Capitolul 1

PRIMITIVE

1.1 Primitive

Definiţia noţiunii de primitivă

Una dintre problemele centrale ale calculului diferenţial este determinarea derivatelelor unei funcţii date, de una sau mai multe variabile. Calculul integral se ocupă, printre alte lucruri, cu o problemă de natură inversă, anume: fiind dată o funcţie f, se doreşte „recuperarea" funcţiei F din care f se obţine prin derivare.

Definiţie. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Spunem că $F : I \to \mathbb{R}$ este o **primitivă** a lui f pe I dacă F este derivabilă pe I, iar $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in I$.

Exemple. Funcţia $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = x^2$ este o primitivă a lui $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2x$, pe $\mathbb{R}$, deoarece $(x^2)' = 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Funcţia $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_2(x) = \sin x$ este o primitivă a lui $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \cos x$, pe $\mathbb{R}$, deoarece $(\sin x)' = \cos x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Funcţia $F_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F_3(x) = \ln x$ este o primitivă a lui $f_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, pe $(0, \infty)$, deoarece $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

Primitiva unei funcţii date nu este unică

Totuşi, este uşor de observat că o funcţie dată poate avea mai mult de o primitivă. Mai precis, nu doar F_1 este o primitivă a lui f_1 pe $\mathbb{R}$. Întrucât

$$(x^2 + C)' = 2x, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ şi orice constantă } C \in \mathbb{R},$$

de fapt orice funcţie de forma $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + C$ este o primitivă a lui f_1 pe $\mathbb{R}$. Rămâne de observat, desigur, dacă f_1 mai are şi alte primitive în afară de acestea şi dacă situaţia în cauza (adunând la o primitivă dată o constantă oarecare obţinem o altă primitivă) este întâlnită şi pentru alte funcţii.

Teorema 1.1. *Fie $F : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Au loc următoarele afirmaţii.*

1. *Dacă F este o primitivă a lui f pe I, atunci $F + C$ este de asemenea o primitivă a lui f pe I, pentru orice constantă $C \in \mathbb{R}$.*
2. *Dacă F_1, F_2 sunt primitive ale lui f pe I, atunci ele diferă printr-o constantă.*

Demonstraţie. 1. Deoarece F este o primitivă a lui f pe I, rezultă că $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in I$. Fie $C \in \mathbb{R}$ o constantă oarecare. Atunci

$$(F + C)'(x) = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x), \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

deci $F + C$ este de asemenea o primitivă a lui f pe I.
2. Deoarece F_1, F_2 sunt primitive ale lui f pe I, rezultă că F_1, F_2 sunt derivabile pe I, iar $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in I$. Atunci $F_1 - F_2$ este derivabilă pe I, iar

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

de unde deducem că $F_1 - F_2$ este constantă pe intervalul I, având derivata nulă pe acest interval. ■

Existenţa primitivelor unei funcţii

În cele de mai sus, am precizat proprietăţi ale primitivelor unei funcţii date, admiţând că aceste primitive există. Totuşi, este posibil ca acest lucru să nu se întâmple. Mai precis, ca să existe o primitivă a unei funcţii f, ar trebui ca f să fie derivata acestei primitive (funcţie derivabilă, conform definiţiei). Reamintindu-ne că derivata oricăre funcţii derivabile pe un interval are proprietatea lui Darboux (a valorii intermediare) pe acel interval, observăm că, pentru a exista o primitivă a unei funcţii f pe un interval I este necesar (dar nu şi suficient) ca f să aibă proprietatea lui Darboux pe I.

De aici, obţinem că pentru o funcţie care nu are proprietatea lui Darboux nu există primitive.

Definiţie. In cele ce urmează, vom spune că $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, **admite primitive** dacă există măcar o primitivă a lui f pe I.

Definiţie. Fiind dată $f : I \to \mathbb{R}$ care admite primitive, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval, vom nota cu

$$\int f(x)dx$$

mulţimea tuturor primitivelor lui f, numită şi **integrala nedefinită** a lui f. Se foloseşte şi notaţia

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C},$$

unde F este o primitivă oarecare a lui f, aleasă convenabil, iar $\mathcal{C}$ reprezintă mulţimea funcţiilor constante pe I. Semnul $\int$ se numeşte **integrală**, iar funcţia f se numeşte **integrand**, operaţia prin care se determină primitivele unei funcţii date numindu-se **integrare**. De asemenea, variabila x se numeşte **variabilă de integrare**.

Exemple.

$$\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}, \quad \int e^x dx = e^x + \mathcal{C}, \quad \int 2x dx = x^2 + \mathcal{C}.$$

Funcţiile continue admit primitive

S-a observat anterior ce fel de funcţii nu au primitive. Mai important, rămâne acum să observăm ce fel de funcţii au primitive. În acest sens, se va demonstra în Capitolul 2 că orice funcţie continuă pe un interval I admite primitive pe acel interval.

Operaţii cu mulţimea funcţiilor constante

Întrucât suma a două funcţii constante este tot o funcţie constantă, respectiv produsul dintre o constantă şi o funcţie constantă este tot o funcţie constantă, au loc proprietăţile

$$\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}, \quad \lambda\mathcal{C} = \mathcal{C}, \quad \text{pentru } \lambda \neq 0.$$

Legătura între operaţiile de integrare şi derivare

Ţinând cont de definiţia noţiunii de primitivă, rezultă că, dacă $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval, iar $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a sa, atunci

$$F'(x) = f(x), \text{ pentru orice } x \in I, \quad \text{iar } \int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C},$$

situaţie sistematizabilă sub următoarele forme

$$f \underset{\text{derivare}}{\overset{\text{integrare}}{\rightleftharpoons}} F, \quad \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Într-un sens oarecum imprecis (întrucât integrala lui F' nu este F, ci $F + \mathcal{C}$), dar suficient de sugestiv, putem spune că operaţiile de integrare şi derivare sunt operaţii inverse.

Integrarea unei derivate de ordin superior

Întrucât operaţia de integrare „anulează" o singură operaţie de derivare, putem observa şi că, dacă $F : I \to \mathbb{R}$, este de $n+1$ ori derivabilă pe intervalul I, atunci

$$\int F^{(n+1)}(x)dx = F^{(n)}(x) + \mathcal{C}.$$

Legătura între formulele de integrare şi cele de derivare

Întrucât operaţiile de integrare şi derivare sunt operaţii inverse, oricărei formule de derivare îi corespunde o formulă de integrare, obţinută prin citirea în sens invers a formulei de derivare. Astfel,

$$(\sin x)' = \cos x \implies \int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C},$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \implies \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + \mathcal{C}.$$

În plus, corectitudinea oricărei operaţii de integrare poate fi verificată derivând rezultatul obţinut. În cazul determinării corecte a unei primitive, după derivarea rezultatului se va obţine funcţia de sub integrala iniţială.

Terminologie

Trebuie observat că denumirile „integrală" şi „primitivă" nu sunt interschimbabile, primitiva reprezentând **o singură** funcţie, iar integrala reprezentând **o mulţime** de funcţii.

Funcţii definite pe reuniunea unor intervale

Definiţia noţiunii de primitivă se poate extinde pentru funcţii ale căror domenii sunt alcătuite din reuniunea mai multor intervale disjuncte. Totuşi, în această situaţie, diferenţa dintre două primitive ale unei funcţii date nu mai este neapărat constantă, întrucât pe fiecare interval din domeniu primitivele pot să difere printr-o altă constantă.

Exemplu. Funcţiile

$$F_1, F_2 : (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}, \quad F_1(x) = \begin{cases} x^2+4, & x \in (0,1) \\ x^2+5, & x \in (2,3) \end{cases}, \quad F_2(x) = x^2$$

sunt primitive ale funcţiei $f : (0,1) \cup (2,3)$, $f(x) = 2x$, dar diferenţa lor $(F_1 - F_2)(x) = \begin{cases} 4, & x \in (0,1) \\ 5, & x \in (2,3) \end{cases}$ nu este constantă.

Integralele unor funcţii uzuale

În cele ce urmează vom sistematiza integralele unor funcţii uzuale, cu unele comentarii. Prin I vom nota un interval oarecare, $I \subset \mathbb{R}$.

Integrala funcţiei putere

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N};$$
$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset (0,\infty),\ p \in \mathbb{R},\ p \neq -1;$$
$$\int 1 dx = x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset \mathbb{R};$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset (0,\infty) \quad \text{sau } x \in I \subset (-\infty, 0).$$

Să notăm că, pentru primele două formule, exponenţii numărătorilor sunt egali cu numitorii, operaţia de integrare fiind asociată cu o operaţie de împărţire. De asemenea, prin **i**ntegrare, puterea creşte (**i**ncreases, în limba engleză), în vreme ce prin **d**erivare puterea descreşte (**d**ecreases, în limba engleză), primele litere ale cuvintelor furnizând regula mnemotehnică.

Integrala funcţiei exponenţiale

$$\int e^x dx = e^x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset \mathbb{R}, a > 0.$$

Din nou, integrarea funcţiei exponenţiale cu baza diferită de e este asociată unei operaţii de împărţire.

Integralele funcţiilor sin **şi** cos **şi ale unor funcţii în care intervin** sin **şi** cos

$$\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$
$$\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset (k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}.$$

Semnele cu care apar integralele funcţiilor sin şi cos sunt inverse semnelor cu care apar derivatele acestora. Semnul integralei funcţiei $\frac{1}{\sin^2}$ este acelaşi cu semnul integralei funcţiei sin. Semnul integralei funcţiei $\frac{1}{\cos^2}$ este acelaşi cu semnul integralei funcţiei cos.

Integralele unor fracţii (I)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \mathcal{C}, \quad a > 0, x \in I \subset \mathbb{R}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + \mathcal{C}, \quad a > 0, x \in I \subset (-\infty, -a) \text{ sau } x \in I \subset (a, \infty)$$

Integralele unor fracţii (II)

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}, \quad a > 0, x \in I \subset \mathbb{R}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}, \quad a > 0, x \in I \subset (-a, a)$$

Pentru deosebirea integralelor de mai sus, cu integranzi destul de asemănători, este utilă următoarea regulă mnemotehnică: dacă după eliminarea termenului liber, extragerea radicalului şi eliminarea modulului se obţine $\frac{1}{x}$, atunci integrala conţine ln (logaritmul natural), ca şi $\int \frac{1}{x} dx$. Dacă după aceste operaţii nu se obţine $\frac{1}{x}$, atunci nici integrala nu conţine ln.

În plus, o altă regulă mnemotehnică este că în rezultatul primei integrale (cea fără radical) se împarte cu a şi înăuntrul argumentului funcţiei arctg şi în afara acestuia, întrucât „se pleacă de la a^2". În rezultatul celei de-a doua integrale se împarte cu a doar înăuntrul argumentului funcţiei arcsin, nu şi în afara acestuia, întrucât „se pleacă de la $\sqrt{a^2} = a$".

Integralele unor fracţii (III)

Are loc şi următoarea formulă, care nu se conformează însă regulii mnemotehnice de mai sus

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathcal{C}, \quad a > 0, x \in I, \text{ unde}$$
$$I \subset (-\infty, -a) \text{ sau } I \subset (-a, a) \text{ sau } I \subset (a, \infty).$$

Oricum, integralele de acest tip pot fi calculate relativ uşor ca aplicaţie a operaţiilor cu funcţii care admit primitive, insistenţa asupra încă unei formule de calcul separate pentru acest caz, neconformă cu celelalte, nefiind neapărat necesară.

1.2 Operaţii cu funcţii care admit primitive

Teorema 1.2. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, f, g admit primitive pe I şi $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Funcţiile $f + g$ şi $f - g$ admit primitive pe I, iar*
$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
*(***integrala sumei este egală cu suma integralelor***), respectiv*
$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$
*(***integrala diferenţei este egală cu diferenţa integralelor***).*

2. *Funcţia cf admite primitive pe I, iar*
$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx,$$
*(***o constantă nenulă cu care se înmulţeşte poate fi trecută de sub integrală înaintea integralei***).*

Menţionăm că nu au loc formule asemănătoare pentru produs şi raport, adică integrala produsului nu este, de regulă, produsul integralelor şi nici integrala raportului nu este, de regulă, raportul integralelor. Condensat, formulele de mai sus pot fi scrise sub forma următoare.

Teorema 1.3. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, f, g admit primitive pe I şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \neq 0$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ admite primitive pe I şi*

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int f(x)dx + c_2 \int g(x)dx$$

Exemplu.

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{3}{x^2+16} + \frac{5}{\sqrt{x^2+19}}\right) dx &= 3\int \frac{1}{x^2+16}dx + 5\int \frac{1}{\sqrt{x^2+19}}dx \\ &= \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + 5\ln\left(x + \sqrt{x^2+19}\right).\end{aligned}$$

Exemplu. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \int \frac{1}{(x-a)(x+a)}dx = \frac{1}{2a}\int \frac{2a}{(x-a)(x+a)}dx \\ &= \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}dx - \int \frac{1}{x+a}dx\right) \\ &= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + \mathcal{C} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

1.3 Metode de calcul

S-a observat anterior că integrala produsului nu este, de regulă, produsul integralelor. Pentru calculul integralei unui produs, şi în câteva alte situaţii, se poate aplica metoda descrisă mai jos.

1.3.1 Metoda de integrare prin părţi

Teorema 1.4. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabile, cu f', g' continue. Atunci $f'g$ şi fg'*

admit primitive pe I, iar

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Demonstraţie. Întrucât $f'g$ şi fg' sunt continue, ca produse de funcţii continue, ele admit primitive. Să observăm că

$$(fg)' = f'g + fg',$$

conform formulei de derivare a unui produs de funcţii, şi atunci

$$\begin{aligned}
&\int \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right] dx = \int (fg)'(x)dx \\
&\quad\Longrightarrow \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = (fg)(x) + \mathcal{C} \\
&\quad\Longrightarrow \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) + \mathcal{C} - \int f(x)g'(x)dx \\
&\quad\Longrightarrow \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.
\end{aligned}$$

■

Întrucât metoda de integrare prin părţi nu reprezintă o metodă de calcul explicit al unei integrale, ci doar o formă de exprimare a unei integrale printr-o alta, ea se poate aplica doar atunci când integrala rezultată are o formă mai simplă decât integrala iniţială.

Practic, trebuie mai întâi identificată sub integrală funcţia care se poate scrie ca o derivată (f'; implicit, trebuie determinat şi f). În membrul drept, ca rezultat, mai întâi se elimina integrala, derivata şi dx şi se scriu doar funcţiile rămase, iar apoi se mută semnul de derivare de la una dintre funcţii la funcţia cealaltă.

Exemplu. 1. Fie integrala

$$\int xe^x dx.$$

Întrucât x este o funcţie polinomială, încercăm să scriem **cealaltă** funcţie de sub integrală ca o derivată (procedând invers am obţine după aplicarea formulei de integrare prin părţi o funcţie polinomială de grad mai mare decât cea iniţială). Cum e^x se poate scrie ca o derivată sub forma

$(e^x)' = e^x$, urmează că

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int (x)' e^x dx = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + \mathcal{C} = e^x(x-1) + \mathcal{C}.$$

2. Fie integrala

$$\int \ln x dx, x \in (0, \infty).$$

Întrucât $\ln x$ este o funcţie inversă, mai greu de scris direct ca o derivată, încercăm să scriem **cealaltă** funcţie de sub integrală (adică funcţia constantă 1) ca o derivată. Cum 1 se poate scrie ca o derivată sub forma $1 = x'$, obţinem că

$$\int \ln x dx = \int x' \ln x dx = x \ln x - \int x(\ln x)' dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + \mathcal{C} = x(\ln x - 1) + \mathcal{C}.$$

1.3.2 Prima metodă de schimbare de variabilă

Teorema 1.5. *Fie I, J intervale şi $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ funcţii care satisfac următoarele proprietăţi*

1. *u este derivabilă cu derivata continuă pe I;*
2. *f admite primitive pe J;*

Atunci $(f \circ u)u'$ admite primitive pe I, iar

$$\int (f \circ u)(x) u'(x) dx = (F \circ u)(x) + \mathcal{C},$$

unde F este o primitivă a lui f.

Demonstraţie. Deoarece F este o primitivă a lui f, urmează că F este derivabilă, iar $F' = f$. Atunci funcţia compusă $F \circ u$ este derivabilă, fiind compunerea a două funcţii derivabile, iar

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x) = (f \circ u)(x)u'(x), \quad (\forall)\ x \in I,$$

conform formulei de derivare a funcţiei compuse. Din această egalitate rezultă că $(f \circ u)u'$ admite primitive pe I, iar o primitivă a sa este $F \circ u$, de unde concluzia. ■

Pentru aplicarea acestei metode, trebuie mai întâi identificată **corect** schimbarea de variabilă. În acest, scop, se pune mai întâi în evidenţă sub semnul integral derivata unei funcţii (la nivelul lui dx, nu la numitor, exponent, ş.a.m.d.) si se observă daca acea funcţie „se repetă". Dacă se întâmplă acest lucru, funcţia respectivă poate fi noua variabilă u.

Exemple. 1. Fie integrala

$$I_1 = \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx.$$

Cum $\cos x$ se scrie ca o derivată sub forma $\cos x = (\sin x)'$, urmează că

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{1+\sin^2 x} dx,$$

observându-se că $\sin x$ se repetă sub integrală. Notăm $u = \sin x$. Atunci

$$du = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

Asociem integralei iniţiale integrala

$$J_1 = \int \frac{1}{1+u^2} du,$$

obţinută prin înlocuirea lui u şi du (aceasta corespunde determinării lui F din enunţul teoremei). Cum $J_1 = \operatorname{arctg} u + \mathcal{C}$ (adică $F(u) = \operatorname{arctg} u$), revenind la variabila iniţială prin înlocuire (calculând explicit $(F \circ u)(x)$) urmează că

$$I_1 = \operatorname{arctg}(\sin x) + \mathcal{C}.$$

In cele de mai sus, „asocierea" se face datorită faptului că I_1 şi J_1 reprezintă mulţimi de funcţii depinzând de variabile distincte (x, respectiv u), posibil definite pe intervale diferite, neputând fi pus semnul de egalitate între I_1 şi J_1. Reamintim că două funcţii sunt egale dacă şi numai dacă au acelaşi domeniu, acelaşi codomeniu şi realizează o asociere identică, adică asociază fiecărui element din domeniul comun un acelaşi element din codomeniu.

Polinoame de gradul 1 ca variabile noi

O aplicaţie imediată este faptul că schimbarea de variabilă $u = ax + b$, $a \neq 0$, poate fi folosită ori de câte ori este nevoie. Într-adevăr, fie integrala

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot adx.$$

Cum a se scrie ca o derivată sub forma $a = (ax+b)'$, urmează că

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)(ax+b)'dx,$$

observându-se că $ax+b$ se repetă sub integrală. Notăm $u = ax+b$. Atunci

$$du = (ax+b)'dx = adx.$$

Asociem integralei iniţiale integrala

$$\frac{1}{a}\int f(u)du = \frac{1}{a}F(u) + \mathcal{C}$$

unde F este o primitivă a lui f. Înlocuind u, obţinem

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + \mathcal{C}.$$

Urmează că **formulele precizând integralele funcţiilor uzuale rămân valabile şi în cazul în care x este înlocuit cu un termen de gradul 1 în x, împărţind însă rezultatul final prin coeficientul lui x.** De exemplu, deoarece

$$\int e^x dx = e^x + \mathcal{C}, \quad \int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C},$$

urmează că

$$\int e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + \mathcal{C}, \quad \int \cos(4x+2)dx = \frac{1}{4}\sin(4x+2) + \mathcal{C}.$$

Integralele unor funcţii hiperbolice

Reamintim definiţiile următoarelor funcţii hiperbolice

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \mathrm{sh}\,x&=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{(sinus hiperbolic)}\\
\mathrm{ch}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \mathrm{ch}\,x&=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{(cosinus hiperbolic)}\\
\mathrm{th}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \mathrm{th}\,x&=\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} \quad \text{(tangentă hiperbolică)}\\
\mathrm{cth}:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\quad \mathrm{cth}\,x&=\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x} \quad \text{(cotangentă hiperbolică)},
\end{aligned}$$

împreună cu identitatea fundamentală

$$(\mathrm{ch}\,x)^2-(\mathrm{sh}\,x)^2=1,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Atunci

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{sh}\,x dx=\mathrm{ch}\,x+\mathcal{C},\quad x\in\mathbb{R},\\
&\int \mathrm{ch}\,x dx=\mathrm{sh}\,x+\mathcal{C},\quad x\in\mathbb{R},\\
&\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}dx=\mathrm{th}\,x+\mathcal{C},\quad x\in\mathbb{R},\\
&\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2\,x}dx=-\,\mathrm{cth}\,x+\mathcal{C},\quad x\in I\subset(-\infty,0)\text{ sau } x\in I\subset(0,\infty).
\end{aligned}$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{sh}\,x dx&=\int \frac{e^x-e^{-x}}{2}dx=\frac{1}{2}\int\left(e^x-e^{-x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int e^x dx-\int e^{-x}dx\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{e^{-x}}{-1}\right)+\mathcal{C}=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)+\mathcal{C}=\mathrm{ch}\,x+\mathcal{C},
\end{aligned}$$

similar calculându-se cea de-a doua integrală. De asemenea,

$$(\mathrm{th}\,x)'=\left(\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}\right)'=\frac{(\mathrm{sh}\,x)'\,\mathrm{ch}\,x-(\mathrm{ch}\,x)'\,\mathrm{sh}\,x}{(\mathrm{ch}\,x)^2}=\frac{(\mathrm{ch}\,x)^2-(\mathrm{sh}\,x)^2}{(\mathrm{ch}\,x)^2}=\frac{1}{(\mathrm{ch}\,x)^2},$$

de unde

$$\int\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}dx=\mathrm{th}\,x+\mathcal{C},$$

cea de-a patra formulă obţinându-se asemănător. Remarcăm faptul că formulele de integrare pentru funcţii hiperbolice sunt asemănătoare celor pentru funcţiile trigonometrice corespunzătoare, cu excepţia absenţei semnului $-$ pentru $\int \mathrm{sh}\,x dx$.

1.3.3 A doua metodă de schimbare de variabilă

Din punct de vedere practic, prima metodă de schimbare de variabilă se foloseşte atunci când sub integrală se poate pune în evidenţă derivata unei funcţii care, de asemenea, „se repetă" (integrandul poate fi scris în funcţie de aceasta). Există multe situaţii în care se poate face o schimbare de variabilă plauzibilă, chiar dacă nu poate fi pusă în evidenţă sub integrală derivata acestei schimbări de variabilă, sau cel puţin nu la nivelul lui dx. Un exemplu este integrala

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx, \quad x \in (0,\infty),$$

în care schimbarea de variabilă $u = e^x$ este plauzibilă, deşi $u' = e^x$ nu poate fi pus în evidenţă la nivelul lui dx. Această situaţie este tratată cu ajutorul următoarei teoreme, în care integrandul este $f \circ u$, nu $(f \circ u)u'$, ca în prima metodă de schimbare de variabilă.

Teorema 1.6. *Fie I, J intervale şi $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ funcţii care satisfac următoarele proprietăţi*

1. *u este derivabilă şi inversabilă, iar u^{-1} este derivabilă cu derivata continuă pe J;*
2. *$f \cdot (u^{-1})'$ admite primitive pe J;*

Atunci $(f \circ u)$ admite primitive pe I, iar

$$\int (f \circ u)(x)dx = (F \circ u)(x) + \mathcal{C},$$

unde F este o primitivă a lui $f \cdot (u^{-1})'$.

Exemplu. Fie integrala

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx, \quad x \in (0,\infty),$$

Schimbarea de variabilă, plauzibilă din context, este $u = e^x$, unde

$$u : (0,\infty) \to (1,\infty), \quad u(x) = e^x$$

este derivabilă şi inversabilă, inversa sa,

$$u^{-1}:(1,\infty)\to(0,\infty),\quad u^{-1}(y)=\ln y$$

fiind de asemenea derivabilă, cu $(u^{-1})'$ continuă pe $(1,\infty)$, deoarece

$$(u^{-1})'(y)=\frac{1}{y},\quad y\in(1,\infty).$$

Atunci

$$u=e^x \implies x=\ln u$$

(această etapă reprezintă inversarea lui u), de unde

$$dx=(\ln u)'du=\frac{1}{u}du,$$

(această etapă include calculul lui $(u^{-1})'$). Asociem integrala, obţinută prin înlocuirea lui e^x şi dx,

$$J=\int\frac{1}{1+u}\cdot\frac{1}{u}du$$

(acum se calculează o primitivă pentru $f\cdot(u^{-1})'$). Atunci

$$\begin{aligned}J&=\int\frac{1}{1+u}\cdot\frac{1}{u}du=\int\frac{1}{u(1+u)}du=\int\frac{1+u-u}{u(1+u)}du\\&=\int\frac{1+u}{u(1+u)}du-\int\frac{u}{u(1+u)}du=\int\frac{1}{u}du-\int\frac{1}{1+u}du\\&=\ln|u|-\ln|1+u|+\mathcal{C}=\ln\left|\frac{u}{1+u}\right|+\mathcal{C}\end{aligned}$$

(s-a determinat o primitivă F a lui $f\cdot(u^{-1})'$). Prin înlocuirea lui u (acum se calculează $F\circ u$), urmează că integrala iniţială este

$$I=\ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right|+\mathcal{C}=\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)+\mathcal{C}.$$

1.4 Integrarea funcţiilor raţionale

Definiţie. Numim **funcţie raţională** o funcţie f care se poate scrie sub forma (similară unui număr raţional)

$$f = \frac{P}{Q},$$

unde P, Q sunt funcţii polinomiale.

Să observăm că denumirea de funcţie raţională are legătură cu forma de raport a funcţiei, nefiind necesar ca P, Q să aibă coeficienţi raţionali. Astfel,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3}}{x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{7}},$$

este o funcţie raţională, deşi coeficienţii $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ nu sunt numere raţionale.

Descompunerea unei funcţii raţionale

În cele ce urmează, vom preciza un mod general de calcul al primitivelor unei funcţii raţionale. În fapt, calculul unei integrale de forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

se poate reduce la calculul mai multor integrale mai simple, ţinând cont de următoarele observaţii.

1. Dacă grad $P \geq$ grad Q, se poate face mai întâi împărţirea cu rest a numărătorului la numitor. Se înlocuieşte apoi numărătorul cu expresia sa furnizată de această împărţire cu rest, iar apoi se separă integrala iniţială în două integrale, una corespunzătoare câtului şi împărţitorului, iar cealaltă restului.

2. Dacă numitorul nu este „elementar" (puterea unei funcţii polinomiale care nu se descompune mai departe), atunci, după descompunerea lui Q, funcţia de integrat $\frac{P}{Q}$ se poate scrie ca suma unor fracţii cu numitori mai simpli. În acest sens, orice funcţie polinomială Q se poate descompune ca un produs de funcţii polinomiale de forma

   - $(x-a)^p$ (puteri ale unor funcţii polinomiale de gradul 1)
   - $(x^2+bx+c)^p$, cu $\Delta = b^2 - 4c < 0$ (puteri ale unor funcţii polinomiale de gradul 2 care nu se descompun mai departe),

   înmulţite eventual cu o constantă.

Exemplu. Fie integrala
$$\int \frac{x^4}{x+1}dx.$$
Cum gradul numărătorului este 4 iar cel al numitorului este 1, împărţim mai întâi cu rest numărătorul la numitor, obţinând relaţia

$$x^4 = (x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) + 1.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x+1}dx &= \int \frac{(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) + 1}{(x+1)}dx \\ &= \int \frac{(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1)}{(x+1)}dx + \int \frac{1}{x+1}dx \\ &= \int (x^3 - x^2 + x - 1)dx + \ln|x+1| + \mathcal{C} \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Pentru descompunerea în fracţii mai simple, ţinem seamă că

- Numărătorii vor fi căutaţi de grad **cu o unitate mai mic** decât gradul elementului principal de la numitor.
- Descompunerea nu „face salturi", în sensul că odată cu o putere a unui element principal pentru descompunere sunt necesare şi puterile intermediare, chiar dacă acestea nu apar în mod explicit de la început.

Astfel, un exemplu de descompunere este

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

Elementele principale de la numitorul fracţiei iniţiale sunt $x+1$ şi $x+2$ (de gradul 1), numărătorii care le corespund fiind de gradul 0 (constante).

De asemenea, un alt exemplu de descompunere este

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+6)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+6} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+6)^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+2x+6)^3}.$$

Elementele principale de la numitorul fracţiei iniţiale sunt

- $x + 1$ (de gradul 1);
- $x^2 + 2x + 6$ (de gradul 2, care nu se descompune mai departe întrucât $\Delta = -20 < 0$).

Numărătorii care le corespund sunt de gradul 0 (constante), respectiv de gradul 1. În descompunere, odată cu puterea 3 (cea care apare explicit) apar şi puterile intermediare 1 şi 2.

Metode de determinare a coeficienţilor

1. Aducerea la acelaşi numitor, identificarea coeficienţilor şi rezolvarea unui sistem.
2. Înmulţirea cu puterile cele mai mari ale elementelor principale de la numitor.
3. (În unele situaţii particulare) Scrierea numărătorului cu ajutorul diferenţei unor factori de la numitor

Exemplu. Fie integrala
$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx.$$
Numitorul fracţiei este funcţia polinomială de gradul al doilea $x^2 + 3x + 2$. Întrucât $\Delta = 9 - 8 > 0$, aceasta se descompune mai departe. Rezolvând ecuaţia $x^2 + 3x + 2 = 0$, obţinem rădăcinile $x_1 = -1$ şi $x_2 = -2$, şi atunci $x^2 + 3x + 2$ se descompune sub forma
$$x^2 + 3x + 2 = 1(x - (-1))(x - (-2)) = (x + 1)(x + 2),$$
deci
$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} dx.$$
Integrandul se descompune sub forma
$$\frac{1}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}.$$
Rămâne deci să determinăm A şi B. Prin amplificare şi aducere la acelaşi

numitor obţinem

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$
$$= \frac{x(A+B)+(2A+B)}{(x+1)(x+2)}$$

Întrucât două fracţii echivalente cu numitorii egali au şi numărătorii egali, obţinem de aici

$$1 = x(A+B) + (2A+B),$$

pentru orice x din domeniul de integrare. Prin identificarea coeficienţilor, obţinem că

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1, \end{cases}$$

sistem cu soluţia $A = 1$, $B = -1$. Înlocuind aceste valori acolo unde A şi B au apărut pentru prima dată obţinem descompunerea

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

De aici,

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx$$
$$= \ln|x+1| - \ln|x+2| + \mathcal{C} = \ln\frac{|x+1|}{|x+2|} + \mathcal{C}.$$

Exemplu. Fie integrala

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx.$$

Integrandul se descompune sub forma

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}. \tag{1.1}$$

Rămâne deci să determinăm A, B şi C.

Înmulţind (1.1) cu primul numitor, $x+1$, obţinem că

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = A + \frac{B(x+1)}{x+2} + \frac{C(x+1)}{x+3},$$

de unde, pentru $x=-1$ (valoare care anulează factorul cu care s-a înmulţit) se obţine că

$$\frac{1}{2} = A.$$

Înmulţind (1.1) cu al doilea numitor, $x+2$, obţinem că

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A(x+2)}{x+1} + B + \frac{C(x+2)}{x+3},$$

de unde, pentru $x=-2$ (valoare care anulează factorul cu care s-a înmulţit) se obţine că

$$-1 = B.$$

Înmulţind (1.1) cu al treilea numitor, $x+3$, obţinem că

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+3)}{x+1} + \frac{B(x+3)}{x+2} + C,$$

de unde, pentru $x=-3$ (valoare care anulează factorul cu care s-a înmulţit) se obţine că

$$\frac{1}{2} = C.$$

Înlocuind aceste valori acolo unde A, B şi C au apărut pentru prima dată obţinem descompunerea

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

De aici,

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx = \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}\right) dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + \mathcal{C} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|(x+1)(x+3)|}{|x+2|^2}\right) + \mathcal{C}.
\end{aligned}
$$

Exemplu. Fie integrala

$$\int \frac{1}{(x^2+2)(x^2+4)}dx.$$

Cum

$$(x^2+4)-(x^2+2)=2,$$

putem scrie

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+2)(x^2+4)}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2}{(x^2+2)(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4)-(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2+4)}dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{x^2+4}{(x^2+2)(x^2+4)}dx - \int \frac{x^2+2}{(x^2+2)(x^2+4)}dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x^2+2}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) + \mathcal{C}
\end{aligned}
$$

1.5 Integrale reductibile la integralele unor funcţii raţionale

Vom prezenta un număr de situaţii tip în care calculul integralei unor funcţii aparent mai complicate se reduce la calculul integralelor unor funcţii raţionale după schimbări de variabile potrivite. În cele ce urmează, prin R vom înţelege o funcţie raţională oarecare.

Integrale conţinând exponenţiale

$$\int R(a^x)dx$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă $u = a^x$ (se alege exponenţiala ca variabilă nouă).

Exemplu. Fie integrala
$$I = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$$
Întrucât $e^{2x} = (e^x)^2$, putem scrie
$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx.$$
Alegând variabila nouă $u = e^x$, urmează că
$$du = (e^x)' dx = e^x dx.$$
Asociem integralei iniţiale integrala
$$J = \int \frac{1}{1+u^2} du,$$
obţinută prin înlocuirea lui du şi u (în această ordine). Cum $J = \operatorname{arctg} u + \mathcal{C}$, obţinem prin înlocuirea lui u că
$$I = \operatorname{arctg}(e^x) + \mathcal{C}.$$

Integrale conţinând radicalul unei funcţii polinomiale de gradul 1

$$\int R(\sqrt[n]{ax+b}) dx$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă $u = \sqrt[n]{ax+b}$ (se alege radicalul ca variabilă nouă). Pasul următor este ridicarea la putere, pentru eliminarea radicalului.

Exemplu. Fie integrala
$$I = \int \sqrt[5]{2x+1} dx.$$
Alegând variabila nouă $u = \sqrt[5]{2x+1}$, urmează că
$$u^5 = 2x+1 \implies x = \frac{u^5-1}{2} \implies dx = \left(\frac{u^5-1}{2}\right)' du = \frac{5}{2} u^4 du.$$

Asociem integralei iniţiale integrala

$$J = \int u \cdot \frac{5}{2} u^4 du,$$

obţinută prin înlocuirea lui du şi u. Cum

$$J = \int \frac{5}{2} u^5 du = \frac{5}{2} \int u^5 du = \frac{5}{2} \cdot \frac{u^6}{6} + \mathcal{C} = \frac{5}{12} u^6 + \mathcal{C},$$

obţinem prin înlocuirea lui u că

$$I = \frac{5}{12} \left(\sqrt[5]{2x+1} \right)^6 + \mathcal{C}.$$

Integrale conţinând mai mulţi radicali de ordine diferite ai unei aceleiaşi expresii de gradul 1

$$\int R(\sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[n_k]{ax+b}) dx$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă $u = \sqrt[n]{ax+b}$, unde n este cel mai mic multiplu comun al radicalilor existenţi. Pasul următor este ridicarea la putere, pentru eliminarea radicalului. Calculele sunt similare celor de mai sus.

Integrale conţinând radicalul unui raport de funcţii polinomiale de gradul 1

$$\int R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (se alege radicalul ca variabilă nouă). Pasul următor este ridicarea la putere, pentru eliminarea radicalului. Calculele sunt similare celor de mai sus.

Integrale conţinând radicalul unei funcţii polinomiale de gradul 2 **la numitor**

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Se poate reduce la una dintre integralele uzuale după aducerea trinomului de gradul al doilea $ax^2 + bx + c$ la forma canonică (punând în evidenţă pătrate perfecte).

Exemplu. Fie integrala

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx$$

Deoarece

$$\begin{aligned} 2x^2-3x+1 &= 2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}\right] \\ &= 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right], \end{aligned}$$

urmează că

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}}}dx$$

Cu schimbarea de variabilă $u = x-\frac{3}{4}$, obţinem

$$du = \left(x-\frac{3}{4}\right)' dx = dx.$$

Asociem integrala

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{u^2-\frac{1}{16}}}du = \ln\left|u+\sqrt{u^2-\frac{1}{16}}\right| + \mathcal{C}.$$

Atunci, prin înlocuirea lui u, obţinem că

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\left(x-\frac{3}{4}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}}\right| + \mathcal{C}.$$

Integrale conţinând radicalul unei funcţii polinomiale de gradul 2

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx$$

Se poate calcula utilizând metoda de integrare prin părţi. În acest sens, să notăm

$$I = \int \sqrt{x^2+a^2}dx.$$

Observăm că

$$I = \int x'\sqrt{x^2+a^2}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x(\sqrt{x^2+a^2})'dx$$
$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

Întrucât numărătorul, x^2, este asemănător cu expresia de la numitor, x^2+a^2, exploatăm această asemănare scriind numărătorul sub forma

$$x^2 = x^2 + a^2 - a^2.$$

Atunci

$$I = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$
$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}dx + a^2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$
$$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \mathcal{C}$$

De aici,

$$2I = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \mathcal{C}$$
$$\Longrightarrow \quad I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right] + \mathcal{C}$$

În mod asemănător se pot calcula şi integralele $\int \sqrt{x^2-a^2}dx, \quad \int \sqrt{a^2-x^2}dx.$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$$

După aducerea la forma canonică (formarea de pătrate perfecte), problema se reduce la calculul uneia din integralele de mai sus.

Integrale conţinând radicalul unei funcţii polinomiale de gradul 2 într-un cadru general

$$\int R(\sqrt{ax^2+bx+c})dx, \quad a \neq 0$$

Se pot folosi schimbările de variabilă

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}, \quad \text{dacă } a > 0$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}, \quad \text{dacă } c \geq 0$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1), \quad \text{dacă } \Delta \geq 0$$

x_1 fiind o rădăcină a ecuaţiei $ax^2+bx+c = 0$. Aceste schimbări de variabilă se mai numesc şi **substituţiile lui Euler**. Cele trei cazuri nu se exclud unul pe celălalt, existând situaţii în care pot fi utilizate toate cele trei schimbări de variabilă.

Exemplu. Fie integrala
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-3x+2}}dx.$$
Pot fi aplicate toate cele trei schimbări de variabilă, deoarece $a = 1 > 0$, $c = 2 > 0$, iar $\Delta = 1 > 0$. Va fi folosită prima dintre ele,

$$\sqrt{x^2-3x+2} = t + x.$$

Atunci, după ridicare la pătrat,

$$x^2 - 3x + 2 = t^2 + 2tx + x^2 \implies 2 - t^2 = x(2t+3) \implies x = \frac{2-t^2}{2t+3},$$

de unde
$$dx = \left(\frac{2-t^2}{2t+3}\right)' dt = (-2)\frac{t^2+3t+2}{(2t+3)^2}dt.$$

Asociem integrala

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{1}{\frac{2-t^2}{2t+3}\left(t + \frac{2-t^2}{2t+3}\right)} \cdot (-2)\frac{t^2+3t+2}{(2t+3)^2}dt \\
&= \int \frac{1}{\frac{2-t^2}{2t+3} \cdot \frac{t^2+3t+2}{2t+3}} \cdot (-2)\frac{t^2+3t+2}{(2t+3)^2}dt \\
&= \int \frac{-2}{2-t^2}dt = 2\int \frac{1}{t^2-2}dt = 2\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + \mathcal{C} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

Prin înlocuirea lui t cu $\sqrt{x^2-3x+2}-x$, obţinem că

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-3x+2}-x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-3x+2}-x+\sqrt{2}}\right|+\mathcal{C}.$$

Integralele unor funcţii trigonometrice (I)

$$\int R(\sin x)\cos x dx, \quad \int R(\cos x)\sin x dx$$

Întrucât $(\sin x)' = \cos x$, iar $(\cos x)' = -\sin x$, integralele de mai sus au în fapt forma

$$\int R(\sin x)\cdot(\sin x)' dx, \quad \int R(\cos x)\cdot(-\cos x)' dx.$$

Se vor folosi schimbările de variabilă $u=\sin x$, respectiv $u=\cos x$.

Exemplu. Fie integrala

$$I=\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx.$$

Atunci, deoarece

$$\sin(2x)=2\sin x\cos x,$$

urmează că

$$I=\int\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx=2\int\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\cos x dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $u=\sin x$ obţinem

$$du=(\sin x)' dx=\cos x dx.$$

Asociem integrala

$$J=2\int\frac{u}{1+u^2}du=\int\frac{2u}{1+u^2}du=\int\frac{(1+u^2)'}{1+u^2}du.$$

Cu schimbarea de variabilă $v=1+u^2$ obţinem

$$dv=(1+u^2)' du=2u du.$$

Asociem integrala

$$J'=\int\frac{1}{v}dv=\ln|v|+\mathcal{C}.$$

Atunci, prin înlocuirea lui v obţinem că

$$J = \ln\left|1 + u^2\right| + \mathcal{C} = \ln\left(1 + u^2\right) + \mathcal{C}.$$

Prin înlocuirea lui u obţinem că integrala iniţială are valoarea

$$I = \ln\left(1 + \sin^2 x\right) + \mathcal{C}.$$

Integralele unor funcţii trigonometrice (II)

$$\int \sin^m \cos^n x dx, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Dacă măcar una dintre puterile m, n ale uneia din funcţii este impară, **cealaltă** funcţie se poate alege ca variabilă nouă.

Dacă ambele puteri sunt pare, se va trece la unghiul dublu prin folosirea formulelor

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x.$$

Exemplu. Fie integrala

$$I = \int \sin^5 \cos^3 x dx.$$

Deoarece $\sin x$ este ridicată la o putere impară, $\cos x$ poate fi aleasă ca variabilă nouă. Dintr-un motiv similar, şi $\sin x$ poate fi aleasă ca variabilă nouă. Pentru fixarea ideilor, vom folosi schimbarea de variabilă $u = \sin x$. Atunci

$$du = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

Folosind identitatea trigonometrică fundamentală, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obţinem

$$I = \int \sin^5 x \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^5 x (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx.$$

Asociem integrala

$$J = \int u^5 (1 - u^2) du = \int (u^5 - u^7) du = \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + \mathcal{C}.$$

Prin înlocuirea lui u obţinem că

$$I = \frac{(\sin x)^6}{6} - \frac{(\sin x)^8}{8} + \mathcal{C}.$$

Integralele unor funcţii trigonometrice (III)

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Prin analogie cu cele de mai sus, dacă R este impară într-una din funcţiile $\sin x$, $\cos x$, adică

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

respectiv

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

cealaltă funcţie se alege ca schimbare de variabilă.

Dacă R este pară atât în $\sin x$ cât şi în $\cos x$, fie se trece la unghiul dublu, fie se alege ca schimbare de variabilă $u = \operatorname{tg} x$. Calculele sunt similare celor de mai sus.

Integrale binome

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}, \quad a, b \neq 0$$

Întrucât m, n, p sunt numere raţionale, nu neapărat întregi, integrala de mai sus poate conţine radicali de diverse forme. Dacă

$$p \in \mathbb{Z} \quad \text{sau} \quad \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \quad \text{sau} \quad \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z},$$

şi numai în aceste cazuri, calculul unei integrale de forma de mai sus poate fi redus la calculul integralei unei funcţii raţionale. Sunt posibile următoarele situaţii.

1. Dacă $p \in \mathbb{Z}$, atunci $x = t^q$, unde q este numitorul comun al lui m şi n. Altfel spus, $t = \sqrt[N]{x}$, unde N este cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor deja existenţi.

2. Dacă $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, atunci $ax^n + b = t^q$, unde q este numitorul lui p. Altfel spus, $t = \sqrt[N]{ax^n + b}$, adică se alege ca variabilă nouă paranteza cu tot cu exponent, eliminând eventualul numărător al exponentului şi eventualul semn $-$.

3. Dacă $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, atunci $a + \frac{b}{x^n} = t^q$, unde q este numitorul lui p. Altfel spus, $t = \sqrt[N]{a + \frac{b}{x^n}}$, adică se alege ca variabilă nouă paranteza după un factor comun forţat, cu tot cu exponent, eliminând eventualul numărător al exponentului şi eventualul semn $-$.

Substituţiile de mai sus se numesc şi **substituţiile lui Cebâşev**.

Exemplu. Fie integrala

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx, \quad x \in (0, \infty).$$

Atunci

$$I = \int x^3(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx \implies m = 3, n = 2, p = -\frac{1}{2}.$$

Observăm că $p = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, dar $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$. Alegem ca variabilă nouă

$$t = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1},$$

eliminând semnul $-$ de la exponent, întrucât expresia $1 + x^2$ de sub radical nu este ridicată ea însăşi la o putere. De aici

$$t^2 = x^2 + 1 \implies x^2 = t^2 - 1 \implies x = \sqrt{t^2-1},$$

şi deci

$$dx = (\sqrt{t^2-1})'dt = \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}} \cdot (t^2-1)'dt = \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}} \cdot 2tdt = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt.$$

Asociem integrala

$$\begin{aligned} J &= \int \left(\sqrt{t^2-1}\right)^3 \cdot (t^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt = \int (t^2-1)\sqrt{t^2-1} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt \\ &= \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Prin înlocuirea lui t, obţinem că

$$I = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{3} - \sqrt{x^2+1} + \mathcal{C}.$$

Aplicaţii

1.1. *Demonstraţi că*

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \textit{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

şi determinaţi $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.2. *Demonstraţi că*

$$\left(2\sqrt{x}(\ln x - 2)\right)' = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad \textit{pentru orice } x > 0,$$

şi determinaţi $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

1.3. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{5+\sin x}$. *Demonstraţi că orice primitivă a lui* f *este strict crescătoare.*

1.4. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\cos 2x$. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât funcţia*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = e^{-x}(a\cos 2x + b\sin 2x),$$

să fie o primitivă a lui f.

1.5. *Fie* $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$. *Determinaţi* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *astfel încât funcţia*

$$F : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = (ax^2+b)\cos x + cx\sin x,$$

să fie o primitivă a lui f.

1.6. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{1+x}-b}{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ *să admită primitive.*

1.7. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int \frac{1}{4x+5}dx$; 2) $\displaystyle\int e^{3x+1}dx$; 3) $\displaystyle\int \sin(3x+4)dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^4}$.

1.8. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int x^2e^x dx$; 2) $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)dx$; 3) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x dx$; 4) $\displaystyle\int x^2 \cos x dx$;
5) $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx$; 6) $\displaystyle\int x\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$.

1.9. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$; 2) $\displaystyle\int \sqrt{\ln x}\frac{1}{x}dx$; 3) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}dx$;
5) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 6) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx$; 7) $\displaystyle\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

1.10. *Determinaţi formule de recurenţă pentru calculul următoarelor şiruri integrale.*

1) $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \displaystyle\int (\ln x)^n dx$; 2) $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \displaystyle\int x^n e^x dx$ 3) $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \displaystyle\int x^n \sin x dx$.

1.11. *Determinaţi o formulă de recurenţă pentru termenii şirului*

$$(I_n)_{n\geq 0},\quad I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx,$$

folosind eventual faptul că

$$\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = x^{n-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x^{n-1}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)'.$$

1.12. *Fie* $A = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$; $B = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

1. *Calculaţi* $A+B$ *şi* $A-B$.

2. *Determinaţi* A *şi* B*, folosind eventual 1.*

1.13. *Fie* $A = \displaystyle\int \sin^2 x dx$; $B = \displaystyle\int \cos^2 x dx$.

1. *Calculaţi* $A+B$ *şi* $B-A$*, folosind eventual formula* $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2. *Determinaţi* A *şi* B*, folosind eventual 1.*

1.14. *Determinaţi primitivele următoarelor funcţii raţionale.*

1) $\displaystyle\int \frac{7}{(x+1)^2}dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+4x+4}dx$; 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+6}dx$;
5) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+3x+2}dx$; 6) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$; 7) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-4x+3}dx$;
8) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^4-x^2}dx$.

1.15. *Determinaţi primitivele următoarelor funcţii reductibile la funcţii raţionale.*

1) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$; 2) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$; 3) $\displaystyle\int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-x}+\sqrt[3]{3-x}}$;
5) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1+x}}$; 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$; 7) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-6x+8}dx$;
8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+3}}$; 9) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x-7}}dx$.

1.16. *Determinaţi primitivele următoarelor funcţii trigonometrice*

1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x dx$; 2) $\displaystyle\int \sin^3 \cos^4 x dx$; 3) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x dx$.

1.17. *Determinaţi următoarele integrale binome*

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

1.18. *Determinaţi* $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$*, folosind fie una dintre substituţiile lui Euler, fie faptul că*

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = -\frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}.$$

1.19. *Fie funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{e^x}, & x<1\\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x\geq 1\end{cases}$. *Demonstraţi că f admite primitive şi determinaţi o primitivă a lui f.*

1.20. *Fie F o primitivă a funcţiei* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

1. *Demonstraţi că F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.*

2. *Demonstraţi că*

$$|F(x_2)-F(x_1)| \leq |x_2-x_1|, \quad \textit{pentru orice } x_1, x_2 \geq 0.$$