Capitolul 8

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

8.1 Şiruri de funcţii

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ şi fie $f_0, f_1, f_2, \ldots$ funcţii reale definite pe mulţimea D. Şirul $f_0, f_1, f_2, \ldots$ se numeşte *şir de funcţii* şi se notează cu $(f_n)_{n\geq 0}$. La fel ca şi în cazul şirurilor numerice, dorim să studiem proprietăţile de convergenţă ale şirurilor de funcţii, investigând posibilele moduri în care se poate defini noţiunea de convergenţă, şi să cercetăm dacă tipurile de convergenţă astfel definite realizează sau nu transmiterea unor proprietăţi uzuale ale funcţiilor de la termenii unui şir de funcţii la funcţia limită.

8.1.1 Punct de convergenţă. Mulţime de de convergenţă. Limita unui şir de funcţii

Mărginire uniformă

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D. Vom spune că $(f_n)_{n\geq 0}$ este *uniform mărginit* dacă există $M > 0$ astfel încât $|f_n(x)| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in D$.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin nx$. Atunci $|f_n(x)| \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R}$, deci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform mărginit.

Punct de convergenţă. Mulţime de de convergenţă

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D. Vom spune că $a \in D$ este un *punct de convergenţă* al şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ dacă şirul numeric $(f_n(a))_{n\geq 0}$ al valorilor funcţiilor în a este convergent. Mulţimea tuturor punctelor de convergenţă ale şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ se va numi atunci *mulţimea de convergenţă* a acestui şir.

Funcţia limită a unui şir de funcţii

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi fie $E \subseteq D$ mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$. Funcţia $f : E \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f : E \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

se numeşte *funcţia limită* a şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{nx}} = 1, \text{ pentru } x \in (0,1],$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0, \text{ pentru } x = 0.$$

Urmează că mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ este $[0,1]$, iar funcţia limită este

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

8.1.2 Convergenţa punctuală a unui şir de funcţii

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi fie de asemenea $f : D \to \mathbb{R}$. Vom spune că $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge punctual* sau *simplu* la f şi vom nota $f_n \xrightarrow{s} f$ *pentru* $n \to \infty$ dacă pentru orice $x \in D$ şirul numeric $(f_n(x))_{n\geq 0}$ este convergent la $f(x)$. În aceste condiţii, pentru orice $x \in D$ şi orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_{\varepsilon,x}. \tag{8.1}$$

Din exemplul anterior se observă însă că acest tip de convergenţă nu asigură transferul unor proprietăţi cum ar fi continuitatea şi derivabilitatea de la termenii şirului de funcţii către funcţia limită. În acest sens, deşi toţi termenii şirului $(f_n)_{n\geq 0}$ sunt funcţii derivabile pe $[0,1]$, funcţia limită f nu este nici măcar continuă pe acest interval, fiind discontinuă în $x_0 = 0$. Este naturală atunci introducerea unui concept mai puternic de convergenţă.

8.1.3 Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi fie de asemenea $f : D \to \mathbb{R}$. Vom spune că $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniform* la f şi vom nota $f_n \xrightarrow{u} f$ *pentru* $n \to \infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } x \in D,$$

adică rangul $n_{\varepsilon,x}$ introdus în (8.1) nu mai depinde de x, iar diferenţa $|f_n(x) - f(x)|$ poate fi făcută suficient de mică de la un rang n_ε încolo indiferent de valoarea lui $x \in D$.

Conform definiţiei, se observă atunci că dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$, atunci şi $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \to \infty$. Implicaţia inversă nu este însă adevărată, în acest sens putându-se considera următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$. Atunci, deoarece

$$0 \leq x^n(1 - x^n) \leq x^n,$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ pentru $x \in [0,1)$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pentru $x \in [0,1)$. Deoarece $f_n(1) = 0$ pentru $n \geq 0$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$, deci $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Fie $\varepsilon = \frac{1}{4}$ şi să presupunem că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$. Atunci există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_n(x)| < \frac{1}{4}, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } x \in [0,1].$$

Însă $f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$ pentru orice $n \geq 1$, ceea ce contrazice inegalitatea de mai sus. În concluzie, $f_n \overset{u}{\not\to} f$ pentru $n \to \infty$.

8.1.4 Criterii de convergenţă uniformă

Se poate obţine în mod imediat următorul criteriu de convergenţă uniformă, util atunci când limita şirului este cunoscută de la bun început, sau poate fi uşor determinată.

Teorema 8.1. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi fie de asemenea $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$ dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)|\Big) = 0,$$

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$. Să arătăm că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. În acest sens, conform celor de mai sus, este suficient să demonstrăm că

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|\Big) = 0.$$

Deoarece f_n este impară pentru orice $n \geq 0$, iar $f_n(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$, urmează că

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = \sup_{x\geq 0}|f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} f_n(x).$$

Întrucât

$$f_n'(x) = \frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2},$$

urmează că $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ este unicul punct de maxim local al lui f_n pe $[0,\infty)$, iar cum $f_n(x_n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, urmează că

$$f_n(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \text{pentru orice } x \geq 0,$$

iar

$$\sup_{x\geq 0} f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

deci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.

Vom preciza în cele ce urmează un criteriu care constituie o adaptare a criteriului de convergenţă Cauchy pentru şiruri, menţionând în esenţă faptul că dacă şirurile numerice $(f_n(x))_{n\geq 0}$ sunt fundamentale în mod uniform, în sensul că rangul indicat în condiţia Cauchy depinde doar de ε, nu şi de x, atunci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent. La fel ca şi în cazul şirurilor numerice, nu este necesar să fie cunoscută limita şirului de funcţii, aşa cum s-a întâmplat în cazul criteriului anterior.

Teorema 8.2. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D. Atunci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent către o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \textit{pentru orice } m, n \geq n_\varepsilon \textit{ şi orice } x \in D.$$

Rezultatul se poate exprima şi sub următoarea formă echivalentă.

Teorema 8.3. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D. Atunci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent către o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \textit{pentru orice } n \geq n_\varepsilon, \textit{ orice } p \geq 0 \textit{ şi orice } x \in D.$$

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k(k+1)}$. Să arătăm că $(f_n)_{n\geq 1}$ este uniform convergent.

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k(k+1)}\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \Big|\frac{\sin kx}{k(k+1)}\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Deoarece

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

pentru $n \geq n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, urmează că

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon, \text{ orice } p \geq 0 \text{ şi orice } x \in D.$$

Conform teoremei de mai sus, urmează că $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent.

Următorul rezultat poartă numele de *criteriul majorării* şi indică faptul că o condiţie suficientă pentru convergenţa uniformă a unui şir de funcţii către o funcţie dată este ca modulul diferenţei dintre termenii şirului şi acea funcţie să poată fi majorat, indiferent de valoarea argumentului, de termenii unui şir cu limita 0.

Teorema 8.4. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi fie de asemenea $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă există $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ şi*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ şi } x \in D,$$

atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.

Demonstraţie. Deoarece

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

concluzia urmează în mod imediat cu ajutorul Teoremei 8.1. ∎

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2+1}$. Atunci

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|\cos nx|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ şi } x \in [0,1],$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0,$$

deci $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform către funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ pentru $x \in [0,1]$.

Pentru studierea convergenţei uniforme a unui şir de funcţii a cărei limită nu este cunoscută de la început, este utilă mai întâi determinarea funcţiei limită „punct cu punct", ţinând seama de faptul că orice şir de funcţii uniform convergent este în mod necesar şi convergent punctual, după care diferenţa dintre termenii şirului şi funcţia limită astfel obţinută se estimează în mod uniform.

Exerciţiu. Studiaţi convergenţa şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx^2+2}{nx}$.

Soluţie. Mai întâi, se observă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2+2}{nx} = \lim_{n\to\infty} (x + \frac{2}{nx}) = x, \quad \text{pentru orice } x \in [1,2],$$

deci $(f_n)_{n\geq 0}$ converge, deocamdată punctual, către funcţia

$$f : [1,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

Să arătăm că această convergenţă este uniformă. Observăm că

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2}{nx} \leq \frac{2}{n}, \quad \text{pentru orice } x \in [1,2],$$

iar deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$, urmează conform criteriului majorării că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.

În fine, în prezenţa proprietăţii de monotonie, convergenţa punctuală se poate transforma în convergenţă uniformă, aşa cum va fi observat din rezultatul următor, numit *teorema lui Dini*.

Teorema 8.5. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii continue definit pe mulţimea compactă D şie de asemenea o funcţie constantă $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

1. *$f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \to \infty$,*

2. *$(f_n(x))_{n\geq 0}$ este monoton pentru orice $x \in D$,*

atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.

8.1.5 Transmiterea unor proprietăţi prin convergenţă uniformă

S-a observat anterior că prin convergenţă punctuală proprietăţile de continuitate şi derivabilitate nu se transmit neapărat de la termenii şirului către funcţia limită. Vom observa în cele ce urmează că vehiculul potrivit de transmitere a proprietăţilor uzuale este convergenţa uniformă.

Mărginire

Teorema 8.6. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi mărginite pe D, astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea mărginită pe D.*

Continuitate

Teorema 8.7. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi continue în $a \in D$, astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea continuă în a.*

Conform definiţiei continuităţii pe o mulţime, teorema de mai sus conduce la următorul corolar.

Corolar 8.7.1. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi continue pe D, $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$. Atunci f este de asemenea continuă pe D.*

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Atunci

$$f_n \xrightarrow{s} f \text{ pentru } n \to \infty, \text{ unde } f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Totuşi, f_n nu converge şi uniform la această funcţie, deoarece în caz contrar ar trebui ca f să fie continuă, fiind limita uniformă a unui şir de funcţii continue, iar f este discontinuă în $x_0 = 1$.

Derivabilitate

Prin analogie cu transmiterea proprietăţilor de mărginire şi continuitate de la termenii unui şir uniform convergent către funcţia limită, s-ar putea crede că şi proprietatea de derivabilitate se transmite prin convergenţă uniformă. Acest lucru nu este însă adevărat, aşa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2n}, & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ x + \frac{1}{2n}, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Atunci

$$f_n'(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{1}{n} \\ nx, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 1, & x > \frac{1}{n} \end{cases}.$$

În plus,

$$\left(f_n'\right)_s\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{x\to -\frac{1}{n} \\ x<-\frac{1}{n}}} \frac{f_n(x) - f_n\left(-\frac{1}{n}\right)}{x - \left(-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{\substack{x\to -\frac{1}{n} \\ x<-\frac{1}{n}}} \frac{-x-\frac{1}{n}}{x+\frac{1}{n}} = -1$$

$$\left(f_n'\right)_d\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{x\to -\frac{1}{n} \\ x>-\frac{1}{n}}} \frac{f_n(x) - f_n\left(-\frac{1}{n}\right)}{x - \left(-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{\substack{x\to -\frac{1}{n} \\ x>-\frac{1}{n}}} \frac{\frac{n}{2}x^2-\frac{1}{2n}}{x+\frac{1}{n}} = -1,$$

deci f_n este derivabilă în $x_1 = -\frac{1}{n}$, iar $f_n'(-\frac{1}{n}) = -1$. Similar, f_n este derivabilă în $x_2 = \frac{1}{n}$, iar $f_n'(\frac{1}{n}) = 1$. În concluzie, f_n este derivabilă pe $\mathbb{R}$ pentru orice $n \geq 1$.

Fie acum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Vom estima $|f_n(x) - f(x)|$, pentru $x \in \mathbb{R}$, cu scopul de a demonstra că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.

Avem că

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |-\frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n}, && \text{pentru } x \leq -\frac{1}{n} \\ |f_n(x) - f(x)| &= |\frac{n}{2}x^2 - |x|| \leq \frac{n}{2}|x|^2 + |x| \leq \frac{3}{2n}, && \text{pentru } x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ |f_n(x) - f(x)| &= |\frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n}, && \text{pentru } x \geq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

În concluzie,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2n}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

iar conform criteriului majorării urmează că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$. Totuşi, funcţia limită f nu este derivabilă în $x = 0$, deci proprietatea de derivabilitate nu se transmite neapărat prin convergenţă uniformă.

Exemplul, totuşi, nu este surprinzător. Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii este o proprietate globală, măsurând, într-un anumit sens, cât de „aproape" sunt termenii acestui şir de funcţia limită, în vreme ce derivabilitatea unei funcţii este o proprietate locală, măsurând viteza de variaţie a acelei funcţii. În acest sens, două funcţii pot avea valori „apropiate", dar valorile uneia dintre ele pot varia cu mult mai repede decât valorile celeilalte, fie şi doar local, caz în care derivatele celor două funcţii nu vor fi „apropiate" una de alta.

O altă întrebare naturală este dacă uniforma convergenţă a unui şir $(f_n)_{n\geq 0}$ atrage uniforma convergenţă a şirului derivatelor sale $(f_n')_{n\geq 0}$. Răspunsul la această întrebare este de asemenea negativ, din aceleaşi motive enunţate mai sus, aşa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$. Deoarece

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

urmează conform criteriului majorării că $f_n \xrightarrow{u} f$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. Totuşi, deoarece $f_n'(x) = \cos nx$, iar $f_n'(\frac{\pi}{2}) = (-1)^n$, urmează că $(f_n'(\frac{\pi}{2}))_{n\geq 0}$ nu este convergent, iar $(f_n')_{n\geq 0}$ nu poate fi uniform convergent pe $\mathbb{R}$, întrucât mulţimea sa de convergenţă nu este întreg $\mathbb{R}$.

Se va observa însă că transferul de derivabilitate se produce în condiţiile în care sunt asigurate atât convergenţa uniformă a şirului funcţiilor, cât şi convergenţa uniformă a şirului derivatelor.

Teorema 8.8. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii derivabile definite pe un interval I şi fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ astfel încât*

1. *$(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent, $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.*
2. *$(f_n')_{n\geq 0}$ este uniform convergent, $f_n' \xrightarrow{u} g$ pentru $n \to \infty$.*

Atunci f este derivabilă, iar $f' = g$.

Egalitatea $f' = g$ de mai sus se poate pune şi sub forma

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty}(f_n'),$$

spunându-se că, în condiţiile teoremei, *limita derivatelor este derivata limitei*.

Dacă intervalul I este mărginit, atunci este suficient ca $(f_n)_{n\geq 0}$ să fie convergent într-un singur punct, restul ipotezelor implicând convergenţa uniformă a acestui şir.

Teorema 8.9. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii derivabile definite pe un interval mărginit I şi fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ astfel încât*

1. *$(f_n)_{n\geq 0}$ este convergent într-un punct $a \in I$.*
2. *$(f'_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent, $f'_n \xrightarrow{u} g$ pentru $n \to \infty$.*

Atunci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent către o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, f este derivabilă, iar $f' = g$.

Integrabilitate

Pentru conformitate, menţionăm aici că şi proprietatea unei funcţii de a fi integrabilă Riemann, care va fi studiată ulterior, se transmite la rândul ei de la termenii unui şir uniform convergent către funcţia limită.

Teorema 8.10. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii integrabile Riemann definite pe un interval $[a, b]$ astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea integrabilă Riemann pe $[a, b]$, iar*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Observăm atunci că, în condiţiile teoremei, *limita integralelor este integrala limitei*.

8.2 Serii de funcţii

Fiind dat un şir de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$, vom numi *serie de funcţii de termen general f_n* cuplul $((f_n)_{n\geq 0}, (S_n)_{n\geq 0})$ format din şirul $(f_n)_{n\geq 0}$ al termenilor seriei şi şirul de funcţii $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale, definit după regula

$$S_n = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n.$$

În această situaţie, f_n se va numi şi *termenul de rang n* sau *indice n* al seriei. Vom nota o serie de funcţii de termen general f_n prin

$$f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots,$$

sau, sub formă prescurtată, prin

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Dacă primii k termeni $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$ nu sunt definiţi, vom nota seria de funcţii de termen general f_n prin

$$f_k + f_{k+1} + f_{k+2} + \ldots + f_n + \ldots,$$

respectiv prin

$$\sum_{n=k}^{\infty} f_n.$$

8.2.1 Punct de convergenţă. Mulţime de convergenţă. Suma unei serii de funcţii

Pentru a studia convergenţa seriilor de funcţii, vom utiliza noţiunile şi rezultatele menţionate anterior pentru şiruri de funcţii şi serii numerice.

Punct de convergenţă. Mulţimea de convergenţă

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea D. Vom spune că $a \in D$ este un *punct de convergenţă* al seriei de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ dacă şirul numeric $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ este convergent, adică a este punct de convergenţă pentru şirul de funcţii $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale. Mulţimea tuturor punctelor de convergenţă ale seriei de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi atunci *mulţimea de convergenţă* a acestei serii.

Exemplu. Fie seria de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ şi fie $x \in \mathbb{R}$ fixat. Studiem absoluta convergenţă a seriei numerice obţinute. Urmează că

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{1+x^{2n}}}.$$

Pentru $x \in (-1,1)$, $L = |x| < 1$, deci seria obţinută pentru acest x este absolut convergentă, conform criteriului radicalului. Pentru $x \in (-\infty,-1) \cup$

$(1, +\infty)$,

$$L = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1}} = \frac{1}{|x|} < 1,$$

deci seria obţinută pentru acest x este absolut convergentă, conform criteriului radicalului. Pentru $x = -1$, seria iniţială devine $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. Pentru $x = 1$, seria iniţială devine $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei date este $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Suma unei serii de funcţii

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea D şi fie $E \subseteq D$ mulţimea sa de convergenţă. Funcţia $S : E \to \mathbb{R}$ definită prin

$$S : E \to \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

se va numi *suma* seriei de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$.

8.2.2 Convergenţa punctuală a unei serii de funcţii

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea D. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi *convergentă punctual* sau *simplu* către $f : D \to \mathbb{R}$ dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent punctual către f, adică pentru orice $a \in D$ seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ este convergentă către $f(a)$.

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea D. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi *convergentă absolut* dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$ este convergentă punctual, adică pentru orice $a \in D$ seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n(a)|$ este convergentă.

Să remarcăm că, la fel ca şi în cazul seriilor numerice, dacă o serie de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă, atunci ea este şi convergentă. În plus, deoarece pentru seriile numerice cu termeni pozitivi convergenţa este echivalentă cu mărginirea, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă dacă şi numai dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n(a)|$ este mărginită pentru orice $a \in D$.

8.2.3 Convergenţa uniformă a unei serii de funcţii

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea D. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi *convergentă uniform* către $f : D \to \mathbb{R}$ dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent uniform către f.

Exemplu. Fie seria de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$. Să demonstrăm că seria este convergentă uniform pe $(0, \infty)$.

Într-adevăr,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1}$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x}, \quad \text{pentru orice } x \in (0, \infty),$$

deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ este convergentă, deocamdată punctual, la $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Deoarece

$$|S_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

urmează conform criteriului majorării că $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent uniform la f, deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ este convergentă uniform pe $(0, \infty)$.

8.2.4 Criterii de convergenţă uniformă

Conform Teoremei 8.3 şi definiţiei convergenţei uniforme, se obţine următorul criteriu de convergenţă uniformă.

Teorema 8.11. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea D. Atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *este uniform convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, *orice* $p \geq 0$ *şi orice* $x \in D$.

De asemenea, prin analogie cu Teorema 8.4, se poate enunţa şi demonstra următorul criteriu de convergenţă uniformă şi absolută pentru serii de funcţii, numit *criteriul lui Weierstrass*.

Teorema 8.12. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea D. Dacă există* $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale pozitive astfel încât* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *este convergentă şi*

$$|f_n(x)| \leq \alpha_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ şi } x \in D,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *este absolut şi uniform convergentă.*

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2 + 1}$. Deoarece

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2 + x^2 + 1}\right| \leq \frac{1}{n^2 + 1}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ şi orice } x \in \mathbb{R},$$

iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ este convergentă, fapt care poate fi demonstrat, de exemplu, cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel sau comparând seria dată cu seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ cu ajutorul criteriului de comparaţie cu limită, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2 + 1}$ este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

Criteriul lui Dirichlet

La fel ca şi în cazul seriilor numerice, înmulţirea termenului general al unei serii de funcţii nu neapărat convergente, dar cu şirul sumelor parţiale uniform mărginit cu termenul general al unui şir de funcţii cu valori „mici" (monoton descrescător pentru orice valoare fixată a argumentului şi uniform convergent la 0) „îmbunătăţeşte" covergenţa seriei, în sensul că seria de funcţii ce are ca termen general rezultatul acestui produs este uniform convergentă.

Teorema 8.13. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea* D *care are şirul sumelor parţiale uniform mărginit. Fie* $(g_n)_{n\geq 0}$ *un şir de funcţii definite pe* D *cu proprietăţile următoare.*

1. $g_n \xrightarrow{u} 0$ *pentru* $n \to \infty$.
2. *Şirul numeric* $(g_n(x))_{n\geq 0}$ *este monoton descrescător pentru orice* $x \in D$.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ *este uniform convergentă.*

Criteriul lui Abel

Similar, înmulţirea termenului general al unei serii de funcţii uniform convergente cu termenul general al unui şir de funcţii cu proprietăţi suficient de bune (uniform mărginit şi monoton pentru valoare fixată a argumentului) păstrează uniforma convergenţă a seriei.

Teorema 8.14. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea* D *care este uniform convergentă. Fie* $(g_n)_{n\geq 0}$ *un şir de funcţii definite pe* D *cu proprietăţile următoare:*

1. $(g_n)_{n\geq 0}$ *este uniform mărginit.*
2. *Şirul numeric* $(g_n(x))_{n\geq 0}$ *este monoton pentru orice* $x \in D$.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ *este uniform convergentă pe* D.

Criteriul lui Leibniz

Teorema 8.15. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea D cu proprietăţile următoare:*

1. $f_n \xrightarrow{u} 0$ *pentru* $n \to \infty$.
2. *Şirul numeric* $(f_n(x))_{n\geq 0}$ *este monoton descrescător pentru orice* $x \in D$.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n$ *este uniform convergentă pe D.*

8.2.5 Transmiterea unor proprietăţi prin convergenţă uniformă

Prin analogie cu rezultatele corespunzătoare pentru şiruri de funcţii, se pot discuta continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea sumelor seriilor uniform convergente.

Continuitatea seriilor uniform convergente

Teorema 8.16. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea D care este uniform convergentă către o funcţie* $f : D \to \mathbb{R}$. *Dacă toate funcţiile* f_n *sunt continue în* $a \in D$ *(respectiv pe D), atunci* f *este de asemenea continuă în a (respectiv pe D).*

Derivabilitatea seriilor uniform convergente

Teorema 8.17. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii derivabile definite pe un interval I şi fie* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *astfel încât*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *este uniform convergentă,* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xrightarrow{u} f$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ *este uniform convergentă,* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n' \xrightarrow{u} g$.

Atunci f este derivabilă, iar $f' = g$.

Egalitatea $f' = g$ de mai sus se poate pune şi sub forma

$$(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n'),$$

spunându-se că, în condiţiile teoremei, seriile de funcţii convergente uniform se pot *deriva termen cu termen*.

Dacă intervalul I este mărginit, atunci este suficient ca $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ să fie convergentă într-un singur punct, restul ipotezelor implicând convergenţa uniformă a acestei serii.

Teorema 8.18. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii derivabile definite pe un interval mărginit I şi fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ astfel încât*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *este convergentă într-un punct $a \in I$.*

2. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ *este uniform convergentă, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n' \xrightarrow{u} g$.*

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă către o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, f este derivabilă, iar $f' = g$.

Pentru conformitate, menţionăm aici şi un rezultat privitor la integrarea seriilor uniform convergente.

Integrabilitatea seriilor uniform convergente

Teorema 8.19. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii integrabile Riemann definite pe un interval mărginit $[a, b]$, uniform convergentă către o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea integrabilă Riemann pe $[a, b]$, seria integralelor $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$*

este convergentă, iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

8.3 Serii de puteri

Vom numi *serie de puteri centrată în* x_0 o serie de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ pentru care funcţiile f_n, $n \geq 0$, au forma particulară $f_n = a_n(x - x_0)^n$, unde a_n, $n \geq 0$, şi x_0 sunt numere reale. O serie de puteri centrată în x_0 are deci forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \quad (8.2)$$

fiind unic determinată de numărul $x_0 \in \mathbb{R}$ şi de şirul $(a_n)_{n\geq 0}$. Dacă $x_0 = 0$, se obţine cazul particular al seriei de puteri centrată în origine

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \quad (8.3)$$

Întrucât după schimbarea de variabilă $x - x_0 = y$ seria (8.2) de mai sus se scrie sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n,$$

similară cu (8.3), se va considera în cele ce urmează doar cazul în care $x_0 = 0$, iar seria de puteri se scrie sub forma (8.3), adaptarea rezultatelor pentru cazul $x_0 \neq 0$ putându-se face cu uşurinţă.

8.3.1 Mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri

Pentru o serie de funcţii oarecare, mulţimea de convergenţă poate avea o structură complexă. Totuşi, pentru serii de puteri situaţia este cu mult mai simplă. Se poate observa că seria (8.3) este convergentă pentru $x = 0$, având suma a_0. Mai departe, se va demonstra că (8.3) poate converge doar în $x = 0$, poate converge pe întreaga axă reală sau poate converge pe un interval deschis simetric faţă de origine, o întrebare adiţională fiind dacă seria (8.3) converge şi în capetele acestui interval.

Mai întâi, vom exemplifica aceste situaţii.

Convergenţă doar în 0

Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$ şi fie $x \neq 0$ fixat. Atunci notând $b_n = n!x^n$, urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty,$$

ceea înseamnă că $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$, iar, pentru acest x fixat, seria dată nu poate fi convergentă, întrucât termenul ei general nu tinde la 0. În concluzie, seria dată converge doar pentru $x = 0$.

Convergenţă pentru orice $x \in \mathbb{R}$

Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ şi fie $x \neq 0$ fixat. Atunci notând $b_n = \frac{x^n}{n!}$, urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

iar, conform criteriului raportului pentru serii numerice, seria dată este absolut convergentă pentru acest x fixat, deci şi convergentă. În concluzie, seria dată converge pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Convergenţă pe un interval deschis centrat în 0

Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. S-a observat deja că pentru $x \in (-1,1)$ fixat, seria dată este convergentă, cu suma $\frac{1}{1-x}$, iar pentru $x \in (-\infty - 1] \cup [1, \infty)$ fixat, seria dată este divergentă, întrucât termenul său general nu tinde la 0. În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei date este $(-1,1)$.

Convergenţă pe un interval deschis centrat în 0

Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ şi fie $x \neq 0$ fixat. Atunci, notând $b_n = \frac{x^n}{n}$, urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n|x|}{n+1} = |x|.$$

Pentru $x \in (-1,1)$, urmează, conform criteriului raportului pentru serii numerice, că seria dată este absolut convergentă, deci şi convergentă. Pentru $|x| > 1$, urmează că $\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$, iar seria dată este divergentă, întrucât termenul general nu tinde la 0.

Rămâne deci să studiem convergenţa seriei în capetele intervalului menţionat anterior, anume în $x = -1$ şi $x = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă. Pentru $x = -1$, seria dată devine seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz pentru serii numerice. În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei date este $[-1, 1)$.

Cu un raţionament similar celui de mai sus, se poate observa că mulţimea de convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ este $(-1, 1]$, în vreme ce mulţimea de convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ este $[-1, 1]$, nicio afirmaţie generală neputând fi făcută *a priori* relativ la convergenţa sau divergenţa seriei la extremităţile mulţimii de convergenţă.

Rezultatul următor, cunoscut sub numele de *teorema lui Abel*, furnizează informaţii adiţionale despre conţinutul mulţimii de convergenţă.

Teorema 8.20. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Fie de asemenea* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *astfel încât seria numerică* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ *este convergentă, respectiv seria numerică* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ *este divergentă. Au loc atunci următoarele proprietăţi.*

1. *Seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge în orice punct* x *cu* $|x| < |x_1|$, *respectiv diverge în orice punct* x *cu* $|x| > |x_2|$.
2. *Pentru orice* $r \in (0, |x_1|)$, *seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este uniform convergentă pe intervalul* $[-r, r]$.

Determinarea razei de convergenţă a unei serii de puteri

S-a observat deja că seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru $x = 0$, iar teorema lui Abel ne asigură de următoarele lucruri.

1. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru $x = x_1$, atunci este convergentă şi pentru $|x| < |x_1|$.

2. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă pentru $x = x_2$, atunci este divergentă şi pentru $|x| > |x_2|$.

Fie E mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi fie

$$R = \sup E,$$

numit şi *raza de convergenţă* a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Conform celor de mai sus, $0 \in E$, deci $R \geq 0$. Sunt posibile următoarele situaţii.

1. $\mathbf{R = 0}$

Dacă $x \neq 0 \in E$, atunci $(-|x|, |x|) \subseteq E$, deci $R \geq |x|$, contradicţie. Atunci $E = \{0\}$.

2. $\mathbf{0 < R < \infty}$

Conform caracterizării analitice a marginii superioare a unei mulţimi şi teoremei lui Abel, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă pe $(-R, R)$, divergentă pe $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ şi absolut convergentă pe orice interval $[-r, r]$, cu $r < R$. Relativ la comportarea seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ în cele două capete ale intervalului $(-R, R)$, aceasta poate fi convergentă în ambele, într-unul singur, sau în niciunul, în acest sens putând fi studiate exemplele menţionate anterior.

3. $\mathbf{R = +\infty}$

Atunci seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$ şi uniform convergentă pe orice interval $[-r, r]$, cu $r \in \mathbb{R}$.

În toate aceste cazuri, dacă E este mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, iar R este raza sa de convergenţă, atunci

$$(-R, R) \subseteq E \subseteq [-R, R].$$

Intervalul $(-R, R)$ poartă numele de *intervalul de convergenţă* al seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (a nu se confunda cu mulţimea de convergenţă a acestei serii, care mai poate conţine eventual şi capetele $-R$ şi R ale acestui interval).

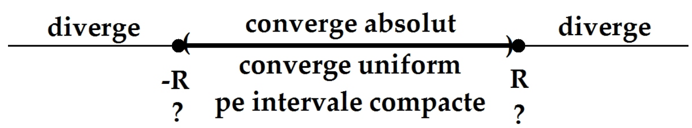

Figura 8.1: Convergenţa unei serii de puteri

Formulele Cauchy-Hadamard

Având în vedere faptul că pe intervalul de convergenţă $(-R, R)$ seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă, pentru determinarea razei de convergenţă vom folosi criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi, aplicate seriei modulelor $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Mai întâi, vom preciza o modalitate de determinare a razei de convergenţă a seriei de puteri cu ajutorul limitei unui raport.

Teorema 8.21. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o serie de puteri cu coeficienţi nenuli. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda,$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } \lambda \in (0, \infty), \\ \infty, & \text{dacă } \lambda = 0, \\ 0, & \text{dacă } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbb{R}^*$. Aplicând criteriul raportului seriei numerice cu termeni strict pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, observăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = \lambda |x|,$$

iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă pentru $|x| < \frac{1}{\lambda}$ şi divergentă pentru $|x| > \frac{1}{\lambda}$. De aici rezultă în mod imediat teorema de mai sus. ■

Exemplu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1,$$

iar raza de convergenţă a seriei de puteri date este $R = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, care este convergentă, conform criteriului Raabe-Duhamel, sau conform criteriului de comparaţie cu limită, folosind ca termen de comparaţie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Pentru $x = -1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Urmează că mulţimea de convergenţă a seriei de puteri date este $[-1, 1]$.

Vom preciza acum o modalitate de determinare a razei de convergenţă a seriei de puteri cu ajutorul limitei unui radical.

Teorema 8.22. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda,$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{dacă } \lambda = 0, \\ 0, & \text{dacă } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbb{R}$. Aplicând criteriul radicalului cu limite extreme seriei cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, observăm că

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x| = \lambda |x|,$$

iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă pentru $|x| < \frac{1}{\lambda}$ şi divergentă pentru $|x| > \frac{1}{\lambda}$. De aici rezultă în mod imediat teorema de mai sus. ■

Teorema de mai sus se poate particulariza sub următoarea formă.

Teorema 8.23. *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda,$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } \lambda \in (0,\infty), \\ \infty, & \text{dacă } \lambda = 0, \\ 0, & \text{dacă } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Formulele cuprinse în Teoremele 8.21 şi 8.22 poartă numele de *formulele Cauchy-Hadamard*.

Exemple. 1. Fie seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 5^n} x^n$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n + 5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5\sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}} = \frac{1}{5},$$

iar raza de convergenţă a seriei de puteri date este $R = 5$. Pentru $x = 5$, seria dată devine $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{2^n + 5^n}$, care este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{2^n+5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1} = 1$, iar limita termenului său general nu este 0. Pentru $x = -5$, seria dată devine $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{2^n + 5^n}$, care este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-5)^n}{2^n+5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}$ nu există, întrucât numărătorul nu are limită pentru $n \to \infty$, iar limita numitorului este 1. Urmează că mulţimea de convergenţă a seriei de puteri date este $(-5, 5)$.

2. Fie seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$. Cu notaţia $x + 1 = y$, obţi-

nem seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} y^n$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n}}{\sqrt[n]{n}} = 3,$$

iar raza de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} y^n$ este $R = \frac{1}{3}$. Pentru $y = \frac{1}{3}$, această serie devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^n} \frac{1}{n}$, fiind serie cu termeni pozitivi, iar cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n + (-2)^n}{3^n} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^n} \frac{1}{n}$ are aceeaşi natură cu seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, deci este divergentă. Pentru $y = -\frac{1}{3}$, seria de puteri în y devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Urmează că mulţimea de convergenţă a seriei în y este $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, iar ţinând seama că $y = x + 1$, deci $x = y - 1$, mulţimea de convergenţă seriei de puteri în x este $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Suma unei serii de puteri

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenţă $R > 0$ şi fie E mulţimea sa de convergenţă. S-a observat deja că $(-R, R) \subseteq E \subseteq [-R, R]$. Ca şi în cazul general al seriilor de funcţii, se poate defini funcţia $S : E \to \mathbb{R}$,

$$S : E \to \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

numită *suma* seriei de puteri, unde

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

reprezintă suma parţială de ordinul n a seriei de puteri.

Teorema 8.24. *Suma seriei de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este funcţie continuă pe* $(-R, R)$.

Demonstraţie. Fie $r \in (0, R)$. Conform teoremei lui Abel, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-r, r]$, iar cum sumele parţiale S_n ale seriei sunt funţii continue pe $[-r, r]$, urmează că S este funcţie continuă pe $[-r, r]$, întrucât proprietatea de continuitate a sumelor parţiale se transmite prin convergenţă uniformă. Cum $r \in (0, R)$ era arbitrar, urmează că S este funcţie continuă pe $(-R, R)$. ■

Comportarea funcţiei sumă în capetele intervalului de convergenţă

Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă şi în R sau $-R$, atunci funcţia sumă S este bine definită şi în aceste puncte, continuitatea sa neputându-se însă decide cu ajutorul teoremei de mai sus. Teorema de mai jos, numită şi *teorema a doua a lui Abel*, furnizează un răspuns în această direcţie.

Teorema 8.25. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *cu raza de convergenţă* $R > 0$. *Dacă seria de puteri este convergentă în* $x = R$ *(respectiv în* $x = -R$*), atunci suma sa* S *este funcţie continuă în* $x = R$ *(respectiv în* $x = -R$*).*

Combinând teorema a doua a lui Abel cu proprietatea de continuitate pe $(-R, R)$ obţinută anterior, observăm că suma unei serii de puteri este continuă în toate punctele în care este bine definită, lucru afirmat în următorul rezultat.

Corolar 8.25.1. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Atunci suma sa este o funcţie continuă pe mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.*

Derivarea unei serii de puteri

Fie
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$
o serie de puteri şi fie
$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_2 x^2 + \ldots + n a x^{n-1} + \ldots$$

seria de puteri obţinută prin derivarea termen cu termen a seriei iniţiale, numită *seria derivatelor*. Vom preciza în cele ce urmează legăturile dintre razele de convergenţă ale celor două serii şi dintre sumele acestora.

Teorema 8.26. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o serie de puteri şi fie* R *raza sa de convergenţă, iar* S *funcţia sa sumă. Atunci seria derivatelor* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *are aceeaşi rază de convergenţă* R*,* S *este derivabilă pe* $(-R, R)$*, iar*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \text{pentru } x \in (-R, R).$$

Să notăm că relaţia de derivare din teorema de mai sus se poate scrie sub forma

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

iar derivarea unei serii de puteri se poate face termen cu termen pe intervalul de convergenţua. Repetând raţionamentul în mod inductiv, se poate deduce următorul rezultat.

Teorema 8.27. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o serie de puteri şi fie* R *raza sa de convergenţă, iar* S *funcţia sa sumă. Atunci seria derivatelor de ordinul* k*,*

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \quad k \geq 1,$$

are aceeaşi rază de convergenţă, S *este indefinit derivabilă pe* $(-R, R)$*, iar*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \quad \text{pentru } x \in (-R, R).$$

Exerciţiu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

1. Determinaţi raza de convergenţă a acestei serii de puteri, studiaţi-i con-

vergenţa şi precizaţi suma sa.

2. Calculaţi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Soluţie. 1. Deoarece

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

urmează că raza de convergenţă a seriei de puteri date este $R = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Pentru $x = -1$ seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă, fiind seria armonică înmulţită cu constanta -1. În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei date este $(-1, 1]$.

Pentru $x \in (-1, 1)$, să notăm $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. Atunci

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Cum $S'(x) = \frac{1}{1+x}$, urmează că $S(x) = \ln(1+x) + C$, conform unui corolar al teoremei lui Lagrange. Deoarece $S(0) = 0$, se obţine că $C = 0$, iar $S(x) = \ln(1+x)$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Deoarece seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ este convergentă şi în $x = 1$, urmează conform celei de-a doua teoreme a lui Abel că suma sa S este funcţie continuă în $x = 1$, şi deci

$$S(1) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} S(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \ln(1+x) = \ln 2,$$

deci $S(x) = \ln(1+x)$ pentru orice $x \in (-1, 1]$.

2. În particular, din cele de mai sus se obţine că

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots = \ln 2.$$

8.3.2 Seria binomială

Fie seria de puteri

$$1+\frac{k}{1!}x+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\quad k\in\mathbb{R}, \tag{8.4}$$

numită în cele ce urmează *seria binomială*. Observăm că pentru $k=n$, $n\in\mathbb{N}$, seria se transformă într-o sumă finită, având ca rezultat o funcţie polinomială de gradul n. Vom presupune acum că $k\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)|}{(n+1)!}}{\frac{|k(k-1)\cdots(k-n+1)|}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|k-n|}{|n+1|}=1,$$

urmează că seria binomială (8.4) are raza de convergenţă $R=1$. Fie $S:(-1,1)\to\mathbb{R}$ suma sa. Atunci, conform teoremei de derivare a seriilor de puteri,

$$S'(x)=k+\frac{k(k-1)}{1!}x+\ldots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots,\quad x\in(-1,1)$$

de unde

$$xS'(x)=kx+\frac{k(k-1)}{1!}x^2+\ldots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n+\ldots,\quad x\in(-1,1)$$

iar

$$(1+x)S'(x)=kS(x),\quad x\in(-1,1).$$

De aici, înmulţind ambii membri cu $(1+x)^{k-1}$, obţinem că

$$(1+x)^kS'(x)-k(1+x)^{k-1}S(x)=0,\quad x\in(-1,1),$$

deci

$$\left(\frac{S(x)}{(1+x)^k}\right)'=0,\quad x\in(-1,1),$$

iar $S(x)=C(1+x)^k$, $C\in\mathbb{R}$. Deoarece $S(0)=1$, urmează că $C=1$, de unde $S(x)=(1+x)^k$. Obţinem deci că, pentru orice $x\in(-1,1)$,

$$(1+x)^k=1+\frac{k}{1!}x+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

formulă care generalizează formula binomială a lui Newton, valabilă pentru $k \in \mathbb{N}$. Pentru diverse valori particulare ale lui k se obţin sumele unor serii uzuale de puteri.

Astfel, pentru $k = -1$ obţinem

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1),$$

de unde, substituind x cu $-x$ obţinem

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1),$$

iar substituind x cu x^2 obţinem

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Pentru $k = \frac{1}{2}$ obţinem

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1),$$

iar pentru $k = -\frac{1}{2}$ obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Reamintim aici că $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots 2n$. Substituind x cu $-x^2$ obţinem că

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Integrarea unei serii de puteri

Teorema 8.28. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o serie de puteri şi fie* R *raza sa de convergenţă, iar* S *funcţia sa sumă. Atunci seria obţinută prin integrare termen cu termen* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *are aceeaşi rază de convergenţă* R, S *este integrabilă pe orice interval* $[a, b] \subseteq (-R, R)$, *iar*

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-R, R).$$

Exerciţiu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

1. Determinaţi raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.

2. Determinaţi suma seriei de puteri.

Soluţie. 1. Deoarece

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{n+1}{n+2}\right|}{\left|\frac{n}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)^2|}{|n(n+2)|} = 1,$$

urmează că raza de convergenţă a seriei de puteri date este $R = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. Pentru $x = -1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei date este $(-1, 1)$.

2. Observăm mai întâi că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Rămâne deci să calculăm suma seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = S(x)$. Cum

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

obţinem prin integrare termen cu termen în condiţiile Teoremei 8.28 că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1),$$

deci
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}, \quad x \in (-1, 1).$$
Alternativ, puteam observa că
$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),$$
deci $S(x) = -\ln(1-x) + C$. Deoarece $S(0) = 0$, urmează că $C = 0$, iar $S(x) = -\ln(1-x)$.

8.3.3 Dezvoltarea unei funcţii în serie Taylor

În situaţia în care o funcţie se poate reprezenta ca suma unei serii de puteri centrate în x_0, $x_0 \in \mathbb{R}$, ea se poate deriva uşor termen cu termen pe intervalul de convergenţă al seriei, derivatele sale exprimându-se tot ca serii de puteri cu aceeaşi rază de convergenţă. Astfel, dacă
$$\begin{aligned} f(x) = {} & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots, \\ & x \in (x_0 - R, x_0 + R), \end{aligned}$$
atunci
$$\begin{aligned} f'(x) = {} & a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}(x - x_0)^n + \cdots, \\ & x \in (x_0 - R, x_0 + R) \end{aligned}$$
şi, în general,
$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) = {} & k!a_k + (k+1)k \cdots 2a_{k+1}(x - x_0) + \cdots \\ & + (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1)(x - x_0)^n + \cdots, \\ & x \in (x_0 - R, x_0 + R), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$
Să notăm faptul că, înlocuind $x = x_0$ în formulele de mai sus, obţinem că
$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$
Cunoscându-se deci faptul că o funcţie f se poate exprima ca o serie de puteri centrată într-un punct oarecare şi cu raza de convergenţă nenulă (fiind deci indefinit derivabilă pe intervalul de convergenţă), se poate determina o formulă de calcul pentru derivatele sale de orice ordin în acel punct.

Teorema 8.29. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *o serie de puteri centrată în* x_0 *cu raza de convergenţă* $R > 0$*, mulţimea de convergenţă* E *şi suma* $f : E \to \mathbb{R}$*. Atunci* f *este indefinit derivabilă pe intervalul* $(x_0 - R, x_0 + R)$*, iar*

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k \quad \text{pentru orice } k \geq 0. \tag{8.5}$$

O întrebare naturală este dacă se poate reface drumul şi în sens invers, adică dată fiind o funcţie indefinit derivabilă, aceasta se poate scrie ca suma unei serii de puteri centrate într-un punct dat, coeficienţii seriei de puteri fiind calculaţi cu ajutorul formulei (8.5). În absenţa unor condiţii suplimentare asupra funcţiei f, răspunsul este negativ, aşa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Să observăm că pentru orice polinom $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(u)}{e^{u^2}} = \lim_{u\to-\infty} \frac{P(u)}{e^{u^2}} = 0,$$

egalităţi demonstrabile uşor cu ajutorul regulii lui l'Hôpital, şi deci

$$\lim_{x\to 0} P(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Se poate observa că

$$\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{(n)} = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}},$$

unde $(P_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}[X]$ este un şir de polinoame care verifică relaţia de recurenţă

$$P_{n+1}(X) = 2P_n(X)X^3 - X^2P_n'(X),$$

de unde, conform celor de mai sus, f admite derivate de orice ordin în $x = 0$, iar $f^{(k)}(0) = 0$ pentru $k \geq 0$. Atunci, conform formulei (8.5), ar trebui ca $a_k = 0$ pentru $k \geq 0$. Cum $f(x) \neq 0$ pentru $x \neq 0$, f nu poate fi suma seriei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, cu a_k, $k \geq 0$, precizaţi de (8.5) pe niciun subinterval al lui $\mathbb{R}$.

Vom preciza în continuare condiţii suplimentare cu ajutorul cărora se poate asocia unei funcţii f o serie de puteri centrată în x_0 şi convergentă la f prin intermediul formulelor (8.5).

Seria Taylor asociată unei funcţii într-un punct. Seria MacLaurin

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, şi fie $x_0 \in I$ astfel încât f este indefinit derivabilă în x_0. Vom numi *serie Taylor centrată în x_0 asociată lui f* seria de puteri T_f definită prin

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{8.6}$$

Pentru $x_0 = 0$, vom numi *seria MacLaurin asociată lui f* seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Să notăm că T_f este o serie de funcţii definite pe întreg $\mathbb{R}$, nu doar pe I, iar sumele parţiale de ordinul k, S_k, ale seriei Taylor centrate în x_0 asociate lui f sunt polinoamele Taylor definite în Capitolul 7, anume

$$\begin{aligned} T_k &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Totuşi, în acest moment, această asociere este pur formală, întrucât chiar dacă seria Taylor T_f definită mai sus converge în mod obligatoriu pentru $x = x_0$, ea poate să nu mai conveargă în niciun alt punct, având raza de convergenţă 0. Mai mult, chiar dacă seria Taylor T_f este convergentă, ea poate converge la o altă funcţie decât funcţia f iniţială, în acest sens putându-se observa exemplul de mai sus, în care T_f este funcţia identic nulă, fără ca f să aibă aceeaşi proprietate.

Vom spune atunci că $f : I \to \mathbb{R}$, f indefinit derivabilă în $x_0 \in I$, este *dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0* dacă seria Taylor centrată în x_0 asociată lui f are raza de convergenţă $R > 0$ şi converge la f pe $(x_0 - R, x_0 + R) \cap I$, adică

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \text{pentru } x \in (x_0 - R, x_0 + R) \cap I.$$

Convergenţa seriei Taylor

Să ne reamintim că
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$
unde R_n este restul formulei lui Taylor de ordinul n, iar T_n reprezintă polinomul Taylor de ordinul n, egal cu suma parţială de ordinul n a seriei de funcţii T_f. Intrucât dorim ca T_f să coincidă cu f cel puţin pentru funcţii f cu regularitate ridicată, intuim că diferenţa $R_n(x)$ între „funcţia ţintă" $f(x)$ şi suma parţială $T_n(x)$ trebuie să tindă la 0. Se poate obţine atunci următorul rezultat.

Teorema 8.30. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, şi fie $x_0 \in I$ astfel încât f este indefinit derivabilă în x_0. Fie de asemenea $a \in I$. Atunci seria Taylor T_f este convergentă în a la $f(a)$ dacă şi numai dacă şirul $(R_n(a))_{n\geq 0}$ al resturilor formulei lui Taylor calculate pentru $x = a$ este convergent la* 0.

Demonstraţie. Fie $a \in I$. Atunci
$$f(a) = T_n(a) + R_n(a) = S_n(a) + R_n(a),$$
unde S_n reprezintă sumele parţiale ale lui T_f, egale cu polinoamele Taylor de ordinul n, T_n. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(a) = 0 \Leftrightarrow (S_n(a))_{n\geq 0}$ este convergent, cu limita $f(a) \Leftrightarrow T_f$ este convergentă în $x = a$, iar $T_f(a) = f(a)$. ■

Estimând restul de ordinul n sub forma lui Lagrange, obţinem cu ajutorul teoremei de mai sus următoarele condiţii suficiente de convergenţă.

Teorema 8.31. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, $f \in C^\infty(I)$, astfel încât există $M > 0$ şi $\delta > 0$ cu proprietatea că*
$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M}{\delta^n} n! \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi } x \in I.$$
Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0, iar
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \text{pentru } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

Teorema 8.32. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, $f \in C^\infty(I)$, astfel încât există $M > 0$ cu proprietatea că*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi } x \in I.$$

Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0, iar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad \text{pentru } x \in I.$$

Demonstraţie. Ca mai sus,

$$|R_n(x)| \leq M\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Notând $a_n = \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$, observăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x - x_0|}{n+2} = 0.$$

De aici, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, deci $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, de unde concluzia. ■

Vom spune atunci că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, f indefinit derivabilă pe I, I interval, este *analitică* pe I dacă pentru orice $x_0 \in I$ f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0.

8.3.4 Exemple de dezvoltări în serie Taylor

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. S-a observat deja că

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta_x x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta_x \in (0, 1).$$

Atunci

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1},$$

iar cum $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, urmează că $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În concluzie,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Substituind x cu $-x$, obţinem şi că

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. S-a observat deja că

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}\sin\left(\theta_x x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \theta_x \in (0,1).$$

Atunci

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

iar cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În concluzie,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. S-a observat deja că

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cos\left(\theta_x x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \theta_x \in (0,1).$$

Atunci
$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!},$$
iar cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În concluzie,
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alte dezvoltări remarcabile în serie MacLaurin sunt
$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, && x \in (-1,1),\\
\arcsin x &= 1 + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, && x \in (-1,1),\\
\operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, && x \in \mathbb{R},\\
\operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Operaţii cu serii de puteri

Fie seriile de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, cu razele de convergenţă R_1, respectiv R_2, şi fie $c \in \mathbb{R}^*$.

Suma a două serii de puteri

Suma celor două serii de puteri este seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$, cu raza de convergenţă $R \ge \min(R_1, R_2)$. În plus,
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Seria produs cu o constantă

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n$ are raza de convergenţă R_1. În plus,
$$\sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R_1, R_1).$$

Seria produs după Cauchy

Seria produs după Cauchy a celor două serii de puteri este seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

cu raza de convergenţă $R \geq \min(R_1, R_2)$. În plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right), \quad x \in (-R, R).$$

Exerciţiu. Să se dezvolte în serie MacLaurin funcţile
1) $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x-7}{x^2-4x+3}$; 2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 e^{-2x}$.

Soluţie. 1) Se observă că f se poate descompune în fracţii simple sub forma

$$f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\},$$

fiind de asemenea cunoscut că

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} y^n, \quad y \in (-1, 1).$$

Atunci

$$\frac{2}{x-1} = -2\frac{1}{1-x} = -2\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$
$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n, \quad x \in (-3, 3).$$

De aici

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(2 + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

2) Este cunoscut că

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Atunci
$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$
de unde
$$x^3 e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n-3}}{(n-3)!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicaţii

8.1. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$.

1. *Demonstraţi că* $x_n = \frac{n}{n+1}$ *este punct de maxim pentru* f_n, *iar*
$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi orice } x \in [0,1].$$

2. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent uniform către funcţia nulă pe* $[0,1]$.

8.2. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$.

1. *Demonstraţi că*
$$|f_n(x) - |x|| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi orice } x \in \mathbb{R}.$$

2. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent uniform către funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

8.3. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n+x}{n+1}$.

1. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent punctual către funcţia constantă* 1 *pe* $[1,\infty)$.

2. *Calculaţi* $f_n(n+2)$. *Este* $(f_n)_{n\geq 0}$ *convergent şi uniform către funcţia constantă* 1 *pe* $[1,\infty)$?

8.4. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent punctual către funcţia nulă pe* $[0,1]$.

2. *Calculaţi* $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$. *Este* $(f_n)_{n\geq 0}$ *convergent şi uniform către funcţia nulă pe* $[0,1]$?

8.5. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

1. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent punctual către funcţia nulă pe* $[0,1]$.
2. *Calculaţi* $f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)$. *Este* $(f_n)_{n\geq 0}$ *convergent şi uniform către funcţia nulă pe* $[0,1]$*?*

8.6. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{n(x-1)}$.

1. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent punctual către funcţia nulă pe* $(0,1)$.
2. *Calculaţi* $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. *Este* $(f_n)_{n\geq 0}$ *convergent şi uniform către funcţia nulă pe* $(0,1)$*?*

8.7. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$.

1. *Folosind eventual inegalitatea* $a^2 + b^2 \geq 2ab$ *pentru orice* $a, b \geq 0$, *demonstraţi că*
$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi orice } x \in \mathbb{R}.$$
2. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este uniform convergent către funcţia nulă pe* $\mathbb{R}$.

8.8. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx+2)+n}{\sqrt{n^2+1}}$.

1. *Demonstraţi că*
$$|f_n(x) - 1| < \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi orice } x \in \mathbb{R}.$$
2. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniform către funcţia constantă* 1 *pe* $\mathbb{R}$.

8.9. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin \frac{nx}{n+1}$.

1. *Demonstraţi că*
$$|f_n(x) - \sin x| \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi orice } x \in \mathbb{R}.$$
2. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniform către funcţia* $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

8.10. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin^n x$.

1. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent punctual către funcţia* $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

2. *Este* $(f_n)_{n\geq 0}$ *convergent şi uniform la* f*?*

8.11. *Fie* $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}] \\ 1, & \text{în rest} \end{cases}$.

1. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent punctual către funcţia constantă* 1 *pe* $\mathbb{R}$.

2. *Este* $(f_n)_{n\geq 0}$ *convergent şi uniform la această funcţie?*

8.12. *Fie* $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx}{n+x}, & x \in [0, \frac{n-1}{n}] \\ x, & x \in (\frac{n-1}{n}, 1] \end{cases}$. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 1}$ *este uniform convergent.*

8.13. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie uniform continuă şi fie* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$, $n \geq 1$. *Demonstraţi că* $f_n \xrightarrow{u} f$ *pentru* $n \to \infty$.

8.14. *Fie* $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. *Demonstraţi că* $f_n \xrightarrow{u} f$ *pentru* $n \to \infty$, *dar* $f_n^2 \overset{u}{\not\to} f^2$ *pentru* $n \to \infty$.

8.15. *Fie* $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$. *Determinaţi funcţia limită a şirului* $(f_n)_{n\geq 1}$ *şi demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniform la această funcţie.*

8.16. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n+\cos nx}{n+1}$. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este uniform convergent, dar* $(f_n')_{n\geq 0}$ *nu este uniform convergent.*

8.17. *Determinaţi suma seriei* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

8.18. *Fie seria de funcţii* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$.

1. *Determinaţi suma parţială de ordinul* n, S_n, *a seriei.*

2. *Demonstraţi că seria de funcţii dată este uniform convergentă.*

8.19. *Fie seria de funcţii* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$, $x \in [1, \infty)$.

1. *Determinaţi suma parţială de ordinul n, S_n, a seriei.*
2. *Demonstraţi că seria de funcţii dată este uniform convergentă.*

8.20. *Folosind eventual criteriul lui Weierstrass, demonstraţi că următoarele serii de funcţii sunt absolut şi uniform convergente pe $\mathbb{R}$.*
1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n^2}$; *2)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^4+x^2}}$; *3)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}$.

8.21. *Folosind eventual inegalitatea $|\sin y| \leq |y|$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, demonstraţi că seria de funcţii* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ *este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.*

8.22. *Folosind eventual inegalitatea $|\operatorname{arctg} y| \leq |y|$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, demonstraţi că seria de funcţii* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^4}$ *este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$.*

8.23. *Folosind criteriul lui Dirichlet, demonstraţi convergenţa uniformă a următoarelor serii de funcţii.*
1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; *2)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{\cos nx}{n}$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

8.24. *Fie seria de funcţii* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$.

1. *Demonstraţi că* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.*
2. *Demonstraţi că* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.*
3. *Folosind teorema de derivare termen cu termen, respectiv proprietatea de transfer de continuitate în condiţii de convergenţă uniformă, demonstraţi că suma seriei* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă.*

8.25. *Demonstraţi că suma seriei de funcţii* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ *este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$.*

8.26. *Demonstraţi că suma seriei de funcţii* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$ *este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi cu derivata continuă.*

8.27. *Determinaţi raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri.*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+2n} x^n$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n+3}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) x^n$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^{n+2}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{n+2} x^n$.

8.28. *Precizaţi mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de funcţii reductibile la serii de puteri prin schimbări de variabilă.*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2} \left(\frac{x}{3}\right)^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{4n^3+2n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$;
4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{(n^3+2)x^{2n}}$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2+3n+2}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2+\frac{1}{4})^n}{(n+1)(n+2)x^n}$.

8.29. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{3n-2}}{3n-2}$.

1. *Determinaţi raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.*
2. *Notând cu S suma seriei de puteri, demonstraţi că*

$$S'(x) = \frac{1}{1+x^3}, \quad x \in (-1,1).$$

3. *Demonstraţi că* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

8.30. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$.

1. *Determinaţi raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.*
2. *Folosind eventual egalitatea*

$$(n+1)^2 x^n = (n+2)(n+1)x^n - (n+1)x^n$$

precum şi teorema de derivare termen cu termen aplicată seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, *determinaţi suma seriei date.*

8.31. *Fie seria de funcţii* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$.

1. *Determinaţi mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii.*

2. *Notând cu S funcţia sa sumă, demonstraţi că*

$$S'(x) = S(x) - \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad x > 0.$$

8.32. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

1. *Determinaţi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.*

2. *Notând cu S funcţia sa sumă, demonstraţi că*

$$\int_0^x S(t)dt = \frac{x}{1+x^2}.$$

3. *Determinaţi S.*

8.33. *Folosind eventual egalitatea*

$$\frac{x+5}{x^2+4x+3} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\},$$

dezvoltaţi în serie MacLaurin funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+5}{x^2+4x+3}$.

8.34. *Folosind eventual egalitatăţile*

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3} - x\frac{1}{1-x^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

dezvoltaţi în serie MacLaurin funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$.

8.35. *Folosind eventual egalitatea*

$$\ln \frac{1+x}{1+x^2} = \ln(1+x) - \ln(1+x^2), \quad x \in (-1, \infty),$$

dezvoltaţi în serie MacLaurin funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1+x^2}$.

8.36. *Folosind eventual egalitatea*

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in (-2, 2)$$

dezvoltaţi în serie MacLaurin funcţia $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.