacă $p \leq 1$.
- 3.13. 1. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$;
2. Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}$, folosind eventual un criteriu de comparație.

3.14. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu de comparație

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + (-1)^n}{n^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \sin n}{n}; \quad 3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; \\
 & 5) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n + (-1)^n)^2}; \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3}; \quad 7) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3n+4}; \quad 8) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+n+2}; \\
 & 9) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n^2+1}\right)^2; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}}{n^2}; \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\frac{3}{n}}}; \quad 12) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1); \\
 & 13) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{2n}+1}; \quad 14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right); \quad 15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right).
 \end{aligned}$$

3.15. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu al raportului

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^n}{n^n}; \\
 & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2^n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}; \quad 8) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}; \\
 & 9) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3} - \sqrt[3]{3})(\sqrt{3} - \sqrt[5]{3}) \dots (\sqrt{3} - \sqrt[2n+1]{3}).
 \end{aligned}$$

3.16. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu al radicalului

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n+2}; \quad 3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}; \\
 & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^{n \ln n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{4n+5}\right)^{n^2}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}; \quad 8) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}; \\
 & 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}; \quad 10) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}; \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}; \quad 12) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3n+5)^n}; \\
 & 13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{n+1}}{(2n+3)^n}; \quad 14) \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^n; \quad 15) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{(n+1)(n+2)} - n)^n.
 \end{aligned}$$

3.17. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{4 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 4n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(3+\sqrt{1})(3+\sqrt{2}) \dots (3+\sqrt{n})}; \\
 & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{3n+2}{3n+1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}; \\
 & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 6n}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)} \cdot \frac{1}{2^n+1}.
 \end{aligned}$$

3.18. Discutați convergența următoarelor serii în funcție de valorile parametrilor $a > 0$ și $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(a \frac{n^2 - n + 2}{n^2} \right)^n; \\
 & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + a + a^2 + \dots + a^n)}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n)}; \\
 & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}{n^n}; \quad 7) \sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}.
 \end{aligned}$$

3.19. Discuțați convergența următoarelor serii în funcție de valorile parametrilor $a, b > 0$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+(n-1))}{b(b+1)(b+2)\dots(b+(n-1))}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n + b^n}.$$

3.20. Discuțați convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an+b}{cn+d} \right)^n$ în funcție de valorile parametrilor $a, b, c, d > 0$.

3.21. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Dirichlet

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3n}{\ln(n+1)}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{\ln(n+2)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1) \sin 2n; \\
 & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \ln(1 + \frac{1}{n})}{\sqrt[3]{n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos x}{n}; \\
 & 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n^3}; \quad 10) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \sin n^2}{\sqrt[4]{n}}; \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}; \quad 12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}; \\
 & 13) \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \sin nx \cos nx, n \in \mathbb{R}; \\
 & 14) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right).
 \end{aligned}$$

3.22. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Abel

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \sin \frac{1}{n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \sqrt[n]{n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \arctg n; \\
 & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right); \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n+2}} \sin \frac{1}{n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right); \\
 & 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{n}.
 \end{aligned}$$

3.23. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Leibniz

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n + \ln n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{3} - 1); \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n};$$

$$5) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{6^n}; \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+3)}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\ln^2 n};$$

$$9) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+3} \left(\frac{3n+2}{6n+1} \right)^n.$$

3.24. Demonstrați că următoarele serii sunt divergente

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2+\cos n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(2^n+3)}{\ln(3^n+2)}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n+2)}{4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+4)};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{2+(-1)^n}.$$

3.25. Studiați convergența absolută a următoarelor serii

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+n+1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{n\sqrt{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n!}{n \ln^2 n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2n^2+\sin n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(-1)^n}}{n^2+(-1)^n}.$$

3.26. Discutați convergența următoarelor serii în funcție de valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{a+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+2^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^{2n}+1};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2+1}-an); \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a+3}{2a+1} \right)^n; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n+\sqrt{n}}.$$

3.27. Demonstrați că seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$, unde

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$$

este divergentă.