CONCURS "ALEXANDRU CLIMESCU". (Decembrie 2008)

I. Fie matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $tr(X)$ = suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X.

Demonstrați că:

ⓐ $\det(X+I_2) = \det(X-I_2)$ dacă și numai dacă $tr(X)=0$.

ⓑ Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $\det(A+I_2)=\det(A-I_2)$ și $\det(A^{2010}+I_2) = \det(A^{2010}-I_2)$, atunci $A^2=O_2$.

II. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ și care satisface condițiile: $f'(0)=1$ și $f(x+t)=e^x\cdot f(t)+e^t\cdot f(x)$, $(\forall)\ x,t\in\mathbb{R}$.

ⓐ Arătați că $f'(x)-f(x)=e^x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$;

ⓑ Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}-x$ este constantă pe $\mathbb{R}$;

ⓒ Determinați funcția f.

III. Se consideră funcția derivabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\int_0^{\operatorname{arctg} x} e^{\operatorname{tg}^2 t}\, dt$$

ⓐ Să se calculeze $f'(x)$;

ⓑ Să se demonstreze că:

$$\int_0^1 \frac{x\cdot f(x)}{e^{x^2}}\cdot dx + \frac{1}{2e}\cdot\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x^2}\cdot dx = \frac{\pi}{8}.$$

IV. Se dă aplicația (funcția) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, dată față de baza canonică din $\mathbb{R}^4$ prin matricea:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ⓐ Calculați polinomul caracteristic al matricii A, $P(\lambda)=\det(A-\lambda I_4)$, utilizând proprietăți ale determinanților;

ⓑ Pentru $a=-1$, să se determine vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda=2$.

*****