

Capitolul 3

INTEGRALE IMPROPRII

În definiția integralei Riemann, s-a presupus că intervalul de integrare $[a, b]$ este un interval închis și mărginit, demonstrându-se mai apoi că o funcție integrabilă este în mod necesar și mărginită. Totuși, apar în mod natural situații în care aceste condiții nu sunt îndeplinite.

În cele ce urmează, vom extinde noțiunea de integrală Riemann pentru a acoperi aceste cazuri (interval de integrare nemărginit, respectiv integrand nemărginit pe intervalul de integrare), obținându-se așa-numitele **integrale improprii** sau **integrale generalizate**. Prin analogie cu seriile numerice, pentru care convergența sau divergența seriei erau definite cu ajutorul limitei șirului sumelor parțiale, vom defini convergența sau divergența unor integrale improprii cu ajutorul unui procedeu de trecere la limită pentru integrale „parțiale”, pe domenii mai mici, pe care se evită situațiile problematice în cauză.

Vom începe mai întâi cu situația în care intervalul de integrare este nemărginit, continuând apoi cu situația în care integrandul este nemărginit pe intervalul de integrare.

3.1 Integrale improprii în raport cu intervalul

Integralele pentru care intervalul de integrare este nemărginit se numesc **integrale improprii în raport cu intervalul**, sau de **specia (speța) I**.

Vom studia mai întâi integrale de tipul $\int_a^\infty f(x)dx$. În acest sens, fie $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $A > a$. Putem atunci vorbi despre $\int_a^A f(x)dx$ pentru orice $A > a$, următorul pas fiind cel

de a studia ceea ce se întâmplă când $A \rightarrow \infty$ (ne „apropiem” de $+\infty$ prin trecere la limită).

3.1.1 Convergență și divergență. Integrabilitate

Definiție. Fie $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $A > a$.

Dacă există limita $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$ și este finită, spunem că integrala $\int_a^\infty f(x) dx$ este **convergentă** iar funcția f este **integrabilă** pe $[a, \infty)$ (pe scurt, **integrabilă**).

Dacă limita $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$ nu există, sau există, dar este infinită, spunem că integrală $\int_a^\infty f(x) dx$ este **divergentă** iar funcția f **nu este integrabilă** pe $[a, \infty)$ (pe scurt, **nu este integrabilă**).

În situația în care limita $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$ există (finită sau nu), această limită reprezintă **valoarea integralei** $\int_a^\infty f(x) dx$.

Exemple. 1. Fie integrala $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$. Funcția

$$f_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

este integrabilă pe orice interval $[0, A]$, $A > 0$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \arctg A = \frac{\pi}{2},$$

deci integrala $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}$ este convergentă, valoarea sa este $\frac{\pi}{2}$, iar f_1 este integrabilă pe $[0, \infty)$.

2. Fie integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$. Funcția

$$f_2 : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x},$$

este integrabilă pe orice interval $[1, A]$, $A > 1$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty,$$

deci integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ este divergentă, valoarea sa fiind $+\infty$, iar f_2 nu este integrabilă pe $[1, \infty)$.

3. Fie integrala $\int_0^{\infty} \cos x dx$. Funcția

$$f_3 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \cos x,$$

este integrabilă pe orice interval $[0, A]$, $A > 0$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \sin x \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \sin A, \text{ care nu există.}$$

Integrala $\int_0^{\infty} \cos x dx$ este divergentă, fără a i se asocia o valoare, iar f_3 nu este integrabilă pe $[0, \infty)$.

Exemplu. Fie integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$. Printr-un raționament similar celui din Exemplul 2 de mai sus putem arăta că

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă,} & \text{pentru } p > 1, \\ \text{divergentă,} & \text{pentru } p \leq 1. \end{cases}$$

Integrale improprii de speța I cu integrand pozitiv

Fie $f : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $a < A$. Să notăm

$$F : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(A) = \int_a^A f(x)dx.$$

Întrucât f este pozitivă, F este crescătoare, valoarea integralei crescând odată cu creșterea lungimii intervalului. Atunci limita $\lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$, utilizată în definițiile convergenței și divergenței, există, finită sau nu. Are deci loc următorul rezultat, similar în natura sa cu proprietatea seriilor cu termeni pozitivi de a fi sau convergente, sau divergente către $+\infty$.

Teorema 3.1. Fie $f : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $a < A$. Atunci integrala $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este fie convergentă, fie divergentă cu valoarea $+\infty$.

Alte tipuri de intervale nemărginite

În mod similar definim convergența unor integrale de tipul $\int_{-\infty}^a f(x)dx$, cu ajutorul limitei

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x)dx,$$

respectiv a unor integrale de tipul $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, cu ajutorul limitei

$$\lim_{\substack{B \rightarrow \infty \\ A \rightarrow -\infty}} \int_A^B f(x)dx.$$

3.1.2 Convergența în sensul valorii principale (Cauchy)

Pentru definiția integralei $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, este important să se observe faptul că limita

$$\lim_{\substack{B \rightarrow \infty \\ A \rightarrow -\infty}} \int_A^B f(x)dx$$

conține două variabile diferite, A și B , întrucât ne putem apropia de $-\infty$ și $+\infty$ în mod independent. Acest lucru se poate observa și cu ajutorul relației

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

pentru $a \in (-\infty, +\infty)$ oarecare, în care convergența primei integrale este independentă de convergența celei de-a doua.

Definiție. Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[-A, A]$ pentru orice $A > 0$ iar limita cu o singură variabilă

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x)dx,$$

caz particular al celei de mai sus (ne îndreptăm către $-\infty$ și $+\infty$ „cu aceeași viteză”), există și este finită, spunem că integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ este **convergentă în sensul valorii principale (Cauchy)**, valoarea sa principală, notată

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

fiind valoarea limitei.

Relația între convergență și convergență în sensul valorii principale

Conform definiției, dacă integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă, atunci ea este convergentă și în sensul valorii principale (Cauchy). Să observăm însă că implicația reciprocă nu are loc.

Fie integrala $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$. Deoarece

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A xdx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-A}^A = 0,$$

urmează că integrala $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ este convergentă în sensul valorii principale, iar

v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$. Totuși

$$\lim_{\substack{B \rightarrow \infty \\ A \rightarrow -\infty}} \int_A^B xdx = \lim_{\substack{B \rightarrow \infty \\ A \rightarrow -\infty}} \frac{x^2}{2} \Big|_A^B = \lim_{\substack{B \rightarrow \infty \\ A \rightarrow -\infty}} \frac{B^2 - A^2}{2}$$

nu există, integrala $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ nefiind deci convergentă.

3.1.3 Proprietăți de calcul

Integralele improprii păstrează cele mai multe proprietăți ale integralelor definite. În particular, au loc următoarele proprietăți de calcul, prima reprezentând **proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul**, cea de-a doua reprezentând **proprietatea de aditivitate în raport cu funcția**.

Teorema 3.2. Fie $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a, \infty)$. Atunci f este integrabilă pe orice subinterval $[c, \infty)$, $c > a$, și

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Demonstrație. Fie $c > a$ arbitrar. Fie de asemenea $A > c$. Atunci f este integrabilă pe $[c, A]$, iar conform proprietății de aditivitate a integralei definite în raport cu intervalul, avem că

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx \right) \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{A \rightarrow \infty} \int_c^A f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx + \lim_{A \rightarrow \infty} \int_c^A f(x)dx, \end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

Teorema 3.3. Fie $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, \infty)$ și $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1f + c_2g$ este integrabilă pe $[a, \infty)$, și

$$\int_a^\infty (c_1f(x) + c_2g(x))dx = c_1 \int_a^\infty f(x)dx + c_2 \int_a^\infty g(x)dx$$

Demonstrația se obține din proprietatea corespunzătoare a integralei definite printr-un procedeu de trecere la limită similar celui de mai sus.

3.1.4 Criterii de convergență

Criteriul de comparație

Teorema 3.4. Fie $f, g : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, astfel încât

$$f(x) \leq g(x), \quad \text{pentru orice } x \in [a, \infty).$$

1. Dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este convergentă, atunci și $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.
2. Dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă, atunci și $\int_a^\infty g(x)dx$ este divergentă.

Demonstrație. Fie $A > a$. Atunci

$$\int_a^A f(x)dx \leq \int_a^A g(x)dx,$$

întrucât inegalitățile între funcții se păstrează prin integrare. Conform Teoremei 3.1, există

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx, \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A g(x)dx = \int_a^\infty g(x)dx,$$

iar prin trecere la limită pentru $A \rightarrow \infty$ în inegalitatea de mai sus obținem că

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx.$$

Dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este convergentă, atunci membrul drept este finit, și atunci la fel este și membrul stâng, iar $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă. Dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă, atunci membrul stâng este infinit, și atunci la fel este și membrul drept, iar $\int_a^\infty g(x)dx$ este divergentă. ■

Rezultatul este ușor de reținut (și înțeles) ținând seama de următoarea observație. Integrala pe $[a, \infty)$ a unei funcții pozitive este fie „mică” (convergentă, cu valoare numerică), fie „mare” (divergentă), cu valoarea $+\infty$.

Cum $f \leq g$, inegalitatea se păstrează și între cele două integrale, adică

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx.$$

Dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este „mică” (convergentă), atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este „și mai mică” (tot convergentă). Dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este „mare” (divergentă), atunci $\int_a^\infty g(x)dx$ este „și mai mare” (tot divergentă).

Tot de aici putem observa că nu putem trage nicio concluzie dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este divergentă, întrucât $\int_a^\infty f(x)dx$ este „mai mică”, dar poate fi sau „mică” (convergentă), sau „mare” (divergentă). Similar, dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă, atunci nu putem obține nicio concluzie.

Teorema 3.5. Fie $f : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, integrabilă pe $[a, A]$ pentru orice $A > a$.

1. Dacă există $p > 1$ astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = l \in [0, \infty)$$

atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.

2. Dacă există $p \leq 1$ astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = l \in (0, \infty]$$

atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Combinând cele două proprietăți obținem următorul criteriu de convergență util în aplicații.

Corolar 3.5.1. Fie $f : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ continuă astfel încât există $p \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = l \in (0, \infty).$$

Atunci

1. Dacă $p > 1$, atunci integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.

2. Dacă $p \leq 1$, atunci integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Remarcăm faptul că în situația în cauză, integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ are comportament „invers” lui p . Astfel dacă p este „mic” (≤ 1), integrala este „mare” (divergentă cu valoarea $+\infty$), iar dacă p este „mare” (> 1), integrala este „mică” (convergentă).

Exemplu. Studiați convergența integralei $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$.

Soluție. Deoarece integrandul are comportarea aproximativă a lui $\frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$ pentru $x \rightarrow \infty$, alegem $p = 2$. Atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{x^4(1+\frac{1}{x^4})}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = 1 \in (0, \infty).$$

Cum $p = 2 > 1$, urmează că $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$ este convergentă.

Exemplu. Studiați convergența integralei $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3}dx$.

Soluție. Deoarece integrandul are comportarea aproximativă a lui $\frac{\sqrt{x}}{x^3} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ pentru $x \rightarrow \infty$, alegem $p = \frac{5}{2}$. Atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3+2x+3} = 1 \in (0, \infty).$$

Deoarece $p = \frac{5}{2} > 1$, urmează că integrala $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3}dx$ este convergentă.

Exemplu. Studiați convergența integralei $\int_2^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Soluție. Deoarece numitorul are comportarea aproximativă a lui $\sqrt{x^2} = x$ pentru $x \rightarrow \infty$, iar numărătorul este mărginit, alegem $p = 1$. Atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\pi}{2} \in (0, \infty).$$

Deoarece $p = 1$, urmează că integrala $\int_2^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ este divergentă.

3.1.5 Transformarea într-o serie numerică

Integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ poate fi transformată într-o serie numerică. Astfel, are loc egalitatea

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^{a+1} f(x)dx + \int_{a+1}^{a+2} f(x)dx + \dots$$

Cu notația $a_n = \int_{a+n}^{a+n+1} f(x)dx$, $n \geq 0$, urmează că

$$\int_a^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

În acest fel, convergența unei integrale improprii în raport cu intervalul poate fi legată de convergența unei serii numerice. Desigur, transformarea integralei într-o serie numerică nu este unică, intervalul $[a, \infty)$ putând fi împărțit și în alte moduri.

Teorema 3.6. Fie $f : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, f continuă și monoton descrescătoare. Atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ are aceeași natură cu $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$, unde indicele de plecare $k \in [a, \infty)$ poate fi ales convenabil.

Exemplu. Studiați convergența integralei $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx$

Soluție. Funcția

$$f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}},$$

este continuă și monoton descrescătoare pe $[1, \infty)$. Urmează că $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx$

are aceeași natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$.

Studiem acum natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$ cu ajutorul unui criteriu de comparație. Întrucât

$$\frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2},$$

iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (serie armonică generalizată cu $p = 2 > 1$), urmează că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$ este convergentă. La rândul ei, integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx$ este convergentă, având aceeași natură cu această serie.

3.1.6 Convergență absolută

Definiție. Fie $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este **absolut convergentă**, iar f este **absolut integrabilă** pe $[a, \infty)$, dacă $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ este convergentă, adică $|f|$ este integrabilă pe $[a, \infty)$.

Se poate demonstra că dacă $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este absolut convergentă, atunci este și convergentă, nefiind însă valabilă și reciproca (așa cum numele sugerează, absoluta convergență înseamnă **mai mult** decât convergența). Pentru funcții cu valori pozitive, cum $|f|$ coincide cu f , noțiunea de absolută convergență coincide cu noțiunea de convergență.

3.2 Integrale improprii în raport cu funcția

Integralele pentru care integrandul este nemărginit pe intervalul de integrare se numesc **integrale improprii în raport cu funcția**, sau de **specia (speța) II**.

Vom studia mai întâi integrale de tipul $\int_a^b f(x) dx$ în care limita inferioară a este punct singular, în sensul că f este nemărginită într-o vecinătate a lui a .

Definiție. Fie $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că a este **punct singular** pentru funcția f dacă f este mărginită pe orice subinterval $[A, b]$, $a < A < b$, dar f este nemărginită pe $(a, b]$.

Prototip

Un prototip al acestor integrale este integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$, $p > 0$, în care integrandul nu este definit în $x = 0$, punctul singular, nefiind nici mărginit pe $(0, 1]$, întrucât limita sa la dreapta în $x = 0$ este $+\infty$.

Fie $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A, b]$, $a < A < b$. Putem atunci vorbi despre $\int_A^b f(x)dx$ pentru orice $a < A < b$, următorul pas fiind cel de a studia ceea ce se întâmplă când $A \rightarrow a$, punctul singular al funcției (ne „apropiem” de punctul singular prin trecere la limită).

3.2.1 Convergență și divergență. Integrabilitate

Definiție. Fie $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A, b]$, $a < A < b$.

Dacă există limita $\lim_{\substack{A \rightarrow a \\ A > a}} \int_A^b f(x)dx$ și este finită, spunem că integrala $\int_a^b f(x)dx$ este **convergentă** iar funcția f este **integrabilă** pe $(a, b]$ (pe scurt, **integrabilă**).

Dacă limita $\lim_{\substack{A \rightarrow a \\ A > a}} \int_A^b f(x)dx$ nu există, sau există, dar este infinită, spunem că integrală $\int_a^b f(x)dx$ este **divergentă** iar funcția f **nu este integrabilă** pe $(a, b]$ (pe scurt, **nu este integrabilă**).

În situația în care limita $\lim_{\substack{A \rightarrow a \\ A > a}} \int_A^b f(x)dx$ există (finită sau nu), această limită reprezintă **valoarea integralei** $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple. 1. Fie integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$, $p \in (0, 1)$. Punctul singular al funcției este $x = 0$, întrucât $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^p} = +\infty$. Funcția

$$f_1 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{1}{x^p},$$

este integrabilă pe orice interval $[A, 1]$, $0 < A < 1$, întrucât este conti-

nuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ A > 0}} \int_A^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ A > 0}} \int_A^1 x^{-p} dx = \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ A > 0}} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_A^1 \right) \\ &= \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ A > 0}} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{A^{1-p}}{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}. \end{aligned}$$

Integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$, $p \in (0, 1)$ este deci convergentă, cu valoarea $\frac{1}{1-p}$.

2. Fie integrala $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$. Ca mai sus, punctul singular al funcției este $x = 0$, funcția

$$f_2 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x},$$

este integrabilă pe orice interval $[A, 1]$, $0 < A < 1$, iar

$$\lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ A > 0}} \int_A^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ A > 0}} \ln x \Big|_A^1 = \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ A > 0}} (\ln 1 - \ln A) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

Integrala $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ este deci divergentă, cu valoarea $+\infty$.

3. Fie integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$, $p > 1$. Ca mai sus, punctul singular al funcției este $x = 0$, funcția

$$f_3 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x^p},$$

este integrabilă pe orice interval $[A, 1]$, $0 < A < 1$, iar

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ A > 0}} \int_A^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ A > 0}} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{A^{1-p}}{1-p} \right) = \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ A > 0}} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{A^{p-1}(1-p)} \right) \\ &= \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(0+) \cdot (1-p)} = +\infty. \end{aligned}$$

Integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$, $p > 1$ este deci divergentă, cu valoarea $+\infty$. Obținem din cele de mai sus că

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă,} & \text{pentru } p < 1, \\ \text{divergentă,} & \text{pentru } p \geq 1. \end{cases}$$

Integrale improprii de speța II cu integrand pozitiv

Fie $f : (a, b] \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A, b]$, $a < A < b$. Putem obține următorul rezultat analog celui corespunzător pentru integrale improprii de speța I.

Teorema 3.7. Fie $f : (a, b] \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A, b]$, $a < A < b$. Atunci integrala $\int_a^b f(x) dx$ este fie convergentă, fie divergentă cu valoarea $+\infty$.

3.2.2 Proprietăți de calcul

Au loc următoarele proprietăți de calcul, similare celor pe care le au integralele improprii de speța I.

Teorema 3.8. Fie $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f integrabilă pe $(a, b]$. Atunci f este integrabilă pe orice subinterval $(a, c]$, $a < c < b$, și

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Teorema 3.9. Fie $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $(a, b]$ și $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe $(a, b]$, și

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx.$$

3.2.3 Criterii de convergență

Teorema 3.10. Fie $f : (a, b] \rightarrow [0, \infty)$, integrabilă pe $[A, b]$ pentru orice $a < A < b$.

1. Dacă există $p < 1$ astfel ca

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} (x - a)^p f(x) = l \in [0, \infty),$$

atunci $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă.

2. Dacă există $p \geq 1$ astfel ca

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} (x - a)^p f(x) = l \in (0, \infty],$$

atunci $\int_a^b f(x) dx$ este divergentă.

Demonstrația este similară demonstrației Teoremei 3.5, criteriul corespunzător de convergență pentru integrale improprii de specia I.

Corolar 3.10.1. Fie $f : (a, b] \rightarrow [0, \infty)$ continuă astfel încât există $p \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} (x - a)^p f(x) = l \in (0, \infty).$$

Atunci

1. Dacă $p < 1$, atunci integrala $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă.

2. Dacă $p \geq 1$, atunci integrala $\int_a^b f(x) dx$ este divergentă.

Remarcăm faptul că în situația în cauză, integrala $\int_a^b f(x) dx$ are comportamentul lui p . Astfel dacă p este „mic” ($p < 1$), integrala este „mică” (convergentă), iar dacă p este „mare” (> 1), integrala este „mare” (divergentă cu valoarea $+\infty$).

Exemplu. Studiați convergența integralei $\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3} dx$.

Soluție. Deoarece

$$\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2(5-x)} dx,$$

urmează că $x = 0$ este punct singular pentru integrand (cealaltă rădăcină a numitorului, $x = 5$, nu aparține intervalului de integrare). Deoarece termenul care anulează numitorul în punctul singular, x^2 , are puterea 2, alegem $p = 2$. Atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x-0)^2 \frac{1}{x^2(5-x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} \in (0, \infty).$$

Cum $p = 2 > 1$, urmează că integrala $\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3} dx$ este divergentă, cu valoarea $+\infty$.

Exemplu. Studiați convergența integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$.

Soluție. Deoarece

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

iar numitorul se anulează pentru $x = 0$, în timp ce numărătorul nu, urmează că $x = 0$ este punct singular. Deoarece termenul care anulează numitorul în punctul singular, $\sin x$, are comportarea aproximativă a lui x pentru $x \rightarrow 0$, lucru observabil cu ajutorul limitei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

alegem $p = 1$. Urmează că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^1 \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \cos x \frac{x}{\sin x} = 1 \in (0, \infty).$$

Deoarece $p = 1$, urmează că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$ este divergentă.

3.2.4 Convergență absolută

Definiție. Fie $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că $\int_a^b f(x) dx$ este **absolut convergentă**, iar f este **absolut integrabilă** pe $(a, b]$ dacă $\int_a^b |f(x)| dx$ este convergentă, adică $|f|$ este integrabilă pe $(a, b]$.

Se poate demonstra că dacă $\int_a^b f(x)dx$ este absolut convergentă, atunci este și convergentă pe $(a, b]$, nefiind însă valabilă și reciproca (din nou, așa cum numele sugerează, absoluta convergență înseamnă **mai mult** decât convergența). Pentru funcții cu valori pozitive, cum $|f|$ coincide cu f , noțiunea de absolută convergență coincide cu noțiunea de convergență.

Integrale improprii cu limita superioară punct singular

Integralele de tipul $\int_a^b f(x)dx$ în care limita superioară b este punct singular, în sensul că f este nemărginită într-o vecinătate a lui b , se studiază analog celor în care limita inferioară este punct singular, utilizând „apropierea” de punctul singular b prin trecere la limită.

Definiție. Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că b este **punct singular** pentru funcția f dacă f este mărginită pe orice subinterval $[a, A]$, $a < A < b$, dar f este nemărginită pe $[a, b)$.

Prototip

Un prototip al acestor integrale este integrala $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p} dx$, $p > 0$, în care integrandul nu este definit în $x = 1$, punctul singular, nefiind nici mărginit pe $[0, 1)$, întrucât limita sa la stânga în $x = 1$ este $+\infty$.

Prin analogie, pentru integralele improprii cu limita superioară punct singular se pot obține următoarele criterii de convergență.

Criterii de convergență

Teorema 3.11. Fie $f : [a, b) \rightarrow [0, \infty)$, integrabilă pe $[a, A]$ pentru orice $a < A < b$.

1. Dacă există $p < 1$ astfel ca

$$\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} (b-x)^p f(x) = l \in [0, \infty)$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

2. Dacă există $p \geq 1$ astfel ca

$$\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} (b-x)^p f(x) = l \in (0, \infty]$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Corolar 3.11.1. Fie $f : [a, b) \rightarrow [0, \infty)$ continuă astfel încât există $p \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} (b-x)^p f(x) = l \in (0, \infty).$$

Atunci

1. Dacă $p < 1$, atunci integrala $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

2. Dacă $p \geq 1$, atunci integrala $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Exemplu. Studiați convergența integralei $\int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{5-x}} dx$.

Soluție. Observăm că $x = 5$ este punct singular, întrucât celălalt punct în care se anulează numitorul, $x = 1$, nu aparține intervalului de integrare. Deoarece termenul care anulează numitorul, $\sqrt{5-x}$, poate fi scris ca $(5-x)^{\frac{1}{2}}$, având puterea $\frac{1}{2}$, alegem $p = \frac{1}{2}$. Urmează că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} (5-x)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{5-x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} \frac{x^2}{x-1} = \frac{25}{4} \in (0, \infty).$$

Deoarece $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că integrala $\int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{5-x}} dx$ este convergentă.

Integrale improprii cu mai mult de un punct singular

Pot fi întâlnite însă și integrale improprii de speța II cu mai mult de un punct singular, sau integrale improprii în care atât intervalul de integrare este nemărginit, cât și funcția de integrat este nemărginită pe acest interval, având puncte singulare finite. Acestea din urmă combină atât caracteristicile integralelor improprii de speța I, cât și ale celor de speța II.

În această situație, se scrie integrala ca suma mai multor integrale improprii, fiecare cu câte un unic punct singular, respectiv ca suma dintre o integrală improprie de speța I și una de speța II.

Exemplu. Studiați convergența integralei $\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} dx$.

Soluție. În această situație, atât $x = 1$ cât și $x = 4$ sunt puncte singulare, fiind rădăcini ale numitorului. Scriem integrala sub forma

$$\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} dx + \int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} dx,$$

ca suma între o integrală cu limita inferioară punct singular (prima integrală) și o integrală cu limita superioară punct singular (a doua integrală). Deoarece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x-1)^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^3}{(4-x)^2} = \frac{1}{9} \in (0, \infty),$$

iar $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că $\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} dx$ este convergentă.

Deoarece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} (4-x)^2 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} = \frac{64}{\sqrt{3}} = \frac{64\sqrt{3}}{3} \in (0, \infty),$$

iar $p = 2 > 1$, urmează că integrala $\int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} dx$ este divergentă. Fiind suma dintre o integrală convergentă și una divergentă, integrala $\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} dx$ este divergentă.

Exemplu. Studiați convergența integralei $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} dx$.

Soluție. În această situație, $x = 0$ este punct singular, fiind rădăcină a numitorului, iar intervalul de integrare este nemărginit. Scriem integrala sub forma

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} dx,$$

ca suma între o integrală improprie de speța II cu limita inferioară punct singular (prima integrală) și o integrală improprie de speța I (a doua integrală). Deoarece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{1+x^2} = 1 \in (0, \infty),$$

iar $p = \frac{1}{3} < 1$, urmează că $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} dx$ este convergentă. Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{7}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \in (0, \infty),$$

iar $p = \frac{7}{3} > 1$, urmează că integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} dx$ este de asemenea convergentă. De aici, integrala improprie $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} dx$ este convergentă, fiind suma a două integrale improprii convergente.

3.3 Integrale improprii dependente de parametri

Dependența de parametru poate apare și în contextul integralelor improprii. Prezentăm în continuare două dintre cele mai cunoscute integrale de acest tip.

3.3.1 Funcția Γ a lui Euler

Integrala

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

este convergentă pentru orice $p > 0$, definind astfel o funcție $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Integrala de mai sus se mai numește și **integrala lui Euler de speția (speța) II**.

Proprietăți ale funcției Γ

Teorema 3.12. *Au loc următoarele proprietăți.*

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, pentru orice $p > 0$ (**formula de recurență**).
3. $\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2) \cdots p\Gamma(p)$, pentru orice $p > 0, n \in \mathbb{N}$.

$$4. \Gamma(n+1) = n!, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

$$5. \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \text{ pentru orice } p \in (0,1) \text{ (formula complementelor).}$$

$$6. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Exemplu. Determinați $\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx$.

Soluție. Observăm că

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}}e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^{\frac{3}{2}-1}e^{-x}dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

Conform formulei de recurență, urmează că

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Exemplu. Demonstrați că

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{(integrala Euler-Poisson).}$$

Soluție. Să notăm $u = x^2$. Atunci

$$u = x^2 \implies x = \sqrt{u} \implies dx = (\sqrt{u})'du = \frac{1}{2\sqrt{u}}du,$$

de unde

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx &= \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u}}e^{-u}du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

3.3.2 Funcția β a lui Euler

Integrala

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

este convergentă pentru orice $p, q > 0$, definind astfel o funcție $\beta : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Integrala de mai sus se mai numește și **integrala lui Euler de specia (speța) I**.

Proprietăți ale funcției β

Teorema 3.13. *Au loc următoarele proprietăți.*

1. $\beta(1,1) = 1$.
2. $\beta(p,q) = \beta(q,p)$, pentru orice $p, q > 0$.
3. $\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du$, pentru orice $p, q > 0$.
4. $\beta(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1} \beta(p-1,q)$, pentru orice $p, q > 0$ (**formula de recurență pentru prima poziție**).
5. $\beta(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1} \beta(p,q-1)$, pentru orice $p, q > 0$ (**formula de recurență pentru a doua poziție**).
6. $\beta(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.
7. $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, pentru orice $p, q > 0$.
8. $\beta(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, pentru orice $p \in (0,1)$ (**formula complementelor**).
9. $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$.

Exemplu. Determinați $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$.

Soluție. Au loc relațiile

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}-1} (1-x)^{\frac{3}{2}-1} dx = \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}. \end{aligned}$$

Conform formulei de recurență,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

În plus, $\Gamma(3) = 2! = 2$. Urmează atunci că

$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Exemplu. Determinați $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+5x-6}} dx$.

Soluție. Observăm că

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+5x-6}} dx = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(x-2)(3-x)}} dx.$$

Pentru a calcula această integrală cu ajutorul proprietăților funcției β , transformăm intervalul de integrare în intervalul $[0, 1]$ cu ajutorul schimbării de variabilă $u = x - 2$. Atunci

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(x-2)(3-x)}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}} du \\ &= \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}} du = \int_0^1 u^{\frac{1}{2}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1} du = \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi. \end{aligned}$$

Exemplu. Determinați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Soluție. Ținând seama de identitatea trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ceea ce conduce la $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, vom face schimbarea de variabilă $u = \sin^2 x$. Atunci

$$du = 2 \sin x \cos x dx,$$

de unde

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{5}{2}-1}(1-u)^{\frac{3}{2}-1} du = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Folosind formula de recurență pentru prima poziție obținem

$$\frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\frac{5}{2}-1}{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}-1} B\left(\frac{5}{2}-1, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{3}{3} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Folosind formula de reprezentare a funcției β cu ajutorul funcției Γ , urmează că

$$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\Gamma(3)} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!} = \frac{1}{8} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Conform formulei de recurență,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

de unde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx = \frac{\pi}{32}.$$

Exemplu. Determinați $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

Soluție. Observăm că

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{1+x} dx.$$

Pentru a aplica formula $\beta(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$, alegem $p = \frac{1}{2}$ (corespondența cu numărătorul), iar q va fi determinat din condiția ca $p + q = 1$ (corespondența cu numitorul). Urmează că $q = \frac{1}{2}$, iar

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} dx = \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Aplicații

3.1. Determinați valorile următoarelor integrale improprii

$$1) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx; \quad 2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad 4) \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

3.2. Studiați convergența următoarelor integrale improprii

$$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5 + 1}; \quad 2) \int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x^6 + 3x^8}} dx; \quad 3) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 3}.$$

3.3. Folosind eventual faptul că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0, \quad \text{pentru orice funcție polinomială } P,$$

demonstrați că integrala improprie $\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{e^{2x} + 1}} dx$ este convergentă.

3.4. Demonstrați că integrala improprie $\int_0^{\infty} e^{2x} \cos 3x dx$ este convergentă.

3.5. Studiați convergența următoarelor integrale improprii

$$1) \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2(4-x)} dx; \quad 2) \int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx; \quad 3) \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} dx;$$

$$4) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

3.6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Folosind eventual schimbarea de variabilă

$$u = \frac{x-a}{b-a},$$

(sau, în etape, $u = x - a$ pentru a transforma intervalul de integrare în intervalul $[0, b - a]$, cu un capăt în origine, apoi $v = \frac{u}{b-a}$ pentru a transforma acest interval, de lungime $b - a$, în intervalul $[0, 1]$) și proprietățile funcției β , determinați

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx.$$

3.7. Folosind eventual schimbarea de variabilă $u = x^2$ și proprietățile funcției β , determinați $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$.

3.8. Folosind eventual schimbarea de variabilă $u = x^2$ și proprietățile funcției β , determinați $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt[3]{x}} dx$.

3.9. Folosind eventual schimbarea de variabilă $u = x^4$ și proprietățile funcției β , determinați $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$.

3.10. Folosind eventual schimbarea de variabilă $u = \sin^2 x$ și proprietățile funcției β , demonstrați că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2n+1}.$$

3.11. Folosind eventual schimbările succesive de variabilă $u = \operatorname{tg}^2 x$, $v = u^2$ și proprietățile funcției β , determinați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^p dx$, $p \in (-1, 1)$.