Capitolul 7

ELEMENTE DE TEORIA CÂMPURILOR

7.1 Definiţii şi proprietăţi

7.1.1 Câmpuri scalare. Câmpuri vectoriale

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$. Numim **câmp scalar** pe D o funcţie (cu valori scalare) $u : D \to \mathbb{R}$. Numim **câmp vectorial** pe D o funcţie (cu valori vectoriale) $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$. Astfel, oricărui punct $M \in D$ i se poate asocia un scalar (în cazul câmpurilor scalare), respectiv un vector (în cazul câmpurilor vectoriale). Atunci când un astfel de câmp nu depinde decât de poziţia punctului M, el se numeşte **staţionar**, în cazul în care el depinde şi de alte variabile (de obicei de timp) numind-se **nestaţionar**.

7.1.2 Aspecte fizice

De exemplu, oricărui punct de pe suprafaţa Pământului i se poate asocia temperatura în acel punct, obţinându-se un câmp scalar (evident, nestaţionar). Acelaşi lucru se poate realiza asociindu-i umiditatea relativă, presiunea atmosferică, ş.a.m.d.

Similar, oricărui punct de pe suprafaţa Pământului i se poate asocia intensitatea câmpului gravitaţional în acel punct (direcţionată către centrul de masă al Pământului, necesitând utilizarea unui vector pentru caracterizare completă), obţinându-se un câmp vectorial (staţionar). Acelaşi lucru se poate realiza asociind viteza şi direcţia vântului în acel punct (care, din nou, necesită utilizarea unui vector pentru caracterizare completă), obţinându-se însă în acest caz un câmp vectorial nestaţionar.

Vom nota uneori $u(M)$, în loc de $u(x,y,z)$, (respectiv $\vec{F}(M)$, în loc de $\vec{F}(x,y,z)$) pentru a sublinia dependenţa câmpului de punctul M, mai degrabă decât de coordonatele x,y,z ale acestuia, în special în cazul în care câmpul respectiv corespunde unei realităţi fizice.

Câmpuri de componente

Fie un câmp vectorial $\vec{F}: D \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Pentru determinarea acestui câmp vectorial este deci necesară determinarea a trei câmpuri scalare P, Q, R, numite **câmpuri de componente**.

Câmp vectorial de clasă C^k

Se spune că $\vec{F}$ este **câmp vectorial de clasă** C^k, $k \geq 0$, în situaţia în care câmpurile scalare (funcţiile) componente P, Q, R au această proprietate.

7.2 Câmpuri scalare. Gradientul unui câmp scalar

7.2.1 Suprafeţe de nivel

Fie $u: D \to \mathbb{R}$ un câmp scalar. Numim **suprafaţă de nivel** (**suprafaţă echipotenţială**) a câmpului u locul geometric al tuturor punctelor lui D pentru care valoarea lui u rămâne constantă.

Ecuaţia unei suprafeţe de nivel

Suprafeţele de nivel ale lui u au deci ecuaţia $u(x,y,z) = C$, $C \in \mathbb{R}$. În particular, ecuaţia suprafeţei de nivel care trece printr-un punct dat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este $u(M) = u(M_0)$, unde M este un punct curent de pe suprafaţă, forma analitică a acestei ecuaţii fiind $u(x,y,z) = u(x_0, y_0, z_0)$.

Să observăm de asemenea că printr-un punct al domeniului D trece o singură suprafaţă de nivel, în vreme ce două suprafeţe de nivel oarecare fie coincid (dacă au acelaşi C), fie nu se intersectează (daca ele corespund la valori diferite ale lui C).

Exemplu. Fie câmpul scalar $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Atunci suprafeţele de nivel $u(x,y,z) = C$, $C > 0$, sunt sfere cu centrul în $O(0,0,0)$ şi rază $\sqrt{C}$, în vreme ce suprafaţa de nivel $u(x,y,z) = 0$ constă dintr-un singur punct, anume originea O.

7.2.2 Derivata unui câmp scalar după direcţia unui vector

Fiind dat un câmp scalar u, dorim să studiem variaţia acestuia după o direcţie dată, într-o vecinătate a unui punct dat. Prin analogie cu cazul funcţiilor de o singură variabilă reală, pentru care studiul monotoniei se putea realiza cu ajutorul derivatei, vom defini acum noţiunea de **derivată după o direcţie**.

Fie $u : D \to \mathbb{R}$ un câmp scalar, fie $M_0 \in D$ şi fie $\vec{v}$ un vector oarecare. Numim **derivată a lui u în M_0 după direcţia lui $\vec{v}$**, notată $\left.\dfrac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0}$, mărimea care măsoară viteza de variaţie a lui u în această direcţie, raportată la unitatea de lungime, definită prin

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \lim_{l(\overrightarrow{M_0M})\to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{l(\overrightarrow{M_0M})}$$

unde $l(\overrightarrow{M_0M})$ reprezintă lungimea orientată a vectorului $\overrightarrow{M_0M}$,

$$l(\overrightarrow{M_0M}) = \begin{cases} \|\overrightarrow{M_0M}\|, \text{ pentru } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}, t \geq 0, \\ -\|\overrightarrow{M_0M}\|, \text{ pentru } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}, t < 0. \end{cases}$$

Să observăm că $\left.\dfrac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0}$ ia în calcul, în fapt, nu doar direcţia, ci şi sensul lui $\vec{v}$.

Monotonia unui câmp scalar după direcţia unui vector

Observăm atunci următoarele

- Dacă $\left.\dfrac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} > 0$, atunci câmpul scalar u creşte într-o vecinătate a lui M_0 după direcţia (şi sensul) lui $\vec{v}$,
- Dacă $\left.\dfrac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} < 0$, atunci câmpul scalar u scade într-o vecinătate a lui M_0 după direcţia (şi sensul) lui $\vec{v}$.

Legătura cu conceptul de derivată parţială

Conceptul de derivată după direcţia unui vector îl generalizează pe cel de derivată parţială. Astfel, pentru $v = \vec{\imath}$ obţinem că $\dfrac{du}{d\vec{\imath}} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, iar pentru $\vec{v} = \vec{\jmath}$, respectiv $\vec{v} = \vec{k}$, obţinem că $\dfrac{du}{d\vec{\jmath}} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, respectiv $\dfrac{du}{d\vec{k}} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Formulă de calcul

Teorema 7.1. *Dacă u este de clasă C^1 pe o vecinătate a lui M_0, iar $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$ este un vector nenul, atunci*

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \frac{v_1}{\|\vec{v}\|} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \frac{v_2}{\|\vec{v}\|} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \frac{v_3}{\|\vec{v}\|} \tag{7.1}$$

Întrucât $\frac{v_1}{\|\vec{v}\|}, \frac{v_2}{\|\vec{v}\|}, \frac{v_3}{\|\vec{v}\|}$ sunt componentele versorului director al lui $\vec{v}$ cu acelaşi sens ca şi $\vec{v}$, membrul drept reprezintă produsul scalar dintre vectorul $\vec{n} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\vec{\imath} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\vec{\jmath} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\vec{k}$ normal la suprafaţa de nivel a lui u prin M_0 şi versorul asociat lui $\vec{v}$ cu acelaşi sens ca şi $\vec{v}$.

Practic, valorile derivatelor parţiale ale lui u, calculate în punctul M_0, se înmulţesc cu componentele corespunzătoare ale versorului obţinut prin împărţirea lui $\vec{v}$ la norma sa, adunându-se apoi rezultatele.

De asemenea, formula de mai sus se poate pune şi sub forma

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma,$$

unde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sunt cosinuşii directori ai lui $\vec{v}$.

Exemplu. Determinaţi derivata câmpului scalar

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad u(x,y,z) = x^3 + x^2 - xyz$$

în $M_0(1,-3,2)$ după direcţia vectorului $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Creşte u într-o vecinătate a punctului M_0 după direcţia lui $\vec{v}$, sau scade după această direcţie? Determinaţi ecuaţia suprafeţei de nivel a lui u pe care se află M_0.

Soluţie. Calculăm mai întâi derivatele parţiale ale lui u. Au loc relaţiile

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x^2y - xyz) = 3x^2 + 2xy - yz \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + x^2y - xyz) = x^2 - xz \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(x^3 + x^2y - xyz) = -xy.
\end{aligned}$$

Precizăm acum valorile acestor derivate parţiale în punctul M_0. Pentru $x = 1$, $y = -3$, $z = 2$, obţinem că

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 3, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 3.$$

De asemenea,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3,$$

iar versorul asociat lui $\vec{v}$ cu acelaşi sens ca şi $\vec{v}$ este

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{3}(2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}) = \frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath} + \frac{1}{3}\vec{k}.$$

Atunci

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = 3 \cdot \frac{2}{3} + (-1)\left(-\frac{2}{3}\right) + 3\frac{1}{3} = \frac{11}{3} > 0.$$

Deducem de aici că într-o vecinătate a punctului M_0 câmpul scalar u creşte după direcţia (şi sensul) lui $\vec{v}$. Deoarece $u(M_0) = 1^3 + 1^2(-3) - 1(-3)2 = 4$, rezultă că ecuaţia suprafeţei de nivel a lui u pe care se află M_0 este $u(M) = 4$.

7.2.3 Gradientul unui câmp scalar

Fie $u : D \to \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1. Numim **gradient** al lui u câmpul vectorial definit prin

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Exemplu. Determinaţi $\operatorname{grad} u$, unde $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este câmpul scalar definit prin

$$u(x, y, z) = x^2 + yz.$$

Soluţie. Se obţine că

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz)\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + yz)\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + yz)\vec{k} = 2x\vec{\imath} + z\vec{\jmath} + y\vec{k}.$$

Exemplu. Determinaţi $\operatorname{grad} u$, unde $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este câmpul scalar definit prin

$$u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\vec{r}\|$$

(norma vectorului de poziţie $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ ataşat lui $M(x,y,z)$).

Soluţie. Pentru $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, se obţine că

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} u &= \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\vec{k} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{\imath} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{\jmath} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}).
\end{aligned}$$

Are deci loc relaţia

$$\operatorname{grad}(\|\vec{r}\|) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Gradientul ca vector normal

Să observăm că $\operatorname{grad} u \,|_{M_0}$ (vectorul gradient calculat într-un punct M_0) este coliniar cu versorii normali la suprafaţa de nivel a lui u care trece prin punctul M_0. În fapt, în ipoteza că $\operatorname{grad} u \,|_{M_0} \neq \vec{0}$, unul dintre versorii normali este

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} u \,|_{M_0}}{\left\|\operatorname{grad} u \,|_{M_0}\right\|},$$

celălalt fiind $-\vec{n}$.

Proprietatea de proiecţie

Conform (7.1), rezultă că, pentru un **vector** $\vec{v}$ dat,

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \operatorname{grad} u \,|_{M_0} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \operatorname{pr}_{\vec{v}}(\operatorname{grad} u \,|_{M_0}),$$

unde „·" notează produsul scalar a doi vectori. Obţinem că **derivata după direcţia unui vector este proiecţia scalară a gradientului pe acel vector**.

Direcţia celei mai rapide creşteri (descreşteri)

Conform (7.1), rezultă că, pentru un **versor** $\vec{v}$ dat,

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \operatorname{grad} u \,|_{M_0} \cdot \vec{v}.$$

De aici, calculând derivata după direcţia versorului $\vec{n}$ (în fapt, direcţia gradientului), obţinem

$$\left.\frac{du}{d\vec{n}}\right|_{M_0} = \operatorname{grad} u \,|_{M_0} \cdot \vec{n} = \operatorname{grad} u \,|_{M_0} \cdot \frac{\operatorname{grad} u \,|_{M_0}}{\left\|\operatorname{grad} u \,|_{M_0}\right\|} = \left\|\operatorname{grad} u \,|_{M_0}\right\|.$$

Deducem de aici că direcţia lui $\vec{n}$ (în fapt, direcţia gradientului) este o direcţie de creştere a lui u. Similar, direcţia lui $-\vec{n}$ (în fapt, direcţia opusă gradientului) este o direcţie de descreştere a lui u.

Deoarece

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \operatorname{grad} u \,|_{M_0} \cdot \vec{v} = \left\|\operatorname{grad} u \,|_{M_0}\right\| \vec{n} \cdot \vec{v} = \left\|\operatorname{grad} u \,|_{M_0}\right\| \cos\theta,$$

unde θ este unghiul dintre $\vec{n}$ şi $\vec{v}$, obţinem atunci

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \left.\frac{du}{d\vec{n}}\right|_{M_0} \cos\theta.$$

Cum $|\cos\theta| \le 1$, **direcţia celei mai rapide creşteri (descreşteri) a câmpului scalar u este cea a unui versor al normalei la suprafaţă**. De asemenea, **sensul de creştere este sensul gradientului, sensul de descreştere fiind sensul opus gradientului**.

Exemplu. Fie câmpul scalar

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad u(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$$

şi fie $A(2,1,-2)$. Să se determine suprafaţa de nivel ce trece prin A, gradientul câmpului scalar u în acest punct şi un versor director al normalei în A la suprafaţa de nivel a lui u. Precizaţi dacă u creşte sau scade după direcţia acestui versor.

Soluţie. Deoarece $u(A) = 7$, urmează că suprafaţa de nivel a lui u care trece prin A are ecuaţia $u(x,y,z) = u(A) = 7$, adică $x^2 - y^2 + z^2 = 7$, fiind un hiperboloid cu o pânză. Deoarece

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z,$$

rezultă că

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{\imath} - 2y\vec{\jmath} + 2z\vec{k} \implies \operatorname{grad} u \,|_A = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}.$$

Un versor director al normalei la suprafaţa de nivel a lui u care trece prin A este

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{\operatorname{grad} u\,|_A}{\|\operatorname{grad} u\,|_A\|} = \frac{1}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}}(4\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-4\vec{k}) = \frac{1}{6}(4\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-4\vec{k})\\ &= \frac{2}{3}\vec{\imath}-\frac{1}{3}\vec{\jmath}-\frac{2}{3}\vec{k}.\end{aligned}$$

Deoarece $\vec{n}$ are sensul gradientului, se obţine că u creşte după direcţia lui $\vec{n}$.

Proprietăţi de calcul

Au loc următoarele proprietăţi, consecinţe imediate ale proprietăţilor derivatelor parţiale cu ajutorul cărora este definit gradientul (aditivitate, omogenitate, formula de derivare a produsului, formula de derivare a raportului, regula lanţului).

Teorema 7.2. *Fie u_1, u_2 două câmpuri scalare de clasă C^1 pe D şi fie $c \in \mathbb{R}$. Atunci*

1. $\operatorname{grad}(u_1+u_2) = \operatorname{grad} u_1 + \operatorname{grad} u_2$;
2. $\operatorname{grad}(cu_1) = c\operatorname{grad}(u_1)$;
3. $\operatorname{grad}(u_1u_2) = (\operatorname{grad} u_1)u_2 + u_1(\operatorname{grad} u_2)$,

iar dacă $u_2 \neq 0$ are loc şi

4. $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u_1}{u_2}\right) = \dfrac{1}{u_2^2}[(\operatorname{grad} u_1)u_2 - u_1(\operatorname{grad} u_2)]$.

Fie de asemenea u un câmp scalar de clasă C^1 pe D şi fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1. Atunci

$$\operatorname{grad} \varphi(u) = \varphi'(u)\operatorname{grad} u.$$

Exemplu. Dacă

$$\vec{r} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k},$$

determinaţi $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încât $\vec{r}\cdot\operatorname{grad} f(\|\vec{r}\|) = \|\vec{r}\|^2$ pentru orice $\vec{r} \in \mathbf{V_3}$.

Soluţie. Conform regulii lanţului, rezultă că

$$\operatorname{grad} f(\|\vec{r}\|) = f'(\|\vec{r}\|)\operatorname{grad}(\|\vec{r}\|) = f'(\|\vec{r}\|)\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

De aici, pentru orice $\vec{r} \neq \vec{0}$,

$$\vec{r} \cdot \operatorname{grad} f(\|\vec{r}\|) = \vec{r} \cdot f'(\|\vec{r}\|) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{f'(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|} \vec{r} \cdot \vec{r} = \frac{f'(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|} \|\vec{r}\|^2 = f'(\|\vec{r}\|) \|\vec{r}\| .$$

Urmează că

$$f'(\|\vec{r}\|) \|\vec{r}\| = \|\vec{r}\|^2 \implies f'(\|\vec{r}\|) = \|\vec{r}\|, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Atunci $f'(u) = u$ pentru orice $u \in (0, \infty)$ (de fapt, prin continuitate, şi pentru $u = 0$), iar $f(u) = \int u du = \frac{u^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

7.3 Câmpuri vectoriale. Divergenţa şi rotorul unui câmp vectorial

În cele ce urmează, vom încerca să caracterizăm atât „intensitatea", cât şi rotaţia unui câmp vectorial $\vec{F}$. Ambele concepte vor fi mai uşor de urmărit dacă ne imaginăm câmpul vectorial respectiv ca descriind mişcarea unui fluid. Intuitiv,

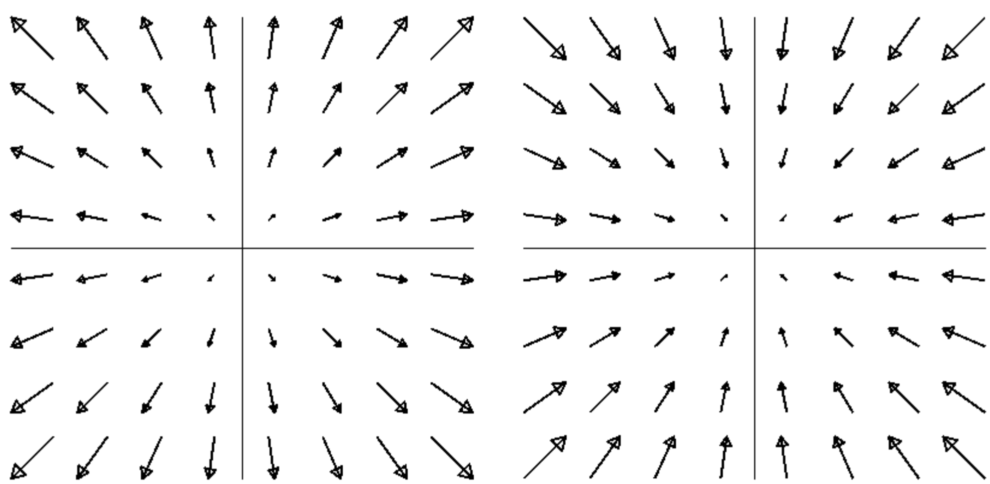

Figura 7.1: $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$, $F_1(x, y, z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, $F_2(x, y, z) = -x\vec{\imath} - y\vec{\jmath}$

figurile de mai sus, în care câmpurile vectoriale respective sunt reprezentate cu ajutorul unor săgeţi par să descrie patru situaţii distincte.

În prima, câmpul vectorial pare a fi în expansiune, având ca sursă principală originea, care pare să „emită" câmpul vectorial. În cea de-a doua, originea pare să „absoarbă" câmpul vectorial. În cea de-a treia, câmpul vectorial pare să execute

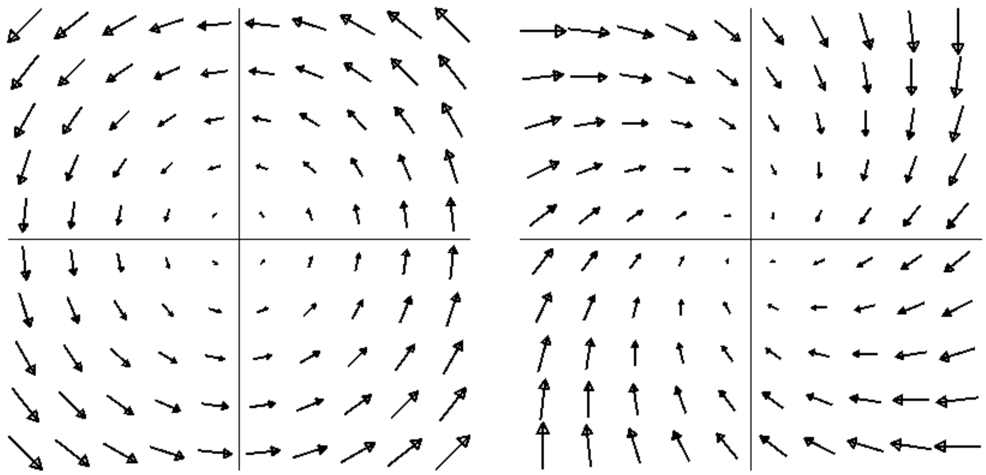

Figura 7.2: $F_3, F_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$, $F_3(x,y,z) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$, $F_4(x,y,z) = (y-x)\vec{\imath} - (x+y)\vec{\jmath}$

o mişcare de rotaţie în jurul originii. Toate aceste situaţii sunt „pure", în sensul că în primele două exemple câmpul (sau fluidul) execută o mişcare radială (de îndepărtare sau apropiere de centru), corespunzătoare „emisiei" sau „absorbţiei", fără rotaţie, în vreme ce în al treilea exemplu este executată o mişcare de rotaţie.

În fine, cea de-a patra situaţie este „mixtă", în sensul că sunt executate în acelaşi timp o mişcare de rotaţie şi una de apropiere de centru („absorbţie").

Pentru a studia aceste fenomene („emisie" şi „absorbţie" pe de o parte), respectiv rotaţie pe de altă parte, vom introduce în cele ce urmează doi operatori diferenţiali, numiţi **divergenţă** şi **rotor**.

7.3.1 Divergenţa unui câmp vectorial

Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Numim **divergenţă** a câmpului vectorial $\vec{F}$ câmpul scalar definit prin

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

În aceste condiţii, referindu-ne la primele două exemple,

$$\operatorname{div}(\vec{F}_1) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 2 > 0,$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}_2) = \frac{\partial}{\partial x}(-x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = -2 < 0,$$

deducând, intuitiv, faptul că divergenţa pozitivă este asociată unor fenomene de „emisie", iar divergenţa negativă unora de „absorbţie" (o justificare mai detaliată va fi oferită ulterior). Ceea ce este poate mai puţin intuitiv este faptul că **toate** punctele domeniului „emit", respectiv „absorb", originea nefiind singurul punct cu această proprietate, aşa cum pare să indice desenul.

De asemenea,

$$\operatorname{div}(\vec{F}_3) = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0,$$
$$\operatorname{div}(\vec{F}_4) = \frac{\partial}{\partial x}(y-x) + \frac{\partial}{\partial y}(-x-y) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = -2 < 0,$$

ceea ce confirmă intuiţia iniţială (în al treilea exemplu are loc doar o mişcare de rotaţie, fără „emisie" sau „absorbţie", iar în cel de-al patrulea are loc o „absorbţie").

Să observăm că putem defini similar şi divergenţa unui câmp vectorial $\vec{G} : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbf{V_2}$. Astfel, dacă $\vec{G} : E \to \mathbf{V_2}$ este un câmp vectorial de clasă C^1,

$$\vec{G}(x,y) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath},$$

vom numi divergenţă a câmpului vectorial $\vec{G}$ câmpul scalar definit prin

$$\operatorname{div}\vec{G} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Câmpuri vectoriale solenoidale

Fie $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1. Spunem că $\vec{F}$ este **solenoidal** în D dacă $\operatorname{div}\vec{F}$ este identic nul în D.

Conform cu observaţiile anterioare, un câmp solenoidal este un câmp **fără surse** (pozitive sau negative, adică atât fără „emisie" cât şi fără „absorbţie"). Să observăm că, utilizând notaţiile de mai sus, $\vec{F}_3$ este un câmp vectorial solenoidal.

Proprietăţi de calcul

Au loc următoarele proprietăţi.

Teorema 7.3. *Fie $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ două câmpuri vectoriale de clasă C^1 pe D, fie u un câmp scalar pe D şi fie $c \in \mathbb{R}$. Atunci*

1. $\operatorname{div}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \operatorname{div}(\vec{F}_1) + \operatorname{div}(\vec{F}_2)$;

2. $\operatorname{div}(c\vec{F}_1) = c\operatorname{div}(\vec{F}_1)$;

3. $\operatorname{div}(u\vec{F}_1) = (\operatorname{grad} u)\cdot\vec{F}_1 + u\operatorname{div}(\vec{F}_1)$.

Ultima formulă este un rezultat analog formulei de derivare a unui produs, cu deosebirea că lui u, fiind un câmp scalar şi nu unul vectorial, nu i se poate aplica divergenţa.

Exemplu. Determinaţi $\operatorname{div}\vec{F}$, unde $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

($\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziţie ataşat lui $M(x,y,z)$)

Soluţie. Se obţine că

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1+1+1 = 3.$$

Are deci loc relaţia

$$\operatorname{div}(\vec{r}) = 3.$$

Exemplu. Determinaţi $\operatorname{div}\vec{F}$, unde $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x,y,z) = \|\vec{r}\|^2\vec{r}$$

($\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziţie ataşat lui $M(x,y,z)$)

Soluţie. Se obţine că

$$\operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}(\|\vec{r}\|^2\vec{r}) = \operatorname{grad}(\|\vec{r}\|^2)\cdot\vec{r} + \|\vec{r}\|^2\operatorname{div}(\vec{r}).$$

Cu notaţia $\varphi(x) = x^2$, deducem

$$\operatorname{grad}(\|\vec{r}\|^2) = \operatorname{grad}\varphi(\|\vec{r}\|) = \varphi'(\|\vec{r}\|)\operatorname{grad}\|\vec{r}\| = 2\|\vec{r}\|\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = 2\vec{r}, \quad r \neq \vec{0}.$$

Deoarece

$$\operatorname{div}\vec{r} = 3,$$

rezultă că

$$\operatorname{div}\vec{F} = 2\vec{r}\cdot\vec{r} + 3\|\vec{r}\|^2 = 2\|\vec{r}\|^2 + 3\|\vec{r}\|^2 = 5\|\vec{r}\|^2.$$

Soluţie alternativă. Observăm că

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (x^2+y^2+z^2)(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}) \\ &= x(x^2+y^2+z^2)\vec{\imath}+y(x^2+y^2+z^2)\vec{\jmath}+z(x^2+y^2+z^2)\vec{k}, \end{aligned}$$

şi atunci

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}((x^2+y^2+z^2)x)+\frac{\partial}{\partial y}((x^2+y^2+z^2)y)+\frac{\partial}{\partial z}((x^2+y^2+z^2)z) \\ &= 2x^2+(x^2+y^2+z^2)+2y^2+(x^2+y^2+z^2)+2z^2+(x^2+y^2+z^2) \\ &= 5(x^2+y^2+z^2). \end{aligned}$$

7.3.2 Rotorul unui câmp vectorial

Fie $\vec{F}: D \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath}+Q(x,y,z)\vec{\jmath}+R(x,y,z)\vec{k}.$$

Numim **rotor** al câmpului vectorial $\vec{F}$ câmpul vectorial $\operatorname{rot}\vec{F}$ definit prin

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Referindu-ne la exemplele de mai sus,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(0)-\frac{\partial}{\partial z}(y)\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\partial}{\partial z}(x)-\frac{\partial}{\partial x}(0)\right)\vec{\jmath} \\ &\quad+\left(\frac{\partial}{\partial x}(y)-\frac{\partial}{\partial y}(x)\right)\vec{k} = \vec{0}, \end{aligned}$$

similar observându-se că $\operatorname{rot}\vec{F_2} = \vec{0}$. Aceasta confirmă, din nou, intuiţia iniţială (lipsa fenomenenului de rotaţie din primele două exemple). În plus,

$$\operatorname{rot}\vec{F_3} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(0)-\frac{\partial}{\partial z}(x)\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\partial}{\partial z}(-y)-\frac{\partial}{\partial x}(0)\right)\vec{\jmath}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(x)-\frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)\vec{k}=2\vec{k},$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}_4=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-x & -x-y & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}(0)-\frac{\partial}{\partial z}(-x-y)\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\partial}{\partial z}(y-x)-\frac{\partial}{\partial x}(0)\right)\vec{\jmath}$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(-x-y)-\frac{\partial}{\partial y}(y-x)\right)\vec{k}=-2\vec{k}.$$

Notaţie alternativă

În loc de rot $\vec{F}$ se mai foloseşte şi notaţia curl $\vec{F}$ („to curl", din limba engleză, înseamnă „a se răsuci", „a se ondula").

Câmpuri vectoriale irotaţionale

Fie $\vec{F}: D \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1. Spunem că $\vec{F}$ este **irotaţional** în D dacă rot $\vec{F}$ este identic nul în D.

Să observăm că, utilizând notaţiile de mai sus, $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ sunt câmpuri vectoriale irotaţionale.

Proprietăţi de calcul

Au loc următoarele proprietăţi.

Teorema 7.4. *Fie $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ două câmpuri vectoriale de clasă C^1 pe D, fie u un câmp scalar de clasă C^1 pe D şi fie $c \in \mathbb{R}$. Atunci*

1. $\operatorname{rot}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)=\operatorname{rot}(\vec{F}_1)+\operatorname{rot}(\vec{F}_2)$;
2. $\operatorname{rot}(c\vec{F}_1)=c\operatorname{rot}(\vec{F}_1)$;
3. $\operatorname{rot}(u\vec{F}_1)=\operatorname{grad} u\times\vec{F}_1+u\operatorname{rot}\vec{F}_1$.

Ultima formulă este, din nou, un rezultat analog formulei de derivare a unui produs, cu menţiunea că lui u, fiind un câmp scalar şi nu unul vectorial, nu i se poate aplica rotorul.

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z)=(y+z)\vec{\imath}+(z+x)\vec{\jmath}+(x+y)\vec{k}.$$

Demonstraţi că $\vec{F}$ este atât irotaţional, cât şi solenoidal.

Soluţie. Se obţine că

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(z+x)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(y+z) - \frac{\partial}{\partial x}(x+y)\right)\vec{\jmath} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(z+x) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z)\right)\vec{k} \\ &= (1-1)\vec{\imath} + (1-1)\vec{\jmath} + (1-1)\vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Are deci loc relaţia

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0},$$

câmpul vectorial $\vec{F}$ fiind irotaţional. De asemenea

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y+z) + \frac{\partial}{\partial y}(z+x) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y) = 0+0+0 = 0.$$

Are deci loc relaţia

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 0,$$

câmpul vectorial $\vec{F}$ fiind şi solenoidal.

Exemplu. Determinaţi rot $\vec{F}$, unde $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

($\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziţie ataşat lui $M(x,y,z)$).

Soluţie. Se obţine că

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(z)\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right)\vec{k} \\ &= 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Are deci loc relaţia

$$\operatorname{rot}(\vec{r}) = \vec{0}.$$

Exemplu. Determinaţi $\operatorname{rot}\vec{F}$, unde $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x,y,z) = \|\vec{r}\|^2\vec{r}$$

($\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziţie ataşat lui $M(x,y,z)$)

Soluţie. Se obţine că

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \operatorname{rot}(\|\vec{r}\|^2\vec{r}) = \operatorname{grad}(\|\vec{r}\|^2) \times \vec{r} + \|\vec{r}\|^2 \operatorname{rot}(\vec{r}).$$

Cu notaţia $\varphi(x) = x^2$, obţinem

$$\operatorname{grad}(\|\vec{r}\|^2) = \operatorname{grad}\varphi(\|\vec{r}\|) = \varphi'(\|\vec{r}\|)) \operatorname{grad}\|\vec{r}\| = 2\|\vec{r}\|\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = 2\vec{r}, \quad r \neq \vec{0}.$$

Deoarece

$$\operatorname{rot}\vec{r} = \vec{0},$$

urmează că

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 2\vec{r} \times \vec{r} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Soluţie alternativă. Observăm că

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= (x^2+y^2+z^2)(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) \\
&= x(x^2+y^2+z^2)\vec{\imath} + y(x^2+y^2+z^2)\vec{\jmath} + z(x^2+y^2+z^2)\vec{k},
\end{aligned}$$

şi atunci

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x(x^2+y^2+z^2) & y(x^2+y^2+z^2) & z(x^2+y^2+z^2) \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z(x^2+y^2+z^2)) - \frac{\partial}{\partial z}(y(x^2+y^2+z^2))\right)\vec{\imath} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x(x^2+y^2+z^2)) - \frac{\partial}{\partial x}(z(x^2+y^2+z^2))\right)\vec{\jmath} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y(x^2+y^2+z^2)) - \frac{\partial}{\partial y}(x(x^2+y^2+z^2))\right)\vec{k} \\
&= (2yz - 2yz)\vec{\imath} + (2zx - 2zx)\vec{\jmath} + (2xy - 2xy)\vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Exemplu. Fiind dat un câmp scalar u, precizaţi dacă următoarele operaţii au ca rezultat scalari, vectori, sau nu sunt bine definite

1. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} u)$, 2. $\operatorname{grad}(\operatorname{div} u)$, 3. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$, 4. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$.

Soluţie. Operaţia 1 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{rot} u$ nu este bine definit (rotorul se poate aplica unui câmp vectorial, nu unuia scalar).

Operaţia 2 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{div} u$ nu este bine definit (divergenţa se poate aplica unui câmp vectorial, nu unuia scalar).

Operaţia 3 este bine definită, cu rezultat un scalar (divergenţa vectorului $\operatorname{grad} u$ este un scalar).

Operaţia 4 este bine definită, cu rezultat un vector (rotorul vectorului $\operatorname{grad} u$ este un vector).

Exemplu. Fiind dat un câmp vectorial $\vec{F}$, precizaţi dacă următoarele operaţii au ca rezultat scalari, vectori, sau nu sunt bine definite

1. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \vec{F})$, 2. $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F})$, 3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F})$, 4. $\operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{F})$.

Soluţie. Operaţia 1 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{grad} \vec{F}$ nu este bine definit (gradientul se poate aplica unui câmp scalar, nu unuia vectorial).

Operaţia 2 este bine definită, cu rezultat un vector (gradientul scalarului $\operatorname{div} \vec{F}$ este un vector).

Operaţia 3 este bine definită, cu rezultat un scalar (divergenţa vectorului $\operatorname{rot} \vec{F}$ este un scalar).

Operaţia 4 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{F})$ nu este bine definit (rotorul se poate aplica unui câmp vectorial, în timp ce $\operatorname{div} \vec{F}$ este unul scalar.

7.3.3 Operatorul ∇ al lui Hamilton

Operatorii de bază ai teoriei câmpurilor menţionaţi mai sus, anume grad, div şi rot, se pot exprima sub o formă simplificată cu ajutorul următorului operator diferenţial ∇, numit şi **operatorul lui Hamilton**,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Acest operator poate fi gândit ca un vector simbolic, cu convenţia că produsul fiecăruia dintre simbolurile $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ cu o funcţie (câmp scalar) u este derivata parţială corespunzătoare a acestei funcţii.

Exprimarea gradientului

Astfel, pentru un câmp scalar u de clasă C^1,

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} u,$$

operaţie care trebuie gândită similar înmulţirii dintre un vector şi un scalar.

Exprimarea divergenţei

Similar, pentru un câmp vectorial $\vec{F}$ de clasă C^1,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k},$$

rezultă că

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F},$$

operaţie care trebuie gândită similar produsului scalar a doi vectori. Să remarcăm, totuşi, că operaţia respectivă **nu** este comutativă. Într-adevăr

$$\vec{F} \cdot \nabla = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}.$$

Exprimarea rotorului

De asemenea

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \vec{F},$$

operaţie care trebuie gândită similar produsului vectorial a doi vectori.

Reţinem deci

$$\nabla u = \operatorname{grad} u, \qquad \nabla \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F}, \qquad \nabla \times \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{F}.$$

7.3.4 Operatorul Δ al lui Laplace

Prin analogie cu operatorul ∇ al lui Hamilton, putem introduce următorul operator diferenţial Δ, numit şi **operatorul lui Laplace**, sau **laplacian**

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Din nou, se face convenţia că produsul fiecăruia dintre simbolurile $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ cu o funcţie (câmp scalar) u este derivata parţială corespunzătoare acestei funcţii.

Δ aplicat unui câmp scalar

Astfel, pentru un câmp scalar u,

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Se observă că, în fapt,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u. \end{aligned}$$

Altfel scris,

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u$$

Δ aplicat unui câmp vectorial

Pentru un câmp vectorial $\vec{F}$,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k},$$

rezultă că

$$\Delta \vec{F} = \Delta(P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}) = (\Delta P)\vec{\imath} + (\Delta Q)\vec{\jmath} + (\Delta R)\vec{k},$$

operatorul Δ aplicându-se pe componentele lui $\vec{F}$.

7.3.5 Productivitatea unui domeniu şi circulaţia unui câmp vectorial

Productivitatea unui domeniu

Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1. Vom numi **productivitate** a domeniului $V \subset D$ cantitatea $\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV$.

Circulaţia unui câmp vectorial

Vom numi **circulaţia** câmpului vectorial $\vec{F}$ de-a lungul curbei $(\Gamma) \subset D$ mărimea (scalară)

$$C = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma P dx + Q dy + R dz.$$

Observăm că dacă $\vec{F}$ este un câmp de forţe, atunci C reprezintă lucrul mecanic efectuat de $\vec{F}$ de-a lungul lui (Γ).

Să presupunem acum că (Γ) mărgineşte un domeniu plan D_1. Definim atunci

$$C_m = \frac{1}{\text{aria}(D_1)} \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ca fiind **circulaţia medie pe unitatea de arie a lui** D_1.

7.3.6 Definiţia revizuită a rotorului

Putem defini atunci rotorul unui câmp vectorial $\vec{F}$, nu neapărat de clasă C^1, precizând proiecţia (scalară) a lui pe un versor arbitrar $\vec{n}$ din $\mathbf{V_3}$ cu ajutorul formulei

$$\text{pr}_{\vec{n}} \operatorname{rot} \vec{F}(M) = \lim_{\substack{\text{aria}(D_1) \to 0 \\ M \in D_1}} \frac{1}{\text{aria}(D_1)} \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

(Γ) fiind curba închisă care mărgineşte D_1, un domeniu conţinut într-un plan perpendicular pe $\vec{n}$, atunci când această limită există.

Dacă $\vec{F}$ este un câmp vectorial de clasă C^1, această definiţie se reduce la definiţia iniţială. Totuşi, această din urmă definiţie precizează sensul fizic al rotorului ca fiind **circulaţia infinitezimală pe unitatea de arie**.

7.4 Câmpuri vectoriale particulare

Vom începe prin a menţiona câteva proprietăţi de legătură între gradient, divergenţă şi rotor.

Teorema 7.5. *1. Pentru orice câmp scalar u de clasă C^2,*

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \vec{0}.$$

2. Pentru orice câmp vectorial $\vec{F}$ de clasă C^2,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0.$$

Demonstraţie. 1. Fiind dat un câmp scalar u de clasă C^2, să observăm că

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) \vec{\imath} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \vec{\jmath}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)\vec{k}=\vec{0},$$

conform egalităţii derivatelor parţiale mixte ale lui u.

2. Fiind dat un câmp vectorial $\vec{F}$ de clasă C^2,

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{\imath}+Q(x,y,z)\vec{\jmath}+R(x,y,z)\vec{k},$$

să observăm că

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) &= \operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\right]\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

conform egalităţii derivatelor parţiale mixte ale lui P, Q, R. ■

7.4.1 Câmpuri potenţiale

Fie un câmp vectorial $\vec{F}: D \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{\imath}+Q(x,y,z)\vec{\jmath}+R(x,y,z)\vec{k}.$$

Vom spune că $\vec{F}$ este un **câmp potenţial** dacă el este gradientul unui câmp scalar, adică există $u : D \to \mathbb{R}$ astfel ca $\vec{F} = \operatorname{grad} u$, câmpul scalar u numindu-se **potenţialul** sau **funcţia de forţă** a câmpului vectorial $\vec{F}$.

Legătura între potenţialul unui câmp vectorial şi potenţialul unei forme diferenţiale

Se observă de aici că dacă $\vec{F}$ este un câmp potenţial,

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{\imath}+Q(x,y,z)\vec{\jmath}+R(x,y,z)\vec{k}.$$

iar u este potenţialul său, atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=Q,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=R.$$

Altfel spus,

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{\imath}+Q(x,y,z)\vec{\jmath}+R(x,y,z)\vec{k}$$

este un câmp potenţial dacă şi numai dacă forma diferenţială asociată

$$d\mathcal{F} = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

este formă diferenţială exactă, iar u este un potenţial pentru $\vec{F}$ dacă şi numai dacă este un potenţial pentru $d\mathcal{F}$. Obţinem atunci următoarea consecinţă a Teoremei 4.10.

Teorema 7.6. *Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un câmp de clasă C^1 pe domeniul simplu conex D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. $\displaystyle\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ *este independentă de drum în D.*
2. $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ *pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D.*
3. *$\vec{F}$ este câmp potenţial.*
4. *$\vec{F}$ este câmp irotaţional.*

Dacă D nu este simplu conex, atunci primele trei condiţii sunt echivalente, iar cea de-a patra este o condiţie necesară pentru celelalte trei, nu neapărat şi suficientă. În plus, are loc următoarea formulă de calcul, similară formulei Leibniz-Newton pentru integrala definită.

Corolar 7.6.1. *Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un câmp potenţial pe D şi fie $\overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă pe porţiuni în D. Atunci*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = u(x_B, y_B, z_B) - u(x_A, y_A, z_A),$$

unde u este potenţialul lui $\vec{F}$.

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ definit prin

$$\vec{F}(x,y,z) = xyz(yz\vec{\imath} + zx\vec{\jmath} + xy\vec{k}).$$

Demonstraţi că $\vec{F}$ este un câmp potenţial şi determinaţi un potenţial al acestuia.

Soluţie. Observăm că

$$\vec{F}(x,y,z) = xy^2z^2\vec{\imath} + x^2yz^2\vec{\jmath} + x^2y^2z\vec{k},$$

iar

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & x^2y^2z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz^2)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2z)\right)\vec{\jmath} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2yz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z^2)\right)\vec{k} \\
&= (2x^2yz - 2x^2yz)\vec{\imath} + (2xy^2z - 2xy^2z)\vec{\jmath} + (2xyz^2 - 2xyz^2)\vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Urmează că $\vec{F}$ este irotaţional şi, fiind definit pe întreg $\mathbb{R}^3$ (care este simplu conex), este şi câmp potenţial. Fie u potenţialul său. Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy^2z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2yz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^2y^2z.$$

Deducem că

$$u = \int xy^2z^2 dx = \frac{1}{2}x^2y^2z^2 + \varphi_1(y,z).$$

Observăm că $u(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y^2z^2$ verifică toate cele trei egalităţi, fiind deci un potenţial al lui $\vec{F}$.

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ definit prin

$$\vec{F}(x,y,z) = (x+y+z)(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}).$$

Demonstraţi că $\vec{F}$ nu este un câmp potenţial.

Soluţie. Observăm că

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2+xy+xz)\vec{\imath} + (y^2+yx+yz)\vec{\jmath} + (z^2+zx+zy)\vec{k},$$

iar

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+xy+xz & y^2+yx+yz & z^2+zx+zy \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^2 + zx + zy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 + yx + yz) \right) \vec{\imath} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + xy + xz) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2 + zx + zy) \right) \vec{\jmath} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2 + yx + yz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + xz) \right) \vec{k} \\
&= (z - y)\vec{\imath} + (x - z)\vec{\jmath} + (y - x)\vec{k}.
\end{aligned}
$$

De aici, rot $\vec{F}$ este neidentic nul în $\mathbb{R}^3$, iar $\vec{F}$ nu este irotaţional. Nefiind un câmp irotaţional, $\vec{F}$ nu este nici un câmp potenţial.

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ definit prin

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}).$$

Demonstraţi că $\vec{F}$ este un câmp potenţial şi determinaţi un potenţial al acestuia.

Soluţie. Observăm că

$$\vec{F}(x, y, z) = \|\vec{r}\|^{2n}\vec{r}, \quad \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Căutăm atunci un potenţial u de forma $u = \varphi(\|\vec{r}\|)$. Atunci

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} \varphi(\|\vec{r}\|) = \varphi'(\|\vec{r}\|)\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0},$$

iar

$$\|\vec{r}\|^{2n} = \varphi'(\|\vec{r}\|)\frac{1}{\|\vec{r}\|} \implies \varphi'(\|\vec{r}\|) = \|\vec{r}\|^{2n+1}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

De aici,

$$\varphi'(r) = r^{2n+1},\ r > 0 \implies \varphi(r) = \int r^{2n+1} dr = \frac{r^{2n+2}}{2n+2} + \mathcal{C}.$$

Se obţine că un potenţial al lui $\vec{F}$ este

$$u(x, y, z) = \frac{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{2n+2}(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}.$$

7.4.2 Câmpuri solenoidale

Reamintim că un câmp vectorial $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ de clasă C^1 se numeşte **solenoidal** în D dacă $\operatorname{div} \vec{F}$ este identic nul în D.

Următoarele proprietăţi sunt atunci consecinţe ale formulei lui Stokes, respectiv ale formulei Gauss-Ostrogradski şi formulelor de legătură menţionate în Teorema 7.5.

Teorema 7.7.
1. *Fluxul unui câmp solenoidal de clasă C^1 printr-o suprafaţă netedă închisă este* 0.
2. *Rotorul unui câmp $\vec{G}$ de clasă C^2 este un câmp solenoidal.*

7.4.3 Câmpuri armonice

Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$. Vom spune că $\vec{F}$ este **armonic** dacă este în acelaşi timp solenoidal şi irotaţional.

Dacă D este simplu conex, atunci $\vec{F}$ este de asemenea un câmp potenţial. Fie u potenţialul acestuia. Atunci

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \operatorname{div} \vec{F} = 0. \tag{7.2}$$

O funcţie u de clasă C^2 care satisface ecuaţia (7.2), numită **ecuaţia lui Laplace**, va fi numită **funcţie armonică**.

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F}$ definit prin $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F} = (y+z)\vec{\imath} + (z+x)\vec{\jmath} + (x+y)\vec{k}.$$

Determinaţi un câmp vectorial $\vec{A}$ astfel ca $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$.

Soluţie. Fie $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Atunci

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

de unde

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = y + z \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = z + x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = x + y. \end{cases}$$

Din motive de simetrie, căutăm P, Q, R astfel încât

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{1}{2}(y+z), & \dfrac{\partial Q}{\partial z} = -\dfrac{1}{2}(y+z) \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{1}{2}(z+x), & \dfrac{\partial R}{\partial x} = -\dfrac{1}{2}(z+x) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{2}(x+y), & \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}(x+y). \end{cases}$$

Deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{2}(z+x),$$

rezultă că

$$P = \int \frac{1}{2}(z+x)dz = \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}zx + \varphi_1(x,y).$$

Similar, deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x+y),$$

rezultă că

$$P = \int -\frac{1}{2}(x+y)dy = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy + \varphi_2(x,z).$$

Comparând cele două expresii ale lui P, observăm că o posibilă soluţie este

$$P = \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}zx - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy = -\frac{1}{4}(y^2 - z^2) - \frac{1}{2}x(y-z).$$

Din considerente similare obţinem

$$Q = -\frac{1}{4}(z^2 - x^2) - \frac{1}{2}y(z-x), \quad R = -\frac{1}{4}(x^2 - y^2) - \frac{1}{2}z(x-y).$$

Câmpul vectorial căutat este atunci

$$\begin{aligned} \vec{F} = &- \left[\frac{1}{4}(y^2 - z^2) + \frac{1}{2}x(y-z)\right]\vec{\imath} - \left[\frac{1}{4}(z^2 - x^2) + \frac{1}{2}y(z-x)\right]\vec{\jmath} \\ &- \left[\frac{1}{4}(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}z(x-y)\right]\vec{k}. \end{aligned}$$

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F}$ definit prin $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Demonstraţi că nu există un câmp vectorial $\vec{A}$ de clasă C^2 astfel ca $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$.

Soluţie. Dacă ar exista un câmp vectorial $\vec{A}$ de clasă C^2 astfel ca $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$, atunci ar trebui ca

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0.$$

Observăm că

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0,$$

de unde deducem că nu există un câmp vectorial $\vec{A}$ cu proprietăţile căutate.

Aplicaţii

7.1. *Fie $\vec{a} \in \mathbf{V_3}$ un vector constant. Demonstraţi că*

$$\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}, \qquad \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r}) = 0, \qquad \operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}.$$

7.2. *Fie $\vec{a} \in \mathbf{V_3}$ un vector constant. Demonstraţi că*

$$\operatorname{grad}((\vec{a} \cdot \vec{r})^n) = n(\vec{a} \cdot \vec{r})^{n-1}\vec{a}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

7.3. *Fie $\vec{a} \in \mathbf{V_3}$ un vector constant. Demonstraţi că*

$$\operatorname{grad}(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\|^n}) = \frac{\vec{a}}{\|\vec{r}\|^n} - n\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\|^{n+2}}\vec{r}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

7.4. *Determinaţi o funcţie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pentru care*

$$\vec{r} \cdot \operatorname{grad} f(\|\vec{r}\|) = \|\vec{r}\|.$$

7.5. 1. *Demonstraţi că*

$$\operatorname{grad}(\frac{1}{\|\vec{r}\|^n}) = -n\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^{n+2}}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}, n \in \mathbb{N}.$$

2. *Demonstraţi că* $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{C}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r}, \quad \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}, \quad C \in \mathbb{R}, C > 0,$$

(câmpul forţelor de atracţie gravitaţională) este un câmp potenţial.

7.6. *Fie* $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = (yz + 4x)\vec{\imath} + (xz + 4y)\vec{\jmath} + (xy + 4z)\vec{k}.$$

Calculaţi $\operatorname{rot} \vec{F}$ *şi arătăţi că* $\vec{F}$ *este irotaţional.*

7.7. *Fie* $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy - 2z^2)\vec{\imath} + (4xz - y^2)\vec{\jmath} + (yz - 2x^2)\vec{k}.$$

Calculaţi $\operatorname{div} \vec{F}$ *şi arătăţi că* $\vec{F}$ *este solenoidal.*

7.8. *Determinaţi* $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^1 *astfel încât câmpul vectorial*

$$\vec{F}(x,y,z) = x\varphi(x)\vec{\imath} - y\varphi(x)\vec{\jmath} + x^2 z\vec{k}$$

să fie solenoidal. Pentru φ *astfel determinat, precizaţi* $\operatorname{rot} \vec{F}$.

7.9. 1. *Dacă* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *este o funcţie de clasă* C^1, *iar* $\vec{a} \in \mathbf{V_3}$ *este un vector constant, demonstraţi că*

$$\operatorname{div}(f(\|\vec{r}\|)\vec{a}) = \frac{f'(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|}(\vec{r} \cdot \vec{a}), \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

2. *Demonstraţi că*

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{a}}{\|\vec{r}\|}\right) = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{\|\vec{r}\|^3}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

7.10. 1. *Dacă* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *este o funcţie de clasă* C^1, *demonstraţi că*

$$\operatorname{div}(f(\|\vec{r}\|)\vec{r}) = f'(\|\vec{r}\|)\|\vec{r}\| + 3f(\|\vec{r}\|), \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

2. *Demonstraţi că*

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\right) = \frac{2}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

3. *Determinaţi $p \in \mathbb{R}$ astfel ca*

$$\operatorname{div}(\|\vec{r}\|^p \vec{r}) = 0.$$

7.11. 1. *Dacă $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^2, demonstraţi că*

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(\|\vec{r}\|)) = f''(\|\vec{r}\|) + 2\frac{f'(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

2. *Demonstraţi că*

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\right) = \frac{2}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

7.12. *Fiind date două câmpuri vectoriale $\vec{F}$, $\vec{G}$ de clasă C^1, demonstraţi că*

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{G} - \operatorname{rot}(\vec{G}) \cdot \vec{F}.$$

7.13. *Demonstraţi că dacă două câmpuri vectoriale $\vec{F}$, $\vec{G}$ de clasă C^1 sunt irotaţionale, atunci $\vec{F} \times \vec{G}$ este solenoidal.*

7.14. *Fie u, v două câmpuri scalare de clasă C^1 şi fie $\vec{F}$ câmpul vectorial definit prin*

$$\vec{F} = \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v.$$

1. *Demonstraţi că F este solenoidal.*

2. *Demonstraţi că $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$, unde $\vec{A} = \frac{1}{2}(u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u)$.*

7.15. *Fie $\vec{F}$ un câmp vectorial de clasă C^2. Demonstraţi că*

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = \nabla^2 \vec{F} + \nabla \times (\nabla \times \vec{F}),$$

adică

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) = \Delta \vec{F} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F})$$

(prima formă este mai uşor de reţinut, întrucât toţi membrii conţin „pătrate" în care intervine operatorul Hamilton, putând fi şi privită prin analogie cu formula de derivare a unui produs).

7.16. *Demonstraţi că, folosind notaţia*

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad \textit{pentru } \vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k},$$

au loc relaţiile

$$\operatorname{div}\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \vec{F}, \qquad \operatorname{rot}\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \vec{F}.$$

7.17. *1. Demonstraţi că, pentru orice $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}_3$,*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}.$$

2. Fie $\vec{F}$, $\vec{G}$ două câmpuri vectoriale de clasă C^1. Demonstraţi că

$$\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \left[(\nabla \cdot \vec{G})\vec{F} - (\nabla \cdot \vec{F})\vec{G}\right] + \left[(\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}\right]$$

(prima parte este similară celei din formula de mai sus, iar a doua este „completarea" ei, după schimbarea ordinii în produsele simbolice, care, reamintim, sunt necomutative).

3. Demonstraţi (şi pe această cale) că dacă $\vec{a} \in \mathbf{V_3}$ este un vector constant, atunci

$$\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}.$$