

# **ELEMENTE DE CALCUL DIFERENȚIAL PE DREAPTA REALĂ**

Paul GEORGESCU

March 20, 2012

# Cuprins

<b>1</b>	<b>NOȚIUNI GENERALE</b>	<b>6</b>
1.1	Teoria mulțimilor . . . . .	6
1.2	Construcția axiomatică a mulțimii numerelor reale . . . . .	9
1.2.1	Minoranți, majoranți . . . . .	10
1.2.2	Mulțimi mărginite . . . . .	12
1.3	Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	16
1.3.1	Intervale în $\mathbb{R}$ și $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	17
1.3.2	Vecinătăți în $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	19
1.4	Inegalități între numere reale . . . . .	21
1.5	Funcții . . . . .	22
<b>2</b>	<b>ȘIRURI DE NUMERE REALE</b>	<b>31</b>
2.1	Proprietăți generale . . . . .	31
2.1.1	Moduri de definire a unui șir . . . . .	31
2.1.2	Subșiruri ale unui șir dat . . . . .	34
2.1.3	Șiruri mărginite . . . . .	35
2.1.4	Șiruri monotone . . . . .	36
2.2	Șiruri cu limită . . . . .	37
2.2.1	Șiruri convergente . . . . .	39
2.2.2	Proprietăți ale șirurilor cu limită . . . . .	48
2.2.3	Relații între convergență, monotonie și mărginire . . . . .	49
2.2.4	Operații cu șiruri convergente . . . . .	51
2.2.5	Operații cu șiruri cu limită infinită . . . . .	56
2.2.6	Calculul unor limite fundamentale . . . . .	59
2.2.7	Puncte limită ale unui șir . . . . .	62
2.2.8	Șiruri fundamentale (Cauchy) . . . . .	66

2.2.9	Criterii de convergență utilizând raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ . . . . .	69
2.2.10	Teoremele Stolz-Césaro . . . . .	72
2.2.11	Șiruri cu limita numărul $e$ . . . . .	74
<b>3</b>	<b>SERII NUMERICE</b> . . . . .	<b>86</b>
3.1	Serii cu termeni pozitivi . . . . .	99
3.1.1	Criteriul de condensare . . . . .	101
3.1.2	Criterii de comparație . . . . .	103
3.1.3	Criterii ale radicalului . . . . .	110
3.1.4	Criterii ale raportului . . . . .	113
3.1.5	Criteriul Raabe-Duhamel . . . . .	117
3.2	Serii cu termeni oarecare . . . . .	121
3.2.1	Criteriul lui Dirichlet . . . . .	122
3.2.2	Criteriul lui Abel . . . . .	124
3.2.3	Serii alternante. Criteriul Leibniz . . . . .	125
3.2.4	Serii absolut convergente . . . . .	127
3.2.5	Produsul după Cauchy a două serii . . . . .	129
3.3	Estimarea restului de ordin $p$ . . . . .	131
<b>4</b>	<b>PROPRIETĂȚI TOPOLOGICE ȘI DE NUMĂRARE ALE LUI <math>\overline{\mathbb{R}}</math></b> . . . . .	<b>139</b>
4.1	Proprietăți topologice ale lui $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	139
4.1.1	Puncte de acumulare . . . . .	139
4.1.2	Puncte aderente . . . . .	142
4.1.3	Puncte interioare . . . . .	144
4.1.4	Puncte de frontieră . . . . .	146
4.1.5	Mulțimi deschise, mulțimi închise, mulțimi compacte . . . . .	147
4.2	Proprietăți de numărare ale lui $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	154
4.2.1	Numere cardinale . . . . .	154
4.2.2	Mulțimi numărabile . . . . .	154
4.2.3	Mulțimi de puterea continuului . . . . .	158
<b>5</b>	<b>LIMITE DE FUNCȚII</b> . . . . .	<b>161</b>
5.1	Limita unei funcții într-un punct . . . . .	161
5.1.1	Caracterizări analitice . . . . .	162
5.1.2	Teorema de caracterizare cu șiruri . . . . .	163

5.1.3	Limite laterale . . . . .	165
5.1.4	Criterii de existență a limitei unei funcții într-un punct . . .	167
5.1.5	Proprietăți ale funcțiilor cu limită . . . . .	170
5.2	Proprietăți de calcul ale limitelor de funcții . . . . .	175
5.2.1	Operații cu limite de funcții . . . . .	175
5.2.2	Limitele funcțiilor elementare . . . . .	177
5.2.3	Limite fundamentale . . . . .	186
<b>6</b>	<b>FUNCȚII CONTINUE</b>	<b>198</b>
6.1	Continuitatea unei funcții într-un punct . . . . .	198
6.1.1	Continuitate laterală . . . . .	200
6.1.2	Funcții continue pe o mulțime . . . . .	201
6.1.3	Puncte de discontinuitate . . . . .	201
6.1.4	Prelungirea prin continuitate a unei funcții într-un punct . .	204
6.1.5	Caracterizarea cu șiruri a continuității unei funcții într-un punct . . . . .	204
6.1.6	Caracterizarea cu $\varepsilon - \delta$ a continuității unei funcții într-un punct . . . . .	205
6.1.7	Operații cu funcții continue . . . . .	205
6.1.8	Proprietăți locale ale funcțiilor continue . . . . .	207
6.2	Proprietăți ale funcțiilor continue pe o mulțime . . . . .	207
6.2.1	Proprietatea lui Darboux . . . . .	207
6.2.2	Funcții uniform continue . . . . .	211
6.2.3	Funcții Lipschitz. Contractii . . . . .	211
6.2.4	Funcții continue definite pe intervale închise și mărginite . .	213
<b>7</b>	<b>DERIVATE. DIFERENȚIALE</b>	<b>219</b>
7.1	Funcții derivabile. Funcții diferențiabile . . . . .	220
7.1.1	Operații cu funcții derivabile . . . . .	224
7.1.2	Derivatele funcțiilor elementare . . . . .	225
7.1.3	Derivata funcției compuse . . . . .	228
7.1.4	$(f^g)'$ . . . . .	230
7.1.5	Derivata unui determinant funcțional . . . . .	230
7.1.6	Derivata funcției inverse . . . . .	231
7.1.7	Diferențiala unei funcții . . . . .	233

7.1.8	Operații cu funcții diferențiabile . . . . .	235
7.1.9	Diferențiala funcției compuse . . . . .	236
7.2	Derivate și diferențiale de ordin superior . . . . .	237
7.2.1	Derivate de ordin superior . . . . .	237
7.2.2	Formula lui Leibniz . . . . .	239
7.2.3	Diferențiale de ordin superior . . . . .	241
7.3	Teoremele fundamentale ale calculului diferențial . . . . .	242
7.3.1	Teorema lui Fermat . . . . .	244
7.3.2	Teorema lui Rolle . . . . .	245
7.3.3	Teorema lui Lagrange . . . . .	248
7.3.4	Teorema lui Cauchy . . . . .	253
7.3.5	Regulile lui L'Hôpital . . . . .	254
7.3.6	Formula lui Taylor . . . . .	264
7.3.7	Puncte de extrem ale unei funcții. Condiții necesare și suficiente . . . . .	271
7.4	Aspecte grafice în studiul variației funcțiilor . . . . .	273
7.4.1	Asimptote . . . . .	273
7.4.2	Convexitate. Concavitate . . . . .	278

# Capitolul 1

## NOȚIUNI GENERALE

### 1.1 Teoria mulțimilor

Dacă  $A$  este o mulțime, vom nota prin  $x \in A$  faptul că  $x$  este un element al mulțimii  $A$  (sau  $x$  aparține lui  $A$ ), respectiv prin  $x \notin A$  faptul că  $x$  nu este un element al mulțimii  $A$  (sau  $x$  nu aparține lui  $A$ ). Mulțimea care nu conține niciun element se va numi *mulțimea vidă* și se va nota  $\emptyset$ .

#### Submulțimi, supramulțimi

Fiind date două mulțimi  $A$  și  $B$ , vom spune că  $A$  este o *submulțime* a lui  $B$  (și vom nota  $A \subseteq B$ ), sau  $B$  este o *supramulțime* a lui  $A$  (și vom nota  $B \supseteq A$ ) dacă orice element al lui  $A$  este și un element al lui  $B$ . Desigur,  $\emptyset \subseteq A$  pentru orice mulțime  $A$ . Dacă  $A$  este o submulțime a lui  $B$ , dar  $A \neq B$ , atunci  $A$  se numește *submulțime proprie* a lui  $B$ , ceea ce se notează  $A \subsetneq B$ . Dată o mulțime  $A$ , se va nota cu  $\mathcal{P}(A)$  *mulțimea submulțimilor (părților) sale*. Se observă că  $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$ .

#### Egalitatea a două mulțimi

Două mulțimi  $A, B$  vor fi numite *egale* dacă au aceleași elemente, acest lucru fiind notat  $A = B$ . Se observă că  $A = B$  dacă și numai dacă  $A \subseteq B$  și  $B \subseteq A$ , această caracterizare fiind utilă pentru demonstrarea practică a multor egalități de mulțimi. Dacă  $A$  și  $B$  nu sunt egale, acest lucru se notează  $A \neq B$ , ceea ce revine, conform observației anterioare, fie la  $A \not\subseteq B$ , fie la  $B \not\subseteq A$ .

**Operații cu mulțimi**

Fie  $X$  o mulțime și  $A, B \in \mathcal{P}(X)$ . Definim mulțimile

$$A \cup B = \{x \in X; x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in X; x \in A \wedge x \in B\},$$

numite *reuniunea*, respectiv *intersecția* lui  $A$  și  $B$ . Dacă  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A$  și  $B$  se numesc *disjuncte*.

Aceste operații cu mulțimi au următoarele proprietăți

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(*idempotență*, *comutativitate*, *asociativitate*, respectiv *distributivitate*). Proprietățile de asociativitate asigură faptul ca scrierile  $A \cup B \cup C$  și  $A \cap B \cap C$  nu sunt ambigue.

Operațiile de reuniune și intersecție se pot extinde la familii nu neapărat finite de mulțimi. În acest sens, dată o familie  $(A_i)_{i \in I}$ , unde  $I$  este o mulțime oarecare de indici, finită sau nu, vom defini

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X; \text{există } i \in I \text{ astfel ca } x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X; x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.$$

**Mulțimile**

$$A \setminus B = \{x \in X; x \in A \wedge x \notin B\},$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

se numesc *diferența*, respectiv *diferența simetrică* a mulțimilor  $A$  și  $B$ . Mulțimea

$$c_X A = \{x \in X; x \notin A\}$$

se numește *complementara* lui  $A$  față de  $X$ ; dacă nu există pericol de confuzie,  $c_X A$  se notează  $cA$ . Se observă atunci că

$$A \setminus B = A \cap cB$$

și au loc următoarele proprietăți, numite *formulele lui de Morgan*

$$c\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} cA_i$$

$$c\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} cA_i.$$

Vom numi *produs cartezian* al mulțimilor  $A$  și  $B$  (în această ordine) mulțimea tuturor perechilor ordonate  $(x, y)$ , cu  $x \in A$ , iar  $y \in B$ , adică

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \wedge y \in B\}.$$

În general,  $A \times B \neq B \times A$ . Două elemente  $(x_1, y_1)$  și  $(x_2, y_2)$  ale produsului cartezian  $A \times B$  sunt egale dacă și numai dacă  $x_1 = x_2$  și  $y_1 = y_2$ .

Date mulțimile  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , numim *produs cartezian* al acestora mulțimea tuturor perechilor ordonate cu  $n$  elemente (denumite și *n-uple*)  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , cu  $a_i \in A_i$  pentru orice  $1 \leq i \leq n$ , adică

$$A_1 \times A_2 \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in A_i \text{ pentru orice } 1 \leq i \leq n\}.$$

Dacă  $A_i = A$  pentru  $1 \leq i \leq n$ , se utilizează notația prescurtată

$$A \times A \times \dots \times A = A^n.$$

### Mulțimi de numere

În cele ce urmează, vom presupune cunoscute proprietățile următoarelor mulțimi de numere:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  - mulțimea numerelor naturale;

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$  - mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$  - mulțimea numerelor raționale.

Între acestea au loc următoarele relații de incluziune

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Pentru  $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$ , se notează cu  $A^* = A \setminus \{0\}$  mulțimea numerelor nenule din  $A$ .



## 1.2 Construcția axiomatică a mulțimii numerelor reale

Intuitiv, mulțimea numerelor reale poate fi înțeleasă ca mulțimea tuturor fracțiilor zecimale infinite, sub forma

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \{\overline{r, r_1 r_2 \dots r_n \dots}; r \in \mathbb{Z}, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}\} \\ &= \left\{ r + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \dots + \frac{r_n}{10^n} + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Definiția de mai sus (îndeajuns de explicită, dar totuși pur algebrică) este însă greu de folosit în analiza matematică, necesitând unele completări. Din punctul de vedere al analizei matematice, mulțimea numerelor reale, notată  $\mathbb{R}$ , va fi un corp comutativ total ordonat, a cărui relație de ordine este compatibilă cu operațiile de adunare și înmulțire și care în plus satisface o anumită axiomă de completitudine. Aceste proprietăți, ce vor fi clarificate în cele de mai jos, sunt motivate de necesitatea de a efectua operațiile elementare cu numere (structura de corp), necesitatea de a putea compara numere și de a putea lucra convenabil cu inegalitățile rezultate (structura de ordine, împreună cu relațiile de compatibilitate cu operațiile), precum și de a diferenția mulțimea numerelor reale de mulțimea numerelor raționale (axioma de completitudine).

Vom numi mulțimea numerelor reale o mulțime  $\mathbb{R}$  înzestrată cu două operații algebrice „+” (adunarea) și „·” (înmulțirea) precum și cu o relație de ordine „≤” care satisfac grupurile de axiome (I), (II) și (III) de mai jos.

### Axiomele structurii algebrice

(I)  $\mathbb{R}$  este un corp comutativ, adică

(I.1)  $x + (y + z) = (x + y) + z$  pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .  
(asociativitatea adunării)

(I.2)  $x + y = y + x$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .  
(comutativitatea adunării)

(I.3) Există  $0 \in \mathbb{R}$  astfel ca  $0 + x = x + 0 = x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .  
(existența elementului neutru la adunare)

(I.4) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  există  $-x \in \mathbb{R}$  astfel ca  $x + (-x) = (-x) + x = 0$ .  
(existența simetricului oricărui element în raport cu adunarea)

- (I.5)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$  pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .  
(asociativitatea înmulțirii)
- (I.6)  $x + y = y + x$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .  
(comutativitatea înmulțirii)
- (I.7) Există  $1 \in \mathbb{R}$  astfel ca  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .  
(existența elementului neutru la înmulțire)
- (I.8) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$  există  $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$  astfel ca  $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$ .  
(existența simetricului (inversului) oricărui element nenul în raport cu înmulțirea)
- (I.9)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$  pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .  
(distributivitatea înmulțirii față de adunare)

(II)  $\mathbb{R}$  este total ordonat, adică

- (II.1)  $x \leq x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- (II.2)  $x \leq y$  și  $y \leq x \implies x = y$ .
- (II.3)  $x \leq y$  și  $y \leq z \implies x \leq z$   
(„ $\leq$ ” este o relație de ordine pe  $\mathbb{R}$ )
- (II.4) Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ , are loc fie  $x \leq y$ , fie  $y \leq x$ .  
(relația de ordine este totală, adică oricare două elemente  $x, y$  se pot compara)
- (II.5) Dacă  $x \leq y$ , atunci  $x + z \leq y + z$  pentru orice  $z \in \mathbb{R}$ .  
(relația de ordine este compatibilă cu operația de adunare)
- (II.6) Dacă  $x \leq y$  iar  $0 \leq z$ , atunci  $x \cdot z \leq y \cdot z$ .  
(relația de ordine este compatibilă cu operația de înmulțire)

Proprietățile de mai sus definesc structura algebrică a lui  $\mathbb{R}$ . Pentru a enunța cea de-a treia axiomă, care face posibilă demonstrarea rezultatelor specifice analizei matematice, vor fi făcute mai întâi câteva preparative suplimentare.

### 1.2.1 Minoranți, majoranți

Fie  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ . Spunem că  $A$  este *minorată* dacă există  $m \in \mathbb{R}$  astfel că  $m \leq x$  pentru orice  $x \in A$ . Un astfel de element  $m$  (care nu este unic determinat) se va numi *minorant* al mulțimii  $A$ . Similar, spunem că  $A$  este *majorată*

dacă există  $M \in \mathbb{R}$  astfel ca  $x \leq M$  pentru orice  $x \in A$ , un astfel de element  $M$  (care de asemenea nu este unic determinat) numindu-se *majorant* al mulțimii  $A$ . Minoranții și majoranții unei mulțimi  $A$  nu aparțin neapărat acestei mulțimi.

### Exemplu

Fie  $A = \{x = \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}^*\}$ . Atunci  $A$  este majorată, 1 fiind un majorant al lui  $A$ , deoarece  $x \leq 1$  pentru orice  $x \in A$ . Se observă că 1 nu este element al mulțimii  $A$ , întrucât toate elementele lui  $A$  sunt subunitare, iar orice  $y \in \mathbb{R}$  pentru care  $1 \leq y$  este de asemenea un majorant al mulțimii  $A$ . În particular, 2, 3, ... sunt majoranți ai mulțimii  $A$ .

Similar,  $A$  este minorată, 0 fiind un minorant al lui  $A$ , deoarece  $0 \leq x$  pentru orice  $x \in A$ . Se observă că 0 nu este element al mulțimii  $A$ , deoarece toate elementele lui  $A$  sunt strict pozitive, iar orice  $y \in \mathbb{R}$  pentru care  $y \leq 0$  este de asemenea un minorant al lui  $A$ . În particular,  $-1, -2, \dots$  sunt minoranți ai mulțimii  $A$ .

### Margine inferioară, margine superioară

Se observă că dacă o mulțime  $A$  este minorată, nu există un cel mai mic minorant al lui  $A$ , deoarece se pot preciza minoranți oricât de mici. Similar, dacă o mulțime  $A$  este majorată, nu există un cel mai mare majorant, întrucât se pot preciza majoranți oricât de mari.

În schimb, dacă  $A$  este minorată și există un cel mai mare minorant al lui  $A$ , acesta se va numi *margine inferioară* a lui  $A$ , notată  $\inf A$ , iar dacă  $A$  este majorată și există un cel mai mic majorant al lui  $A$ , acesta se va numi *margine superioară* a lui  $A$ , notată  $\sup A$ . Dacă marginea inferioară, respectiv marginea superioară a unei mulțimi  $A$  există, atunci acestea sunt unice, unicitatea derivând din caracterul acestora de a fi „cea mai mare”, respectiv „cea mai mică”.

### Axioma de completitudine

În aceste condiții, se poate enunța cea de-a treia axiomă, numită *axioma de completitudine*, sau *axioma Cantor-Dedekind*.

(III) Orice submulțime nevidă majorată  $A$  a lui  $\mathbb{R}$  admite o margine superioară în  $\mathbb{R}$ .

Se poate demonstra că proprietățile de mai sus definesc existența și unicitatea (până la un izomorfism de corpuri total ordonate) lui  $\mathbb{R}$ . Elementele mulțimii

$\mathbb{R}$  astfel definite se numesc *numere reale*. Elementele mulțimii  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  se vor numi *numere iraționale*.

### Notății

Vom preciza în cele ce urmează câteva notații utilizate în calculul cu numere reale. Mai întâi, este utilă introducerea notației „ $x < y$ ” (ordonarea strictă atașată relației de ordine „ $\leq$ ”) dacă  $x, y$  satisfac  $x \leq y$  și  $x \neq y$ . De asemenea, vom scrie relația  $x \leq y$  și sub forma  $y \geq x$ , iar relația  $x < y$  și sub forma  $y > x$ .

Numerele reale  $a$  pentru care  $a \geq 0$  (respectiv  $a \leq 0$ ) vor fi numite *numere pozitive* (respectiv *numere negative*), iar numerele reale  $a$  pentru care  $a > 0$  (respectiv  $a < 0$ ) vor fi numite *numere strict pozitive* (respectiv *strict negative*). În cele ce urmează, în loc de  $x + (-y)$  vom nota  $x - y$ , în loc de  $x \cdot y$  vom nota  $xy$ , iar în loc de  $x \cdot \frac{1}{y}$  vom nota  $\frac{x}{y}$ .

### Dreapta reală

Pentru ilustrarea geometrică a unor concepte ale analizei matematice, este util ca numerele reale să poată fi reprezentate pe o dreaptă.

Fie o dreaptă  $d$ , un punct  $O \in d$  și un vector director  $\vec{u}$  al dreptei  $d$ . Perechea  $\mathcal{R} = (O, \vec{u})$  se numește *reper cartezian* al dreptei  $d$ . Definim

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow d, \quad \Phi(x) = P, \text{ unde } \overrightarrow{OP} = x\vec{u}$$

(fiecărui  $x \in \mathbb{R}$  i se asociază punctul  $P$  de pe dreaptă pentru care  $\overrightarrow{OP}$  are coordonata  $x$  în raport cu reperul  $\mathcal{R}$ ). Se poate demonstra că funcția  $\Phi$  este bine definită și stabilește o corespondență bijectivă între mulțimea  $\mathbb{R}$  a numerelor reale și mulțimea punctelor dreptei  $d$ . Datorită acestei corespondențe (numită și *bijecția lui Descartes*), mulțimea  $\mathbb{R}$  va putea fi numită și *dreapta (axa) reală*, iar numerele reale vor fi numite și *puncte*.

### 1.2.2 Mulțimi mărginite

În aceste condiții, o mulțime nevidă  $A$  care este majorată se va numi *mărginită superior*, iar o mulțime nevidă  $A$  care este minorată se va numi *mărginită inferior*. Dacă  $A$  este atât mărginită superior cât și mărginită inferior, ea se va numi *mărginită*. Conform acestei definiții, o mulțime  $A$  este mărginită dacă ex-

istă  $m, M \in \mathbb{R}$  astfel ca

$$m \leq x \leq M \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

### Caracterizări analitice pentru marginea superioară și marginea inferioară a unei mulțimi

Cu notațiile de mai sus, are loc următoarea *teoremă de caracterizare a marginii superioare a unei mulțimi*, care descrie caracteristica acesteia de a fi cel mai mic majorant prin intermediul a două inegalități, cea dintâi precizând faptul că marginea superioară este majorant, iar cea de-a doua precizând faptul că niciun număr mai mic decât marginea superioară nu este majorant.

**Teorema 1.1.** *Fie  $A \neq \emptyset$ . Un număr  $\alpha \in \mathbb{R}$  este margine superioară a mulțimii  $A$  dacă și numai dacă*

1.  $x \leq \alpha$  pentru orice  $x \in A$ .
2. Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $x_\varepsilon \in A$  astfel ca  $x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$ .

#### Demonstrație.

„ $\Rightarrow$ ” Dacă  $\alpha = \sup M$ , atunci  $\alpha$  este majorant, deci  $x \leq \alpha$  pentru orice  $x \in A$ . Cum  $\alpha$  este cel mai mic majorant,  $\alpha - \varepsilon$  nu este majorant, deci există măcar un  $x_\varepsilon \in A$  astfel ca  $x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$ .

„ $\Leftarrow$ ” Conform 1.,  $A$  este majorată (de  $\alpha$ ), deci, conform axiomei de completitudine,  $A$  admite o margine superioară; fie aceasta  $M$ . Deoarece  $M$  este cel mai mic majorant,  $M \leq \alpha$ . Presupunem prin reducere la absurd că  $M < \alpha$ . Atunci, notând  $\varepsilon = \alpha - M$ , obținem că există  $x_\varepsilon \in A$  astfel ca  $x_\varepsilon > \alpha - (\alpha - M) = M$ , deci  $M$  nu este majorant, contradicție. Urmează deci că  $M = \alpha$ , ceea ce încheie demonstrația. ■

În mod absolut similar se demonstrează următoarea *teoremă de caracterizare a marginii inferioare a unei mulțimi*.

**Teorema 1.2.** *Fie  $A \neq \emptyset$ . Un număr  $\beta \in \mathbb{R}$  este margine inferioară a mulțimii  $A$  dacă și numai dacă*

1.  $\beta \leq x$  pentru orice  $x \in A$ .
2. Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $x_\varepsilon \in A$  astfel ca  $x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$ .

### Proprietatea lui Arhimede și consecințe ale sale

O consecință importantă a teoremei de caracterizare a marginii superioare este următorul rezultat, numit *proprietatea lui Arhimede*.

**Teorema 1.3.** *Fie  $x, y$  numere reale fixate, cu  $x > 0$ . Există atunci  $n \in \mathbb{N}$  astfel ca  $nx > y$ .*

**Demonstrație.** Presupunem prin reducere la absurd că nu există un astfel de  $n$ . Atunci, notând  $A = \{nx; n \in \mathbb{N}\}$ , obținem că  $A$  este majorată (de  $y$ ), deci, conform axiomei de completitudine, admite un cel mai mic majorant  $M$ . Din teorema de caracterizare a marginii superioare, aplicată pentru  $\varepsilon = x$ , obținem că există  $x_\varepsilon \in A$  astfel ca  $x_\varepsilon > M - x$ . Cum  $x_\varepsilon$  este un element al lui  $A$ ,  $\exists n \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_\varepsilon = nx$ , deci  $nx > M - x$  și atunci  $(n + 1)x > M$ , contradicție. ■

### Parte întregă, parte fracționară

Printre consecințele proprietății lui Arhimede menționăm următoarele rezultate utile.

**Corolar 1.3.1.** *Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  există  $n \in \mathbb{Z}$  unic determinat astfel ca  $n \leq x < n + 1$ .*

Pentru  $x \in \mathbb{R}$  dat, numărul întreg  $n$  definit mai sus se numește *partea întregă* a lui  $x$  și se notează  $[x]$ . Notând și  $\{x\} = x - [x]$  *partea fracționară* a lui  $x$ , următoarele proprietăți sunt adevărate pentru orice  $x \in \mathbb{R}$

$$[x] \leq x < x + 1, \quad [x] + \{x\} = x, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

**Corolar 1.3.2.** *Dacă  $a, b$  sunt numere reale fixate,  $a < b$ , există atunci un număr rațional  $r$  astfel ca  $a < r < b$ .*

**Demonstrație.** Aplicând proprietatea lui Arhimede pentru  $x = 1$  și  $y = \frac{1}{b-a}$ , obținem că există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel ca  $n > \frac{1}{b-a}$ . Atunci  $\frac{1}{n} < b - a$ . Fie  $r = \frac{[na]+1}{n}$ . Evident,  $r \in \mathbb{Q}$ , iar

$$r > \frac{na - 1 + 1}{n} = a.$$

Cum  $r \leq \frac{na+1}{n}$ , avem că

$$r \leq a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b,$$

deci  $a < r < b$ . ■

Teorema de mai sus afirmă faptul că mulțimea  $\mathbb{Q}$  este *densă* în  $\mathbb{R}$ , în sensul că între orice două numere reale se află măcar un număr rațional. Folosind noțiuni de așa-numita *teorie a numerelor cardinale*, se poate demonstra că  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  este de asemenea densă în  $\mathbb{R}$ , adică între orice două numere reale se află și un număr irațional.

### Maxim, minim, signum

Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ , definim *maximul* elementelor  $x, y$  prin

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq y \\ y, & \text{dacă } x < y, \end{cases}$$

respectiv *minimul* elementelor  $x, y$  prin

$$\min(x, y) = \begin{cases} y, & \text{dacă } x \geq y \\ x, & \text{dacă } x < y. \end{cases}$$

Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , definim *semnul* său, notat  $\operatorname{sgn} x$  prin

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \\ -1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

### Modulul unui număr real

Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , definim *modulul* sau *valoarea absolută* a lui  $x$ , notat  $|x|$  prin

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Sunt atunci adevărate următoarele proprietăți de calcul:

**M1**  $|x| \geq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și  $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$ .

**M2**  $||x|| = |x|$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

**M3**  $|xy| = |x||y|$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**M4**  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ .

**M5**  $|x + y| \leq |x| + |y|$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**M6**  $|x - y| \geq ||x| - |y||$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**M7**  $|x| \leq M \Leftrightarrow -M \leq x \leq M$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

**M7'**  $|x| < M \Leftrightarrow -M < x < M$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Are loc și egalitatea

$$|x| = x \operatorname{sgn} x \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

De asemenea,

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|), \quad \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Funcția modul astfel definită poate fi folosită pentru a caracteriza mărginirea unei mulțimi.

**Teorema 1.4.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ . Au loc următoarele afirmații:

1.  $A$  este mărginită  $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$  astfel ca  $|x| \leq M$  pentru orice  $x \in A$ .
2.  $A$  este nemărginită  $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists x_M \in A$  astfel ca  $|x_M| > M$ .

**Demonstrație.** 1. „ $\Rightarrow$ ” Dacă  $A$  este mărginită, există  $m, M \in \mathbb{R}$  astfel ca  $m \leq x \leq M$  pentru orice  $x \in A$ , de unde  $|x| \leq \max(|m|, |M|)$ .

„ $\Leftarrow$ ” Dacă  $\exists M \in \mathbb{R}$  astfel ca  $|x| \leq M$  pentru orice  $x \in A$ , atunci  $-M \leq x \leq M$  pentru orice  $x \in A$ , deci  $A$  este mărginită.

2. Rezultă prin aplicarea operatorului de negare logică primei proprietăți. ■

### 1.3 Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$

În analiza matematică, pe lângă numere reale, se utilizează și două simboluri cu sens aparte,  $+\infty$  (plus infinit, notat prescurtat și  $\infty$ ) și  $-\infty$  (minus infinit), cu proprietatea că

$$-\infty < x < \infty \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Vom nota

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$



și vom numi această mulțime *dreapta reală încheiată*, observând că ea este de asemenea total ordonată.

Operațiile aritmetice se extind (parțial) la  $\overline{\mathbb{R}}$  în următorul mod:

$$x + \infty = x - (-\infty) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$x + (-\infty) = x - \infty = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};$$

$$x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};$$

$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

respectiv

$$\infty + \infty = \infty;$$

$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty);$$

$$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty;$$

$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Operațiilor  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $\infty - \infty$ ,  $-\infty - (-\infty)$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  nu li se atribuie niciun sens.

### 1.3.1 Intervale în $\mathbb{R}$ și $\overline{\mathbb{R}}$

#### Intervale în $\mathbb{R}$

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ . Numim *intervale* în  $\mathbb{R}$  mulțimi de forma

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} \text{ (interval închis);}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \text{ (interval deschis);}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}; \text{ (interval semideschis; interval închis la dreapta și deschis la stânga)}$$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$  (interval semideschis; interval deschis la dreapta și închis la stânga);

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < \infty\}$  (interval deschis nemărginit la dreapta; semidreaptă deschisă nemărginită la dreapta);

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < a\}$  (interval deschis nemărginit la stânga; semidreaptă deschisă nemărginită la stânga);

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < \infty\}$  (semidreaptă închisă nemărginită la dreapta);

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x \leq a\}$  (semidreaptă închisă nemărginită la stânga);

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$  (axa reală).

### Intervale centrate

Numim *intervale centrate* intervalele simetrice față de un punct  $a$  de pe axa reală, de forma  $[a - r, a + r]$  și  $(a - r, a + r)$ . Acestea pot fi caracterizate cu ajutorul funcției modul sub forma

$$[a - \varepsilon, a + \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \varepsilon\};$$

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| < \varepsilon\}.$$

### Intervale în $\overline{\mathbb{R}}$

Dacă  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ , putem extinde notațiile pentru intervale definite mai sus și obține

$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}}; a \leq x \leq b\}, (a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\};$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\},$$

păstrând denumirile de intervale închise, deschise, respectiv semideschise. De asemenea

$$[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}} \text{ (dreapta reală încheiată).}$$

Conform proprietăților de densitate ale lui  $\mathbb{Q}$  și  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , se va observa că nici  $\mathbb{Q}$  nici  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  nu conțin intervale.

**Supremumul și infimumul unei mulțimi în  $\overline{\mathbb{R}}$** 

Fie  $A \neq \emptyset$ . Cu aceste notații, vom spune că

$\sup A = +\infty$  dacă  $A$  nu este majorată (este nemărginită superior)

respectiv

$\inf A = -\infty$  dacă  $A$  nu este minorată (este nemărginită inferior).

și vom observa că în  $\overline{\mathbb{R}}$  orice mulțime nevidă admite un supremum și un infimum.

**Exemple**  $\sup \mathbb{N} = +\infty$ ,  $\inf \mathbb{Z} = -\infty$ ,  $\sup \mathbb{Z} = +\infty$ ;

$A = \{x; x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$  nu este mărginită superior, deci  $\sup A = +\infty$ .

$A = \{x; x = -n + 2, n \in \mathbb{N}\}$  nu este mărginită inferior, deci  $\inf A = -\infty$ .

**1.3.2 Vecinătăți în  $\overline{\mathbb{R}}$** 

1. Numim *vecinătate* a unui punct  $x \in \mathbb{R}$  orice mulțime  $V \subset \overline{\mathbb{R}}$  care conține un interval deschis incluzându-l pe  $x$ , adică pentru care există  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel ca

$$x \in (a, b) \subset V.$$

2. Numim *vecinătate* a lui  $+\infty$  orice mulțime  $V \subset \overline{\mathbb{R}}$  care conține un interval de forma  $(a, \infty]$ , cu  $a \in \mathbb{R}$ .
3. Numim *vecinătate* a lui  $-\infty$  orice mulțime  $V \subset \overline{\mathbb{R}}$  care conține un interval de forma  $[-\infty, a)$ , cu  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exemple** Mulțimile  $(-2, 4]$ ,  $(0, 6]$ ,  $(-\infty, 2]$ ,  $(-2, 5] \cup (6, \infty)$  sunt vecinătăți ale lui  $x = 1$  deoarece conțin intervalul deschis  $(0, 2)$  care-l include pe 1.

Mulțimea  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  nu este vecinătate a lui  $x = 1$  deoarece ea nu conține intervale.

Mulțimea  $B = [1, 3]$  nu este vecinătate a lui  $x = 1$  deoarece nu există  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel ca  $1 \in (a, b) \subset B$  (ar trebui ca  $a < 1$  și atunci  $(a, b) \not\subset B$ ).

**Teorema 1.5.** Fie  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci  $V \subset \mathbb{R}$  este o vecinătate a lui  $x$  dacă și numai dacă ea conține un interval deschis centrat în  $x$ , adică există  $\varepsilon > 0$  astfel ca

$$x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset V.$$

**Demonstrație.** „ $\Leftarrow$ ” Se poate lua  $\varepsilon = \min(x - a, b - x)$ .

„ $\Rightarrow$ ” Se poate lua  $(a, b) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ . ■

Dacă  $V$  este o vecinătate a lui  $x \in \overline{\mathbb{R}}$ , notăm acest lucru prin  $V \in \mathcal{V}(x)$ . Mulțimea  $\mathcal{V}(x)$  se numește *mulțimea tuturor vecinătăților* punctului  $x$ . Această mulțime are următoarele proprietăți:

**(V1)** Fie  $V \in \mathcal{V}(x)$ . Atunci  $x \in V$ .

**(V2)** Fie  $V \in \mathcal{V}(x)$  și  $W \supset V$ . Atunci  $W \in \mathcal{V}(x)$ .

**(V3)** Fie  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$ . Atunci  $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$ .

**(V4)** Fie  $V \in \mathcal{V}(x)$ . Există atunci  $W \in \mathcal{V}(x)$  astfel ca  $V \in \mathcal{V}(y)$  pentru orice  $y \in W$ .

Conform **(V1)**, dacă  $V$  este vecinătate a lui  $x$ , atunci  $V$  îl conține pe  $x$ . Datorită **(V2)**, orice mulțime care conține o vecinătate a lui  $x$  este de asemenea o vecinătate a lui  $x$ . Conform **(V3)**, intersecția a două vecinătăți ale lui  $x$  este de asemenea o vecinătate a lui  $x$ , **(V4)** reprezentând faptul că dacă  $V$  este o vecinătate a lui  $x$ , atunci  $V$  este de fapt o vecinătate nu doar pentru  $x$ , ci și pentru toate punctele dintr-o mulțime  $W$ , care la rândul ei este o vecinătate a lui  $x$ .

### Proprietatea de separație Hausdorff

Orice două puncte  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  pot fi separate prin vecinătăți. În acest sens, are loc următoarea proprietate, numită *proprietatea de separație Hausdorff*.

**Teorema 1.6.** Fie  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Există atunci  $V_a \in \mathcal{V}(a)$  și  $V_b \in \mathcal{V}(b)$  astfel ca  $V_a \cap V_b = \emptyset$ .

**Demonstrație.** Dacă  $a, b \in \mathbb{R}$ , atunci putem nota  $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$  și considera  $V_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , respectiv  $V_b = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ .

Dacă  $a = -\infty, b \in \mathbb{R}$ , atunci putem considera  $V_a = [-\infty, b - 2)$ ,  $V_b = (b - 1, b + 1)$ . Dacă  $a \in \mathbb{R}, b = +\infty$ , atunci putem considera  $V_a = (a - 1, a + 1)$ ,  $V_b = (a + 2, +\infty]$ . Dacă  $a = -\infty, b = +\infty$ , putem considera  $V_a = [-\infty, -1)$ ,  $V_b = (1, +\infty]$ . ■

A fost menționat anterior că axioma de completitudine deosebește  $\mathbb{R}$  de mulțimea  $\mathbb{Q}$  a numerelor raționale. Acest lucru se poate observa din următorul exemplu.

### Exemplu

Fie mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}$ . Evident,  $A \neq \emptyset$ , deoarece  $0 \in A$ . Ca submulțime a lui  $\mathbb{R}$ , ea este majorată (de exemplu de 2), având deci, conform axiomei de completitudine, un cel mai mic majorant  $\sup A$ . În acest sens, se poate arăta că  $\sup A = \sqrt{2}$ . Ca submulțime a lui  $\mathbb{Q}$ ,  $A$  este de asemenea majorată, de exemplu de 2 și de oricare altă aproximare zecimală prin adaus a lui  $\sqrt{2}$ : 1.42, 1.415, 1.4143, ș.a.m.d. Totuși, niciun număr rațional  $q$  mai mic decât  $\sqrt{2}$  nu poate fi nici măcar majorant datorită definiției mulțimii  $A$ , care va conține o aproximare zecimală prin lipsă a lui  $\sqrt{2}$  mai bună decât  $q$ , iar niciun număr rațional mai mare decât  $\sqrt{2}$  nu poate fi cel mai mic majorant, întrucât va exista o aproximare zecimală prin adaus a lui  $\sqrt{2}$  mai bună decât  $q$ .

## 1.4 Inegalități între numere reale

### Inegalitatea mediilor

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$  și fie  $a_1, a_2, \dots, a_n$  numere reale strict pozitive. Definim

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

$A_n, G_n, H_n$  numindu-se respectiv *media aritmetică*, *media geometrică* și *media armonică* a numerelor  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Are loc atunci inegalitatea

$$A_n \geq G_n \geq H_n,$$

numită *inegalitatea mediilor*, egalitățile atingându-se doar dacă  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

### Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$  și fie  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  numere reale. Atunci

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

egalitatea atingându-se doar dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  și  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sunt proporționale, adică există  $k \in \mathbb{R}$  astfel ca  $a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, \dots, a_n = kb_n$ .

Pentru  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ , se obține că

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2),$$

egalitatea atingându-se doar dacă  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

### Inegalitatea Bernoulli

Fie  $a \in \mathbb{R}, a > -1$ . Atunci, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

## 1.5 Funcții

Fie  $X, Y \neq \emptyset$ . Numim *funcție* definită pe mulțimea  $X$  cu valori în mulțimea  $Y$  o corespondență (notată de exemplu  $f$ ) prin care oricărui element din mulțimea  $X$  i se asociază un singur element din mulțimea  $Y$ . În această situație, se notează  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X$  numindu-se *domeniul de definiție* al funcției  $f$ , iar  $Y$  *codomeniul* acesteia. Dacă lui  $x \in X$  îi corespunde prin funcția  $f$  elementul  $y \in Y$ , acest lucru se va nota  $y = f(x)$  sau  $x \xrightarrow{f} y$ . În acest caz,  $y$  se numește *imaginea* lui  $x$  prin funcția  $f$ , sau *valoarea* lui  $f$  în  $x$ , iar  $x$  se numește *argumentul* funcției. Mulțimea tuturor funcțiilor definite pe  $X$  cu valori în  $Y$  se va nota  $\mathcal{F}(X, Y)$ .

### Egalitatea a două funcții

O funcție  $f$  trebuie concepută ca un ansamblu format din domeniul de definiție  $X$ , codomeniul  $Y$  și corespondența propriu-zisă între argumente și imagini. În acest sens, două funcții  $f : A \rightarrow B$  și  $g : C \rightarrow D$  vor fi *egale* dacă  $A = C$  și  $B = D$  (domeniile, respectiv codomeniile funcțiilor sunt egale), iar  $f(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in A$ , adică oricărui  $x$  din domeniul comun de definiție i se asociază prin  $f$  și  $g$  un același element.

### Restricția și prelungirea unei funcții

Dacă  $f : X \rightarrow Y$  este o funcție, iar  $A \subset X$ , numim *restricția* funcției  $f$  la mulțimea  $A$  funcția notată  $f|_A$  cu domeniul  $A$  și codomeniul  $Y$  care păstrează pe

A corespondența definită de  $f$ , adică  $f|_A(x) = f(x) \forall x \in A$ . Dacă  $g : A \rightarrow Y$  este o funcție dată, iar  $A \subset X$ , orice funcție  $f : X \rightarrow Y$  pentru care  $f|_A = g$  se numește *prelungirea* lui  $A$  la  $X$ .

### Exemplu

Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$  și  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |x|$ . Atunci  $g$  este o prelungire a lui  $f$  (respectiv  $f$  este o restricție a lui  $g$ ), deoarece  $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ , iar  $f(x) = g(x) = x$  pentru orice  $x \in [0, \infty)$ .

### Imagine și contraimage

Fie funcția  $f : X \rightarrow Y$ . Dacă  $A \subset X$ , notăm

$$f(A) = \{y \in Y; \exists x \in A \text{ astfel ca } f(x) = y\}$$

*imagea* mulțimii  $A$  prin funcția  $f$ . Mulțimea  $f(X)$  se va numi *imagea* funcției  $f$  și se va nota  $\text{Im } f$ .

Dacă  $B \subset Y$ , notăm

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

*contraimagea* (*imagea inversă*, *preimagea*) mulțimii  $B$  prin funcția  $f$ . Dacă  $B = \{y\}$ , se folosește notația  $f^{-1}(y)$  în loc de  $f^{-1}(\{y\})$ . Cum mulțimea  $f^{-1}(y)$  poate să fie mulțimea vidă sau să conțină mai mult de un element, simbolul  $f^{-1}$  nu definește în general o funcție.

### Exemplu

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 3$ . Vom determina  $\text{Im } f$ . Fie  $y \in \mathbb{R}$  astfel ca  $y = f(x)$ , cu  $x \in \mathbb{R}$ , adică  $y = x^2 - 2x + 3$ . Urmează că  $x^2 - 2x + 3 - y = 0$ . Condiția de existență a lui  $x$  este  $\Delta = (-2)^2 - 4(3 - y) \geq 0$ , de unde  $y \geq 2$ . Urmează că  $\text{Im } f = [2, +\infty)$ .

### Grafic, funcție identică

Mulțimea

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}$$

se va numi *graficul* funcției  $f$ . Fiind dată o mulțime  $A$ , funcția  $1_A : A \rightarrow A$  definită prin  $1_A(x) = x \forall x \in A$  se va numi *funcția identică* a mulțimii  $A$ .

### Funcții injective, funcții surjective, funcții bijective

O funcție  $f : X \rightarrow Y$  se numește *injectivă* dacă

$$\forall x, y \in X, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

(la argumente diferite  $x, y$  corespund prin  $f$  imagini diferite), ceea ce este echivalent cu

$$\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \implies x = y$$

(dacă imaginile  $f(x)$  și  $f(y)$  sunt egale, atunci sunt egale și argumentele corespunzătoare  $x$  și  $y$ ). Aceasta conduce la faptul că  $f$  este injectivă dacă și numai dacă  $f^{-1}(y)$  conține cel mult un element pentru orice  $y \in B$ .

O funcție  $f : X \rightarrow Y$  se numește *surjectivă* dacă  $f(X) = Y$ , adică orice element  $y$  din codomeniul  $Y$  al funcției este imaginea cel puțin a unui argument  $x$ . Aceasta conduce la faptul că  $f$  este surjectivă dacă și numai dacă  $f^{-1}(y)$  conține cel puțin un element pentru orice  $y \in B$ .

O funcție  $f : X \rightarrow Y$  se numește *bijectivă* dacă ea este atât injectivă cât și surjectivă. Din cele de mai sus, se observă că  $f$  este bijectivă dacă și numai dacă  $f^{-1}(y)$  conține exact un element pentru orice  $y \in B$ . În aceste condiții, simbolul  $f^{-1}$  definește o funcție  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  prin  $f^{-1}(y) = x$ , unde  $x, y$  sunt în așa fel încât  $y = f(x)$ . Funcția  $f^{-1}$  astfel definită se numește funcția *inversă* a funcției  $f$ , iar  $f$  se numește *inversabilă*.

### Compunerea a două funcții

Fie funcțiile  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ . Funcția  $g \circ f : X \rightarrow Z$  definită prin  $g \circ f(x) = g(f(x)) \forall x \in X$  se numește *compunerea* (în această ordine) funcțiilor  $g$  și  $f$ . Se poate observa că operația de compunere a funcțiilor nu este comutativă, dar este asociativă, în sensul că dacă  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, h : Z \rightarrow M$ , atunci  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .

### Funcții numerice

O funcție  $f : E \rightarrow F$  se va numi *funcție numerică* (*funcție reală de variabilă reală*) dacă  $E, F \subset \mathbb{R}$ .

### Funcții pare, funcții impare

Fie  $D \subseteq \mathbb{R}$  o mulțime simetrică, adică o mulțime pentru care  $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$ .



O funcție  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  se numește *pară* dacă  $f(-x) = f(x)$  pentru orice  $x \in D$ .  
Deoarece

$$(a, b) \in G_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow b = f(-a) \Leftrightarrow (-a, b) \in G_f,$$

urmează că  $G_f$  este simetric față de  $Oy$ .

O funcție  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  se numește *impară* dacă  $f(-x) = -f(x)$  pentru orice  $x \in D$ . Deoarece

$$(a, b) \in G_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow -b = f(-a) \Leftrightarrow (-a, -b) \in G_f,$$

urmează că  $G_f$  este simetric față de  $O$ .

### Exemplu

Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  este pară, deoarece  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ,  
în timp ce funcția  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^3$  este impară, deoarece  $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ .

### Funcții periodice

Fie  $D \subseteq \mathbb{R}$ . O funcție  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  se numește *periodică* dacă există  $T \in \mathbb{R}^*$  astfel ca  $f(x + T) = f(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Orice astfel de  $T$  se numește *perioadă* a funcției  $f$ . Se observă că dacă  $T$  este o perioadă a funcției  $f$ , atunci și  $nT$ ,  $n \in \mathbb{Z}^*$  este de asemenea o perioadă a funcției  $f$ . Dacă există o cea mai mică perioadă pozitivă  $T_0$  a funcției  $f$ , atunci aceasta se numește *perioadă principală* a funcției  $f$ . Pentru a studia comportarea unei funcții periodice de perioadă  $T$ , este suficient să se analizeze comportarea acestei funcții pe intervalul  $[0, T]$ .

### Funcții mărginite

Fie  $D \subseteq \mathbb{R}$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Atunci

$f$  se numește *mărginită superior* dacă  $f(D)$  este majorată, adică există  $M \in \mathbb{R}$  astfel ca  $f(x) \leq M$  pentru orice  $x \in D$ .

$f$  se numește *mărginită inferior* dacă  $f(D)$  este minorată, adică există  $m \in \mathbb{R}$  astfel ca  $m \leq f(x)$  pentru orice  $x \in D$ .

Dacă  $f$  este atât mărginită inferior cât și mărginită superior, adică există  $m, M \in \mathbb{R}$  astfel ca  $m \leq f(x) \leq M$  pentru orice  $x \in D$ , atunci  $f$  se numește *mărginită*.

Conform caracterizării mulțimilor mărginite cu ajutorul funcției modul (Teorema 1.4),  $f$  este mărginită dacă și numai dacă există  $M \in \mathbb{R}$  astfel ca  $|f(x)| \leq M$  pentru orice  $x \in D$ .

**Exemple**  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$  este mărginită, deoarece  $3 \leq f(x) \leq 5$  pentru orice  $x \in [1, 2]$ .

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 + 3 \sin x$  este mărginită, deoarece  $|f(x)| \leq 2 + 3|\sin x| \leq 5$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

### Funcții monotone

Fie  $D \subseteq \mathbb{R}$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Atunci

$f$  se numește *crescătoare* dacă

$$x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

$f$  se numește *strict crescătoare* dacă

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) < f(y).$$

$f$  se numește *descrescătoare* dacă

$$x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

$f$  se numește *strict descrescătoare* dacă

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) > f(y).$$

Se observă că  $f$  este crescătoare dacă și numai dacă

$$(f(x) - f(y))(x - y) \geq 0 \text{ pentru orice } x, y \in D,$$

respectiv strict crescătoare dacă și numai dacă

$$(f(x) - f(y))(x - y) > 0 \text{ pentru orice } x, y \in D, x \neq y,$$

proprietăți analoage având loc și pentru funcții descrescătoare, respectiv strict descrescătoare. De asemenea, se poate observa că dacă  $f$  este strict monotonă, atunci  $f$  este injectivă.

## Aplicații

1.1. Fie  $a \in \mathbb{R}$ . Arătați că  $\max(a, -a) = |a|$ .

1.2. Dacă  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|x| < 1$ ,  $|y| < 1$ , arătați că  $\left| \frac{x+y}{1+xy} \right| < 1$ .

1.3. Demonstrați că  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  este număr irațional.

1.4. Dacă  $a, b \in \mathbb{Q}$ , iar  $a + b\sqrt{2} = 0$ , atunci  $a = b = 0$ .

1.5. Dacă  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ , iar  $a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2}$ , atunci  $a_1 = a_2$ ,  $b_1 = b_2$ .

1.6. Rezolvați ecuația  $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ .

1.7. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} |x-1| + |y+2| = 6 \\ x = 1 + |y+2| \end{cases}.$$

1.8. Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel ca sistemul  $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$  să aibă exact patru soluții.

1.9. Dacă  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x \leq y + \varepsilon$  pentru orice  $\varepsilon > 0$ , atunci  $x \leq y$ .

1.10. Dacă  $a, b, c, d \in (0, \infty)$ , atunci  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$ .

1.11. Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in (0, \infty)$ , atunci

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

1.12. Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in (0, \infty)$ , atunci

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}.$$

1.13. Fie  $a, b \in (0, 1)$ . Demonstrați că

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.$$

1.14. Determinați  $m \in \mathbb{R}$  astfel ca

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + m \geq 0 \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

**1.15.** Dacă  $A \subseteq \mathbb{R}$  este mărginită, arătați că orice submulțime a lui  $A$  este mărginită.

**1.16.** Dacă  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  sunt mărginite, arătați că  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  sunt mărginite.

**1.17.** Arătați că  $A$  este mărginită, unde

1.  $A = [0, 1) \cup (2, 5]$ ;
2.  $A = \{x; x = 2 + u^2, u \in [-1, 3]\}$ ;
3.  $A = \left\{x; x = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ ;
4.  $A = \left\{x; x = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ ;
5.  $A = \{x; x = \sin u + \cos(2u), u \in \mathbb{R}\}$ .

**1.18.** Fie  $A = \{\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 2, \operatorname{tg} 3, \operatorname{tg} 4\}$ . Precizați  $\min A$ ,  $\max A$ .

**1.19.** Fie  $A = \left\{\sin \frac{n\pi}{4}; n \in \mathbb{N}\right\}$ . Precizați  $\min A$ ,  $\max A$ .

**1.20.** Fie  $A = \left\{\frac{6+x^2}{6-x^2}; x \in [-2, 1]\right\}$ . Determinați  $\inf A$ ,  $\sup A$ .

**1.21.** Fie  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$ . Arătați că  $d$  are următoarele proprietăți

1.  $d(x, y) \geq 0$ ;  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ .
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

**1.22.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ . Determinați  $f(2x)$ ,  $2f(x)$ ,  $f(x^2)$ ,  $f(x)^2$ .

**1.23.** Determinați valorile minime ale următoarelor funcții:

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3^{x^2+2x+3}$ ;
2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-3}$ ;
3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ .

**1.24.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție oarecare.

1. Dacă  $f$  este simultan monoton crescătoare și monoton descrescătoare, atunci ea este constantă.
2. Dacă  $f$  este simultan pară și impară, atunci ea este funcția nulă.

**1.25.** Fie  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Dacă  $f, g$  sunt (strict) crescătoare, atunci  $f + g, f \circ g$  sunt (strict) crescătoare.
2. Dacă  $f, g$  sunt (strict) descrescătoare, atunci  $f + g$  este (strict) descrescătoare, iar  $f \circ g$  este (strict) crescătoare.

**1.26.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ .

1. Demonstrați că  $f$  este strict crescătoare pe  $(-\infty, 0]$  și strict descrescătoare pe  $[0, \infty)$ .
2. Determinați  $f([-2, -1]), f([3, 4]), f([-1, 1])$ .

**1.27.** Determinați care dintre următoarele funcții sunt pare sau impare:

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 + x^3$ ;
2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 + \cos x$ ;
3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 + |x| - \sqrt{x^2 + 1}$ ;
4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \sin^2 x$ ;
5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin^2 2x + \cos x$ .
6.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right)$ .

**1.28.** Determinați  $f \circ g$  și  $g \circ f$  pentru  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  date prin:

1.  $f(x) = x^2, g(x) = x + 2$ ;
2.  $f(x) = \sin x, g(x) = x^2 + 1$ .

**1.29.** Determinați două funcții  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel ca  $h = f \circ g$ , dacă

1.  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sin(x^2 + 1)$ ;
2.  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}^3$ .

**1.30.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ . Arătați că orice număr rațional este perioadă a lui  $f$ , dar niciun număr irațional nu este perioadă a lui  $f$ . Are  $f$  perioadă principală?

**1.31.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x^2$ . Demonstrați că  $f$  nu este periodică.

**1.32.** Fie  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 + 2ax + 1$ . Demonstrați că

1.  $f$  nu este injectivă pentru nicio valoare a lui  $a \in \mathbb{Q}$ .

2.  $f$  este injectivă pentru orice  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**1.33.** Demonstrați că următoarele funcții sunt bijective și precizați inversele acestora

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 1}$ ;

2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

**1.34.** Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel ca funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq 2 \\ x + a, & x < 2 \end{cases}$  să fie

1) injectivă;    2) surjectivă;    3) bijectivă.

**1.35.** Demonstrați că graficele funcțiilor  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_a(x) = ax^2 + x + 2 - 4a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , trec printr-un punct care nu depinde de  $a$ .

**1.36.** Demonstrați că următoarele funcții sunt mărginite

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ;

2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

**1.37.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ . Demonstrați că  $f$  este strict crescătoare și surjectivă, iar inversa sa este  $f^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$ .

# Capitolul 2

## ȘIRURI DE NUMERE REALE

### 2.1 Proprietăți generale

Fie  $A \neq \emptyset$  o mulțime dată. Se numește *șir de elemente din A* o funcție  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Dacă  $A = \mathbb{R}$ , șirul respectiv se va numi *șir de numere reale*, *șir numeric* sau, mai simplu, *șir*. Fiind dat un șir  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , se vor numi *termeni ai șirului* numerele  $f(0), f(1), f(2), \dots$ , notate de obicei cu ajutorul unui indice sub forma

$$f(0) = x_0, f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots,$$

$x_n$  numindu-se *termenul general al șirului*, sau *termenul de rang n*. Un șir cu termenul general  $x_n$  se va nota și  $(x_n)_{n \geq 0}$ . Dacă primii  $k$  termeni  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  nu sunt definiți (ceea ce corespunde unei funcții  $f : \{k, k+1, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ ), vom nota șirul sub forma  $(x_n)_{n \geq k}$ .

#### 2.1.1 Moduri de definire a unui șir

Un șir poate fi definit precizând formula termenului general, prin intermediul unei recurențe sau în mod descriptiv.

##### Exemple

*Șiruri definite prin formula termenului general:*

$$(x_n)_{n \geq 0} : x_n = 3n + 1; \quad x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 7, \dots$$

$$(x_n)_{n \geq 0} : x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}; \quad x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 1, \dots$$

*Șiruri definite prin intermediul unei recurențe*

Dacă pentru un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  se cunosc primii  $k$  termeni  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ , fiind dată de asemenea o relație prin care termenul general  $x_n$  se exprimă în funcție de  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}$  pentru orice  $n \geq k$ , se spune că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este definit printr-o *recurență de ordinul  $k$* .

*Șiruri definite în mod descriptiv.*

Șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n =$ aproximarea prin lipsa cu  $n$  zecimale exacte a lui  $\sqrt{2}$  este definit în mod descriptiv. Se obține că  $x_1 = 1.4, x_2 = 1.41, x_3 = 1.414, \dots$ .

**Progresii aritmetice**

Șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  definit prin recurența de ordinul întâi dată de

$$x_0 = a \text{ și } x_{n+1} = x_n + r, \quad n \geq 0,$$

$a$  și  $r \in \mathbb{R}$  fiind date, se numește *progresie aritmetică*,  $r$  numindu-se *rația progresiei* (din orice termen al șirului se obține termenul care-l succede prin adăugirea rației). Se obține că formula termenului general este  $x_n = a + nr, n \geq 0$ . De asemenea, suma primilor  $n + 1$  termeni este

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \dots + x_n \\ &= a + (a + r) + \dots + (a + nr) \\ &= (n + 1)a + (r + 2r + \dots + nr) \\ &= (n + 1)a + \frac{n(n + 1)}{2}r. \end{aligned}$$

Din cele de mai sus, se observă și că

$$S_n = \frac{n(a_0 + a_n)}{2}.$$

**Progresii geometrice**

Șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  definit prin definit prin recurența de ordinul întâi dată de

$$x_0 = b \text{ și } x_{n+1} = x_n q, \quad n \geq 0,$$

$b$  și  $q \in \mathbb{R}$  fiind date, se numește *progresie geometrică*,  $q$  numindu-se *rația progresiei* (din orice termen al șirului se obține termenul care-l succede prin înmulțirea



cu rația). Se obține că formula termenului general este  $x_n = bq^n$ ,  $n \geq 0$ . De asemenea, suma primilor  $n + 1$  termeni este

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \dots + x_n \\ &= b + bq + \dots + bq^n \\ &= b(1 + q + \dots + q^n) \\ &= b \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \text{ dacă } q \neq 1, \end{aligned}$$

în vreme ce dacă  $q = 1$ , atunci  $S_n = (n + 1)b$ .

### Exercițiu

Determinați termenul general al șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$  dat prin

$$1) x_{n+1} = 2x_n - 1, n \geq 0, x_0 = 2; \quad 2) x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, n \geq 0, x_0 = 1.$$

### Soluție

1) Relația de recurență este asemănătoare celei care definește o progresie geometrică, diferența fiind dată de prezența termenului liber  $-1$ . Acest termen liber va fi eliminat prin scăderea a două relații de recurență scrise pentru indici succesivi.

Punând  $n = 0$  în relația de recurență se obține că  $x_1 = 3$ . Scriind relația de recurență pentru  $n = k + 1$ , respectiv  $n = k$ , și scăzând cele două relații obținute se deduce că  $x_{k+2} - x_{k+1} = 2(x_{k+1} - x_k)$ . Notând  $y_n = x_{n+1} - x_n$ , observăm că  $y_{k+1} = 2y_k$ , deci  $(y_k)_{k \geq 0}$  este o progresie geometrică cu rație 2. Deoarece  $y_0 = x_1 - x_0 = 1$ , se deduce că  $y_n = y_0 2^n = 2^n$ .

Cum  $y_k = x_{k+1} - x_k$ , urmează că  $x_{k+1} - x_k = 2^k$ . Punând succesiv  $k = 0, k = 1, \dots, k = n - 1$  și sumând relațiile obținute deducem că

$$x_n - x_0 = 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1,$$

deci  $x_n = x_0 + 2^n - 1 = 2^n + 1$ .

Similar, putem determina  $c \in \mathbb{R}$  astfel ca  $(x_n + c)_{n \geq 0}$  să fie progresie geometrică. În acest scop, adunăm mai întâi  $c$  în ambii membri ai relației de recurență. Obținem că

$$x_{n+1} + c = 2x_n - 1 + c = 2\left(x_n + \frac{c-1}{2}\right).$$

În concluzie, pentru  $c = \frac{c-1}{2}$ , adică pentru  $c = -1$ , urmează că  $(x_n + c)_{n \geq 0}$  este progresie geometrică de rație 2. De aici,

$$x_n - 1 = 2^n(x_0 - 1) = 2^n,$$

de unde  $x_n = 2^n + 1$ .

2) Punând  $n = 0$  în relația de recurență se obține că  $x_1 = \sqrt{3}$ . Prin logarit-marea relației de recurență se obține că

$$\ln x_{n+1} = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln x_{n+1}.$$

Cu notația  $z_n = \ln x_n$ , se obține că  $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{2} \ln 3$ ,  $z_1 = \ln x_1 = \frac{1}{2} \ln 3$ ,  $z_0 = \ln x_0 = 0$ .

Scriind relația de recurență pentru  $n = k + 1$ , respectiv  $n = k$ , și scăzând cele două relații obținute se deduce că  $z_{k+2} - z_{k+1} = \frac{1}{2}(z_{k+1} - z_k)$ . Notând  $y_n = z_{n+1} - z_n$ , observăm că  $y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k$ , deci  $(y_k)_{k \geq 0}$  este o progresie geometrică cu rație  $\frac{1}{2}$ . Deoarece  $y_0 = z_1 - z_0 = \frac{1}{2} \ln 3$ , se deduce că  $y_n = y_0 2^n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln 3$ .

Cum  $y_k = z_{k+1} - z_k$ , urmează că  $z_{k+1} - z_k = \frac{1}{2^{k+1}} \ln 3$ . Punând succesiv  $k = 0, k = 1, \dots, k = n - 1$  și sumând relațiile obținute deducem că

$$\begin{aligned} z_n - z_0 &= \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2^2} \ln 3 + \dots + \frac{1}{2^n} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln 3 \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \ln 3. \end{aligned}$$

deci  $z_n = z_0 + \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \ln 3 = \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \ln 3$ . Cum  $z_n = \ln x_n$ , urmează că

$$x_n = e^{z_n} = e^{\left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \ln 3} = e^{\ln 3^{\left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)}} = 3^{1 - \frac{1}{2^n}}.$$

■

### 2.1.2 Subșiruri ale unui șir dat

Numim *subșir* al șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$  ai cărui termeni sunt elemente ale mulțimii termenilor șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ , cu  $k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n \dots$

Cum un subșir  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$  nu conține neapărat toți termenii șirului inițial  $(x_n)_{n \geq 0}$ , urmează că  $k_n \geq n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemple**

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ . Atunci subșirul  $(x_{2n})_{n \geq 0}$ :  $x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2n}, \dots$  se numește *subșirul termenilor de rang par ai șirului*. Subșirul  $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ :  $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n+1}, \dots$  se numește *subșirul termenilor de rang impar ai șirului*. Un alt subșir este  $(x_{n+3})_{n \geq 0}$ :  $x_3, x_4, x_5, \dots$ , obținut prin eliminarea primilor trei termeni ai șirului.

Cum pentru orice  $k \in \mathbb{N}^*$  putem construi șirul  $(x_{kn})_{n \geq 0}$ :  $x_0, x_k, x_{2k}, \dots, x_{kn}, \dots$  al termenilor de rang divizibil cu  $k$ , urmează că orice șir are o infinitate de subșiruri.

**2.1.3 Șiruri mărginite**

Fie un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  de numere reale și  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$  mulțimea termenilor săi. Vom spune că  $(x_n)_{n \geq 0}$  se numește *mărginit* dacă  $A$  este mărginită, respectiv că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este *mărginit superior* (respectiv *mărginit inferior*) dacă  $A$  este majorată (respectiv minorată). Un șir care nu este mărginit (respectiv nu este mărginit superior sau nu este mărginit inferior) se numește *nemărginit* (respectiv *nemărginit superior* sau *nemărginit inferior*).

Conform caracterizării mulțimilor mărginite, aplicată mulțimii  $A$  a termenilor șirului, se obțin următoarele proprietăți.

**Teorema 2.1.** Fie șirul de numere reale  $(x_n)_{n \geq 0}$ .

1.  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit superior dacă și numai dacă există  $b \in \mathbb{R}$  astfel ca  $x_n \leq b$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit inferior dacă și numai dacă există  $a \in \mathbb{R}$  astfel ca  $a \leq x_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .
3.  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit dacă și numai dacă există  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel ca  $a \leq x_n \leq b$  pentru orice  $n \geq 0$  dacă și numai dacă există  $M > 0$  astfel ca  $|x_n| \leq M$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemple** 1.  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$  este mărginit, deoarece  $-1 \leq x_n \leq 1$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

2.  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$  este mărginit, deoarece  $|x_n| \leq 3$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

3.  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $x_n = \frac{n}{3^n}$  este mărginit, deoarece conform inegalității lui Bernoulli,  $3^n = (1 + 2)^n \geq 1 + 2n$ , deci  $\frac{n}{3^n} < \frac{1}{2}$ . Se obține că  $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .
4.  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $x_n = (-1)^n n$  nu este mărginit, nefiind nici mărginit inferior, nici mărginit superior.

Aplicând operatorul de negație logică afirmațiilor din teorema de mai sus obținem următoarea teoremă de caracterizare a șirurilor nemărginite.

**Teorema 2.2.** Fie șirul de numere reale  $(x_n)_{n \geq 0}$ .

1.  $(x_n)_{n \geq 0}$  este nemărginit superior dacă și numai dacă pentru orice  $b \in \mathbb{R}$  există un rang  $n_b \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n > b$ .
2.  $(x_n)_{n \geq 0}$  este nemărginit inferior dacă și numai dacă pentru orice  $a \in \mathbb{R}$  există un rang  $n_a \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n < a$ .

### 2.1.4 Șiruri monotone

Fie un șir de numere reale  $(x_n)_{n \geq 0}$ . Spunem că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este *crescător* (respectiv *strict crescător*) dacă  $x_n \leq x_{n+1}$  pentru orice  $n \geq 0$  (respectiv  $x_n < x_{n+1}$  pentru orice  $n \geq 0$ ), adică orice termen al șirului este mai mic (respectiv strict mai mic) decât termenul care-l succede.

De asemenea, spunem că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este *descrescător* (respectiv *strict descrescător*) dacă  $x_n \geq x_{n+1}$  pentru orice  $n \geq 0$  (respectiv  $x_n > x_{n+1}$  pentru orice  $n \geq 0$ ), adică orice termen al șirului este mai mare (respectiv strict mai mare) decât termenul care-l succede.

Un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  crescător sau descrescător se va numi șir *monoton*, iar un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  strict crescător sau strict descrescător se va numi șir *strict monoton*. Desigur, orice șir strict monoton este și monoton; nu și reciproc.

Pentru a preciza monotonia unui șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  se pot folosi următoarele metode.

*Studierea semnului diferenței  $x_{n+1} - x_n$ .*

- Dacă  $x_{n+1} - x_n \geq 0$  pentru orice  $n \geq 0$ , atunci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este crescător.
- Dacă  $x_{n+1} - x_n \leq 0$  pentru orice  $n \geq 0$ , atunci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este descrescător.

Compararea raportului  $\frac{x_{n+1}}{x_n}$  cu 1, dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este un șir cu termeni strict pozitivi.

- Dacă  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$  pentru orice  $n \geq 0$ , atunci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este crescător.
- Dacă  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$  pentru orice  $n \geq 0$ , atunci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este descrescător.

Folosind inegalități stricte în locul inegalităților nestricte se obțin criteriile corespunzătoare de monotonie strictă.

### Legătura între monotonia și mărginirea unui șir

Dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este un șir crescător, atunci

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots,$$

deci  $x_0 \leq x_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , iar  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit inferior de primul termen  $x_0$ .

Similar, dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este un șir descrescător, atunci

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots,$$

deci  $x_0 \geq x_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , iar  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit superior de primul termen  $x_0$ . Au loc atunci următoarele proprietăți.

**Teorema 2.3.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir.

1. Dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este crescător, atunci el este mărginit inferior.
2. Dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este descrescător, atunci el este mărginit superior.

## 2.2 Șiruri cu limită

Noțiunea de limită este unul dintre cele mai importante concepte ale analizei matematice, precizând tendința termenilor unui șir de a se apropia de un anumit număr (cazul șirurilor cu limită finită), sau de a deveni oricât de mari, respectiv oricât de mici (cazul șirurilor cu limită infinită).

Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale. Spunem că  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limita  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  dacă orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(l)$  lasă în afara ei cel mult un număr finit de termeni ai șirului, adică există un rang  $n_V \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n \in V$  pentru orice  $n \geq n_V$  (altfel spus, vecinătatea  $V$  conține toți termenii șirului de la rangul  $n_V$  încolo). În acest

caz, vom nota  $x_n \rightarrow l$  pentru  $n \rightarrow \infty$  sau  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , spunându-se și că șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  (sau termenul său general  $x_n$ ) *tinde* la  $l$ .

Se poate observa că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai șirului nu-i schimbă acestuia natura de a avea sau nu limită și nici limita, dacă aceasta există, putându-se modifica doar rangul începând cu care termenii șirului aparțin unei vecinătăți date.

**Exemple** 1. Un șir constant  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , este convergent la  $c$ , întrucât orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(c)$  conține toți termenii șirului.

2. Șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = n$  are limita  $+\infty$ . Pentru a demonstra acest lucru, observăm că orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(+\infty)$  conține un interval de forma  $(M_V, +\infty]$ . Fie  $n_V = [M_V] + 1$ . Atunci  $n_V > M$ , deci  $x_{n_V} \in (M, +\infty] \subset V$ . Analog,  $x_n \in V$  pentru orice  $n > n_V$ , deci  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limita  $+\infty$ .

3. În mod asemănător se poate demonstra că șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = -n$  are limita  $-\infty$ .

### Unicitatea limitei unui șir

În cele ce urmează, se va observa mai întâi că limita unui șir, dacă există, este unică.

**Teorema 2.4.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ , atunci  $l_1 = l_2$ .

**Demonstrație.** Presupunem prin reducere la absurd că  $l_1 \neq l_2$ . Conform proprietății de separație Hausdorff,  $l_1$  și  $l_2$  pot fi separate prin vecinătăți, adică există  $V_1 \in \mathcal{V}(l_1)$  și  $V_2 \in \mathcal{V}(l_2)$  astfel ca  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Cum atât  $l_1$  cât și  $l_2$  sunt limite ale șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ , urmează că există două ranguri  $n_{V_1}$  și  $n_{V_2} \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n \in V_1$  pentru orice  $n \geq n_{V_1}$ , respectiv  $x_n \in V_2$  pentru orice  $n \geq n_{V_2}$ . Urmează că  $x_n \in V_1 \cap V_2$  pentru orice  $n \geq \max(n_{V_1}, n_{V_2})$ , ceea ce contrazice faptul că  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . ■

### Subșiruri ale unui șir cu limită

Este ușor de observat că proprietățile de monotonie și mărginire se transmit de la un șir către subșirurile sale. Astfel, dacă un șir este monoton, orice subșir al său este de asemenea monoton, cu același sens de monotonie, iar dacă un șir

este mărginit, orice subșir al său este de asemenea mărginit, mulțimea termenilor subșirului fiind inclusă în mulțimea (mărginită) a termenilor șirului. Pe aceeași linie de gândire, proprietatea unui șir de a avea limită se transmite de asemenea către subșirurile sale.

**Teorema 2.5.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , atunci orice subșir  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$  al său are aceeași limită.

**Demonstrație.** Fie  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$  un subșir al lui  $(x_n)_{n \geq 0}$  și fie  $V \in \mathcal{V}(l)$  o vecinătate arbitrară a lui  $l$ . Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ ,  $V$  conține toți termenii șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$  de la un rang încolo, adică există  $n_V \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n \in V$  pentru orice  $n \geq n_V$ . Deoarece  $k_n \geq n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , urmează că  $k_{n_V} \geq n_V$  și deci  $x_{k_n} \in V$  pentru  $k_n \geq k_{n_V}$ , de unde  $V$  conține toți termenii subșirului  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$  de la rangul  $k_{n_V}$  încolo. Cum  $V$  era arbitrară, urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = l$ . ■

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  are două subșiruri care tind la limite diferite, atunci el nu are limită, deoarece dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  ar avea limita  $l$ , atunci și cele două subșiruri ar avea aceeași limită  $l$ .

### Exemplu

Șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = (-1)^n$  nu are limită, deoarece subșirul termenilor de rang par  $(x_{2n})_{n \geq 0}$ :  $x_{2n} = 1$  și subșirul termenilor de rang impar  $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ :  $x_{2n+1} = -1$  au limitele diferite  $l_1 = 1$ , respectiv  $l_2 = -1$ .

## 2.2.1 Șiruri convergente

Un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  cu limită finită  $l$  se numește *șir convergent*, spunându-se și că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este *convergent către  $l$* . Orice șir care nu este convergent se numește *divergent*.

În acest sens, șirurile divergente pot fi deci șiruri cu limită infinită sau șiruri fără limită. În plus, orice subșir al unui șir convergent este convergent la aceeași limită ca și șirul inițial, conform Teoremei 2.5. De aici, dacă un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  conține un subșir cu limită infinită, sau două subșiruri cu limite diferite, atunci el este divergent.

### Exemplu

Șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}n$  este divergent, deoarece subșirul termenilor de rang par  $(x_{2n})_{n \geq 0}$ :  $x_{2n} = 2n$  are limita  $+\infty$ .

### Caracterizarea analitică a limitei unui șir

Definiția cu vecinătăți a limitei unui șir, deși utilă teoretic, este greu de verificat sau folosit în aplicații. Vom prezenta în cele ce urmează câteva caracterizări echivalente cu un pronunțat aspect numeric, utile pentru demonstrarea unor proprietăți verificabile practic. Mai întâi, este abordată situația șirurilor convergente.

**Teorema 2.6.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale și  $l \in \mathbb{R}$ . Atunci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent către  $l$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|x_n - l| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ .

**Demonstrație.** „ $\Rightarrow$ ” Fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ . Fie de asemenea  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Pentru acest  $\varepsilon$ , vom considera  $V_\varepsilon = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$  o vecinătate a lui  $l$ . Conform definiției limitei unui șir, există un rang  $n_{V_\varepsilon}$  (notat în continuare  $n_\varepsilon$ ) astfel ca  $x_n \in V_\varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ . Atunci  $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ , de unde  $|x_n - l| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ .

„ $\Leftarrow$ ” Presupunem că șirul are proprietatea din enunț și fie  $V$  o vecinătate arbitrară a lui  $l$ . Această vecinătate conține un interval deschis centrat în  $l$ , adică există  $\varepsilon > 0$  astfel că  $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) \subseteq V$ . Pentru acest  $\varepsilon$ , conform proprietății din enunț, există un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|x_n - l| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ , de unde  $x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \subseteq V$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ . În concluzie, vecinătatea  $V$  conține toți termenii șirului de la rangul  $n_\varepsilon$  încolo. ■

De fapt, proprietatea din enunțul Teoremei 2.6 este echivalentă cu proprietatea de definiție a șirurilor convergente, putând fi folosită în locul acesteia pentru definirea noțiunii de șir convergent.

### Exercițiu

Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{2n+5}{n+2}$ . Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

### Soluție

Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Au loc relațiile

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n+2} < \varepsilon$$

cu condiția ca

$$\frac{1}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n + 2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 2.$$



Atunci

$$n_\varepsilon = \left[ \frac{1}{\varepsilon} - 2 \right] + 1 = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] - 1,$$

iar pentru  $n \geq n_\varepsilon$ ,  $|x_n - 2| < \varepsilon$ , de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ . ■

### Exercițiu

Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir convergent de numere întregi. Arătați că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este constant de la un rang încolo.

### Soluție

Fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ . Pentru  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_n - l| < \frac{1}{4}$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ , deci  $x_n \in (l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4})$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ . Cum intervalul  $(l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4})$  are lungime  $\frac{1}{2}$ , el nu poate conține decât un singur număr întreg, deci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este constant începând cu rangul  $n_\varepsilon$ , termenii săi fiind egali cu numărul întreg respectiv. ■

### Șiruri cu limită infinită (1)

În continuare, este abordată situația șirurilor cu limită infinită, observându-se că șirurile cu limita  $+\infty$  au termeni „oricât de mari” de la un rang încolo, respectiv șirurile cu limita  $-\infty$  au termeni „oricât de mici” de la un rang încolo.

**Teorema 2.7.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale. Atunci

1.  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limita  $+\infty$  dacă și numai dacă pentru orice  $M > 0$  există un rang  $n_M \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n > M$  pentru orice  $n \geq n_M$ .
2.  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limita  $-\infty$  dacă și numai dacă pentru orice  $M > 0$  există un rang  $n_M \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n < -M$  pentru orice  $n \geq n_M$ .

**Demonstrație.** 1. „ $\Rightarrow$ ” Fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . Fie de asemenea  $M > 0$  arbitrar. Pentru acest  $M$ , vom considera  $V_M = (M, +\infty]$  o vecinătate a lui  $+\infty$ . Conform definiției limitei unui șir, există un rang  $n_{V_M}$  (notat în continuare  $n_M$ ) astfel ca  $x_n \in V_M$  pentru orice  $n \geq n_M$ . Atunci  $x_n > M$  pentru orice  $n \geq n_M$ , ceea ce trebuia demonstrat.

1. „ $\Leftarrow$ ” Presupunem că șirul are proprietatea din enunț și fie  $V$  o vecinătate arbitrară a lui  $+\infty$ . Această vecinătate conține un interval de forma  $(M, +\infty]$ ; fără a restrânge generalitatea,  $M$  poate fi luat pozitiv. Pentru acest  $M$ , conform proprietății din enunț, există un rang  $n_M \in \mathbb{N}$  astfel încât  $x_n > M$  pentru orice

$n \geq n_M$ , de unde  $x_n \in (M, \infty] \subseteq V$  pentru orice  $n \geq n_M$ . În concluzie, vecinătatea  $V$  conține toți termenii șirului de la rangul  $n_M$  încolo.

Demonstrația celei de-a doua afirmații este asemănătoare. ■

### Exercițiu

Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{n + 1}$ . Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

### Soluție

Fie  $M > 0$  arbitrar. Au loc relațiile

$$x_n = n + 1 + \frac{2}{n + 1} > M$$

cu condiția ca

$$n + 1 > M \Leftrightarrow n > M - 1.$$

Atunci  $n_M = [M - 1] + 1 = [M]$ , iar pentru  $n \geq n_M$ ,  $x_n > M$ , de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . ■

### Șiruri cu limita 0

În aceste condiții, studiul șirurilor convergente cărora le este cunoscută limita poate fi redus la studiul unor șiruri convergente la 0, observându-se că un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limita  $l \in \mathbb{R}$  dacă și numai dacă diferența dintre șir și limita sa tinde la 0; acesta este doar un alt fel de a spune că termenii unui șir convergent devin „apropiați” de limita șirului de la un rang încolo.

**Teorema 2.8.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale și  $l \in \mathbb{R}$ . Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$  dacă și numai dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0$ .

**Demonstrație.** Conform teoremei de caracterizare a șirurilor convergente (Teorema 2.6),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \text{ astfel încât } |x_n - l| < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \text{ astfel încât } |(x_n - l) - 0| < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0. \end{aligned}$$

■

**Proprietatea de păstrare a semnului**

Se poate observa că termenii unui șir cu limită au, cu excepția eventuală a unui număr finit dintre ei, același semn cu limita șirului.

**Teorema 2.9.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale cu limita  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ .

1. Dacă  $l > 0$ , atunci toți termenii șirului sunt strict pozitivi de la un rang încolo.
2. Dacă  $l < 0$ , atunci toți termenii șirului sunt strict negativi de la un rang încolo.
3. Dacă  $l \neq 0$ , atunci toți termenii șirului sunt nenuli de la un rang încolo.

**Demonstrație.** 1. Dacă  $l = \infty$ , alegem  $M = 1$  în Teorema 2.7 și obținem că există  $n_1 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n > 1$  pentru orice  $n \geq n_1$ , de unde concluzia. Dacă  $l \in \mathbb{R}$ , luând  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , obținem că există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_n - l| < \frac{1}{2}$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ , deci  $-\frac{1}{2} < x_n - l < \frac{1}{2}$ , sau  $\frac{l}{2} < x_n < \frac{3l}{2}$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ . Cum  $l > 0$ , urmează că  $x_n > 0$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ .

Cea de-a doua proprietate se demonstrează analog, iar cea de-a treia se obține prin combinarea primelor două. ■

**Șiruri cu limită infinită (2)**

**Teorema 2.10.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale.

1. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  (respectiv  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ), atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ .
2. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , iar  $x_n > 0$  (respectiv  $x_n < 0$ ) de la un rang încolo, atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$  (respectiv  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$ ).

**Demonstrație.** 1. Presupunem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , există un rang  $n_1 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$  pentru orice  $n \geq n_1$ . Atunci  $0 < \frac{1}{x_n} < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_1$ . Cum  $\varepsilon$  era arbitrar, urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ . Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , demonstrația este analoagă.

2. Presupunem că există un rang  $n_1 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n > 0$  pentru orice  $n \geq n_1$ . Fie  $M > 0$  arbitrar. Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , urmează că există un rang  $n_2 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_n - 0| < \frac{1}{M}$  pentru orice  $n \geq n_2$ . Atunci

$$0 < x_n < \frac{1}{M} \text{ pentru orice } n \geq \max(n_1, n_2),$$

deci  $\frac{1}{x_n} > M$  pentru orice  $n \geq \max(n_1, n_2)$ . Cum  $M$  era arbitrar, urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$ . Dacă  $x_n < 0$  de la un rang încolo, demonstrația este analogă. ■

Rezultatele teoremei de mai sus pot fi prezentate sub forma prescurtată

$$\frac{1}{+\infty} = 0, \quad \frac{1}{-\infty} = 0, \quad \frac{1}{0+} = +\infty, \quad \frac{1}{0-} = -\infty.$$

Cu ajutorul Teoremei 2.6, se poate acum obține următorul rezultat frecvent folosit în aplicații.

**Teorema 2.11.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir monoton crescător de numere reale care este nemărginit superior. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

**Demonstrație.** Fie  $M > 0$  arbitrar. Cum  $(x_n)_{n \geq 0}$  este nemărginit superior, există  $n_M \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_{n_M} > M$ , iar deoarece  $(x_n)_{n \geq 0}$  este monoton crescător, urmează că  $x_n > M$  pentru orice  $n \geq n_M$ . Conform Teoremei 2.7,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . Pentru a demonstra cea de-a doua parte a teoremei, se poate folosi Teorema 2.10, sau raționamentul de mai jos.

Fie acum  $\varepsilon > 0$  arbitrar și fie  $M_1 = \frac{1}{\varepsilon}$ . Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , urmează că există  $n_{M_1} \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n > M_1$  pentru orice  $n \geq n_{M_1}$ . De aici,  $\frac{1}{x_n} > 0$  pentru orice  $n \geq n_{M_1}$ . În plus,  $\frac{1}{x_n} < \frac{1}{M_1} = \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_{M_1}$ . De aici,  $|\frac{1}{x_n}| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_{M_1}$ , de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ . ■

Cu un raționament asemănător, se poate demonstra și următoarea teoremă complementară celei de mai sus.

**Teorema 2.12.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir monoton descrescător de numere reale care este nemărginit inferior. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

**Exemple** Pentru  $k \in (0, \infty)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ . De exemplu,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Pentru  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q^n} = 0$ . De exemplu,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 5^n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ .

Pentru  $q \in (0, 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  (deoarece  $p = \frac{1}{q} > 1$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p^n} (= \lim_{n \rightarrow \infty} q^n) = 0$ ).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}} = 0.$$

### Criterii de majorare-minorare

Conform teoremei anterioare, pentru a arăta că limita unui șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  este  $l \in \mathbb{R}$ , poate fi studiată diferența dintre termenii șirului și limita acestuia. Teorema următoare afirmă faptul că dacă această diferență poate fi estimată potrivit, cu valori din ce în ce mai mici ( $\alpha_n$  de mai jos poate fi înțeles ca o eroare de aproximare), atunci într-adevăr șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limita  $l$ .

**Teorema 2.13.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale și  $l \in \mathbb{R}$ . Dacă există un șir  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  de numere reale pozitive și un rang oarecare  $n_0 \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$|x_n - l| \leq \alpha_n \text{ pentru orice } n \geq n_0, \text{ iar } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ .

**Demonstrație.** Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Cum  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  este convergent la 0, urmează că există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|\alpha_n - 0| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ . De aici,  $|x_n - l| \leq \alpha_n < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq \max(n_0, n_\varepsilon)$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ . ■

### Exercițiu

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{2n+3}{n+1}$ . Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

### Soluție

Are loc relația

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n+1}, \text{ iar } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

deoarece  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = n + 1$  este un șir crescător și nemărginit superior. De aici,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ . ■

### Exercițiu

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ :  $x_n = \frac{\sin n}{n}$ . Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

### Soluție

Au loc relațiile

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n}, \text{ iar } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . ■

Se va observa acum că dacă termenii unui șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  pot fi minorați cu termeni „oricât de mari” ai unui șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  (i.e.  $(a_n)_{n \geq 0}$  are limita  $+\infty$ ), atunci ei sunt de asemenea „oricât de mari” (i.e.  $(x_n)_{n \geq 0}$  are tot limita  $+\infty$ ). De asemenea, dacă termenii unui șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  pot fi majorați cu termeni „oricât de mici” ai unui șir  $(b_n)_{n \geq 0}$  (i.e.  $(b_n)_{n \geq 0}$  are limita  $-\infty$ ), atunci ei sunt de asemenea „oricât de mici” (i.e.  $(x_n)_{n \geq 0}$  are tot limita  $-\infty$ ).

**Teorema 2.14.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale.

1. Dacă există un șir de numere reale  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu proprietatea că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  și un rang  $n_a \in \mathbb{N}$  astfel ca  $a_n \leq x_n$  pentru orice  $n \geq n_a$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .
2. Dacă există un șir de numere reale  $(b_n)_{n \geq 0}$  cu proprietatea că  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$  și un rang  $n_b \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n \leq b_n$  pentru orice  $n \geq n_b$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

**Demonstrație.** 1. Fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu proprietatea că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  și fie  $M > 0$  arbitrar. Există atunci un rang  $n_M$  astfel ca  $a_n > M$  pentru orice  $n \geq n_M$ . De aici,  $x_n \geq a_n > M$  pentru orice  $n \geq \max(n_a, n_M)$ , de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . Demonstrația celei de-a doua proprietăți este asemănătoare. ■

### Exercițiu

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = n + (-1)^n$ . Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

### Soluție

Are loc inegalitatea  $x_n \geq n - 1$  pentru orice  $n \geq 0$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 1) = \infty$ , de unde concluzia. ■

### Exercițiu

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

### Soluție

Mai întâi, să observăm că

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \text{ pentru orice } k \geq 1,$$

deci, prin sumare după  $k$  de la 1 la  $n$ ,

$$x_n > 2(\sqrt{n+1} - 1) \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = \infty$ , urmează concluzia. ■

**Șiruri conținând funcția modul**

Prezentăm în continuare câteva consecințe ale Teoremei 2.13, exprimând faptul că funcția modul păstrează convergența șirurilor.

**Teorema 2.15.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale. Atunci

1. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , iar  $l \in \mathbb{R}$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = l$ .
2. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ .
3. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Demonstrație.** 1. Fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$  și fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Există atunci  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_n - l| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ . Cum

$$||x_n| - |l|| \leq |x_n - l| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon,$$

conform inegalităților modulului, urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = l$ . Cea de-a doua afirmație rezultă din prima pentru  $l = 0$ .

3. Fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$  și fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Există atunci  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel ca  $||x_n| - 0| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ . Deoarece  $||x_n|| = |x_n|$ , urmează că  $|x_n - 0| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . ■

Se va observa că reciproca primei afirmații nu este adevărată. În acest sens, fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = (-1)^n$ . Atunci  $|x_n| \rightarrow 1$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , dar  $(x_n)_{n \geq 0}$  nu are limită. De asemenea, dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este un șir de numere reale astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$ , cu un raționament asemănător celui de mai sus.

**Limita șirului  $(q^n)_{n \geq 0}$** 

Din cele de mai sus, se obține că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

Acest lucru a fost observat deja pentru  $q \in (0, 1)$ , conform Teoremei 2.11. Pentru  $q \in (-1, 0)$ ,  $|q^n| = |q|^n$ , iar  $|q| \in (0, 1)$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = 0$ , de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , conform celei de-a treia proprietăți de mai sus. În fine, proprietatea este evidentă pentru  $q = 0$ .

Fie acum  $q \in (-\infty, -1)$ . Cum  $q^{2n} \rightarrow \infty$  iar  $q^{2n+1} \rightarrow -\infty$ , urmează că nu există  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ . Se observă în mod analog ca nu există  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$  nici pentru  $q = -1$ .

Discuția de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \text{nu există,} & \text{dacă } q \leq -1 \\ 0, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ 1, & \text{dacă } q = 1 \\ +\infty, & \text{dacă } q > 1 \end{cases}.$$

## 2.2.2 Proprietăți ale șirurilor cu limită

Teorema ce urmează, numită și *teorema de trecere la limită în inegalități* exprimă faptul că inegalitățile (nestrict) dintre termenii a două șiruri se păstrează prin trecere la limită.

**Teorema 2.16.** Fie două șiruri  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  cu proprietățile

1. Există un rang  $n_0$  astfel ca  $x_n \leq y_n$  pentru  $n \geq n_0$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Atunci  $x \leq y$ .

**Demonstrație.** Presupunem prin reducere la absurd că  $x > y$ . Conform proprietății de separație Hausdorff,  $x$  și  $y$  pot fi separate prin vecinătăți, adică există  $V_x \in \mathcal{V}(x)$  și  $V_y \in \mathcal{V}(y)$  astfel ca  $V_x \cap V_y = \emptyset$  (și deci  $z_1 > z_2$  pentru orice  $z_1 \in V_x$  și  $z_2 \in V_y$ ).

Conform definiției limitei, există  $n_x \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n \in V_x$  pentru  $n \geq n_x$  și  $n_y \in \mathbb{N}$  astfel ca  $y_n \in V_y$  pentru  $n \geq n_y$ , ambele relații fiind satisfăcute pentru  $n \geq \max(n_x, n_y)$ . Rezultă de aici că  $x_n > y_n$  pentru orice  $n > \max(n_x, n_y)$ , contradicție. ■

Inegalitățile nestrict dintre termenii a două șiruri nu se păstrează neapărat prin trecere la limită. Aceasta se poate observa considerând șirurile  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{1}{n+2}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$ :  $y_n = \frac{1}{n+1}$ , pentru care  $x_n < y_n$  pentru orice  $n \geq 0$ , dar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ .

Teorema de mai jos, numită și *teorema cleștelui*, ne permite să calculăm limita unui șir care poate fi încadrat între alte două șiruri având aceeași limită.



**Teorema 2.17.** Fie trei șiruri de numere reale  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(b_n)_{n \geq 0}$  cu proprietățile

1. Există un rang  $n_0$  astfel ca  $a_n \leq x_n \leq b_n$  pentru  $n \geq n_0$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Atunci există  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ .

**Demonstrație.** Dacă  $l = +\infty$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , folosind faptul că  $a_n \leq x_n$  pentru orice  $n \geq n_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  și Teorema 2.14. Pentru situația în care  $l = -\infty$  se raționează analog.

Fie acum  $l \in \mathbb{R}$ . Există atunci două ranguri  $n_a, n_b \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|a_n - l| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_a$ , respectiv  $|b_n - l| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_b$ . Urmează atunci că

$$-\varepsilon < a_n - l \leq x_n - l \leq b_n - l < \varepsilon \text{ pentru } n \geq \max(n_a, n_b, n_0),$$

de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ . ■

### Exercițiu

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ :  $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$ . Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

### Soluție

Observăm că dintre cei  $n$  termeni conținuți în suma care definește  $x_n$ ,  $\frac{1}{n^2+n}$  este cel mai mic, iar  $\frac{1}{n^2+1}$  este cel mai mare. Urmează că  $n \cdot \frac{1}{n^2+n} \leq x_n \leq n \cdot \frac{1}{n^2+1}$ , deci

$$\frac{1}{n+1} \leq x_n \leq \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n},$$

iar deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , urmează că de asemenea  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ,  $(x_n)_{n \geq 1}$  fiind încadrat între șirurile  $(\frac{1}{n+1})_{n \geq 1}$ ,  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  cu limita 0. ■

## 2.2.3 Relații între convergență, monotonie și mărginire

În cele ce urmează, vom studia relațiile dintre proprietățile de monotonie, mărginire și convergență.

**Teorema 2.18.** Orice șir convergent este mărginit.

**Demonstrație.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ . Punând  $\varepsilon = 1$  în Teorema 2.6, obținem că există  $n_1 \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|x_n - l| < 1$  pentru orice  $n \geq n_1$ , sau  $l - 1 < x_n < l + 1$  pentru orice  $n \geq n_1$ . Pentru a obține inegalități valabile și pentru  $x_0, x_1, \dots, x_{n_1-1}$ , observăm că, pentru orice  $n \geq 0$ ,

$$\min(x_0, x_1, \dots, x_{n_1-1}, l - 1) \leq x_n \leq \max(x_0, x_1, \dots, x_{n_1-1}, l + 1)$$

deci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit. ■

**Teorema 2.19.** *Orice șir nemărginit este divergent.*

**Demonstrație.** Se aplică operatorul de negație logică propoziției de mai sus. ■

**Exemple** 1. *Nu orice șir mărginit este convergent.*

Șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = (-1)^n$  nu este convergent, deoarece subșirul termenilor de rang par  $(x_{2n})_{n \geq 0}$ :  $x_{2n} = 1$  și subșirul termenilor de rang impar  $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ :  $x_{2n+1} = -1$  au limitele diferite  $l_1 = 1$ , respectiv  $l_2 = -1$ . În schimb,  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit, deoarece  $-1 \leq x_n \leq 1$  pentru orice  $n \geq 0$ .

2. *Nu orice șir convergent este monoton.*

Șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$  este convergent la 0, deoarece  $|x_n| = \frac{1}{n}$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , dar nu este monoton, luând alternativ atât valori pozitive, cât și negative.

3. *Nu orice șir monoton este mărginit.*

Șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = 2n + 1$  este monoton, dar nu este mărginit, fiind nemărginit superior.

4. *Nu orice șir mărginit este monoton.*

Șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = (-1)^n$  este mărginit, dar nu este monoton, luând alternativ atât valori pozitive, cât și negative.

**Teorema 2.20.** *Orice șir monoton și mărginit este convergent.*

**Demonstrație.** Vom demonstra în cele ce urmează că orice șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  monoton crescător și mărginit superior este convergent. În acest scop, să observăm că mulțimea  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$  a termenilor săi este mărginită, deoarece șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit. Fie atunci  $l = \sup A$ , care este număr real, deoarece  $A$  este mărginită. Vom arăta în continuare că  $l$  este limita șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ .

În acest scop, fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Deoarece  $l = \sup A$ , conform Teoremei 2.7, există  $x \in A$  astfel ca  $x > l - \varepsilon$ . Cum  $x \in A$ , există un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x = x_{n_0}$ , deci  $x_{n_0} > l - \varepsilon$  și, deoarece  $(x_n)_{n \geq 0}$  este monoton crescător,  $x_n > l - \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_0$ . Deoarece  $l = \sup A$ , urmează că  $x_n \leq l$  pentru orice  $n \geq 0$ . Combinând aceste relații, urmează că  $l - \varepsilon < x \leq l$  pentru orice  $n \geq n_0$ , deci  $|x_n - l| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_0$ . Cum  $\varepsilon$  era arbitrar, urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ . Dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este monoton descrescător și mărginit inferior, demonstrația este analoagă. ■

Din cele de mai sus, se observă de asemenea că toți termenii unui șir monoton crescător și mărginit superior  $(x_n)_{n \geq 0}$  sunt mai mici sau egali cu valoarea  $l$  a limitei șirului. Similar, toți termenii unui șir monoton descrescător și mărginit inferior  $(x_n)_{n \geq 0}$  sunt mai mari sau egali cu valoarea limitei șirului.

### Exercițiu

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ :  $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ . Arătați că  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

### Soluție

Vom arăta că  $(x_n)_{n \geq 1}$  este monoton și mărginit. În acest scop, să observăm că, deoarece  $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ , șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător, deci și mărginit inferior. De asemenea,  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$  pentru orice  $n \geq 2$ , deci

$$x_n < \frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} = 2,$$

iar  $(x_n)_{n \geq 1}$  este și mărginit superior. Fiind monoton și mărginit,  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent. ■

Combinând Teorema 2.11, Teorema 2.12 și Teorema 2.20, obținem următorul rezultat, care precizează existența limitei unui șir monoton.

**Teorema 2.21.** *Orice șir monoton  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limită, finită sau nu.*

## 2.2.4 Operații cu șiruri convergente

În cele ce urmează, se va observa că proprietatea unor șiruri de a fi convergente se păstrează după efectuarea operațiilor uzuale de sumă, diferență, produs cu o constantă, produs termen cu termen, iar în anumite condiții se păstrează și după efectuarea inverselor sau a raportului termen cu termen.

**Teorema 2.22.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  două șiruri convergente de numere reale astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Atunci șirul sumă  $(x_n + y_n)_{n \geq 0}$ , șirul produs cu o constantă  $(cx_n)_{n \geq 0}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , și șirul produs  $(x_n y_n)_{n \geq 0}$  sunt convergente, iar dacă  $x \neq 0$  atunci și șirul inverselor  $(\frac{1}{x_n})_{n \geq 0}$  este convergent. În plus, au loc relațiile

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x + y$   
(limita sumei este egală cu suma limitelor).
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = cx$   
(operația de înmulțire cu o constantă comută cu operația de calculare a limitei).
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = xy$   
(limita produsului este egală cu produsul limitelor).
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{1}{x}$ , dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$   
(limita inverselor este egală cu inversa limitei).

**Demonstrație.** 1. Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ , există rangurile  $n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1$$

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

Atunci, pentru orice  $n \geq \max(n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2)$ ,

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Cum  $\varepsilon$  era arbitrar, urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

2. Dacă  $c = 0$ ,  $(cx_n)_{n \geq 0}$  este constant nul, fiind deci convergent la 0. Fie acum  $c \neq 0$ . Fie deasemenea  $\varepsilon > 0$ . Există atunci rangul  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|c|} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ ,

$$|cx_n - cx| = |c||x_n - x| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon,$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = cx = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

3. Mai întâi, se observă că au loc inegalitățile

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &\leq |x_n| |y_n - y| + |x_n - x| |y|. \end{aligned}$$

Cum  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent, el este și mărginit, deci există  $M > 0$  astfel ca  $|x_n| \leq M$  pentru orice  $n \geq 0$ .

Fie  $\varepsilon > 0$ . Există atunci rangul  $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ .

Dacă  $y = 0$ , atunci, pentru orice  $n \geq n_\varepsilon^1$ ,

$$|x_n y_n - xy| < M \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = xy = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

Dacă  $y \neq 0$ , există rangul  $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|}$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon^2$ . Atunci, pentru orice  $n \geq \max(n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2)$ ,

$$|x_n y_n - xy| < M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|y|} |y| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = xy = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

4. Mai întâi, se observă că dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$ , atunci toți termenii șirului sunt nenuli de la un rang încolo, deci șirul  $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \geq 0}$  este bine definit, cu excepția eventuală a unui număr finit de termeni. Au loc egalitățile

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x_n - x}{x_n x} \right| = |x_n - x| \frac{1}{|x_n|} \frac{1}{|x|}.$$

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$ , există un rang  $n_x \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_n - x| < \frac{|x|}{2}$  pentru orice  $n \geq n_x$ , deci

$$|x_n| = |x_n - x + x| \geq |x| - |x_n - x| + |x| > |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Fie acum  $\varepsilon > 0$ . Există atunci un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_n - x| < \frac{\varepsilon|x|^2}{2}$ . Atunci, pentru orice  $n \geq \max(n_x, n_\varepsilon)$ ,

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| < \frac{\varepsilon|x|^2}{2} \frac{2}{|x|} \frac{1}{|x|} = \varepsilon,$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ . ■

**Exercițiu**

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  definit prin  $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 1$ ,  $n \geq 0$ ,  $x_0 = 1$ . Demonstrați că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent.

**Soluție**

Mai întâi, se observă că  $x_1 = -\frac{1}{2} < x_0$ . În plus,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}x_n - 1 - \frac{1}{2}x_{n-1} + 1 = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}),$$

deci

$$\operatorname{sgn}(x_{n+1} - x_n) = \operatorname{sgn}(x_n - x_{n-1}) = \dots = \operatorname{sgn}(x_1 - x_0).$$

Cum  $x_1 < x_0$ , urmează că șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este strict descrescător, deci și mărginit superior de  $x_0 = 1$ .

Deoarece  $x_{n+1} < x_n$ , urmează că  $x_n < \frac{1}{2}x_n - 1$ , deci  $x_n > -2$ , iar  $(x_n)_{n \geq 0}$  este și mărginit inferior. Cum  $(x_n)_{n \geq 0}$  este monoton și mărginit, el este convergent. Fie  $l$  limita sa; atunci șirul  $(\frac{1}{2}x_n)_{n \geq 0}$  are limita  $\frac{1}{2}l$ , iar șirul  $(x_{n+1})_{n \geq 0}$  are tot limita  $l$ . Trecând la limită în relația de recurență, obținem că  $l = \frac{1}{2}l - 1$ , deci  $l = -2$ . ■

Proprietățile de mai sus se pot extinde în mod imediat la operații cu un număr mai mare (dar constant) de șiruri. De exemplu, dacă  $(x_n^1)_{n \geq 0}$ ,  $(x_n^2)_{n \geq 0}, \dots, (x_n^k)_{n \geq 0}$  sunt șiruri convergente, cu limitele respectiv  $l_1, l_2, \dots, l_k$ , atunci șirul sumă  $(x_n^1 + x_n^2 + \dots + x_n^k)_{n \geq 0}$  este convergent, iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^1 + x_n^2 + \dots + x_n^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k.$$

Cazul operațiilor cu un număr variabil de șiruri trebuie tratat cu atenție, așa cum se observă din următorul exemplu

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

diferența provenind din faptul că paranteza  $\left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right)$  conține un număr de  $n$  șiruri,  $n$  fiind variabil.

**Teorema 2.23.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  două șiruri convergente de numere reale astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Atunci șirul diferență  $(x_n - y_n)_{n \geq 0}$  este convergent, iar dacă  $y \neq 0$ , atunci și șirul raport  $(\frac{x_n}{y_n})_{n \geq 0}$  este convergent. În plus, au loc relațiile

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x - y$   
(limita diferenței este egală cu diferența limitelor).
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{x}{y}$ , dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$   
(limita raportului este egală cu raportul limitelor).

**Demonstrație.** 1. Deoarece  $x_n - y_n = x_n + (-1)y_n$ , iar  $((-1)y_n)_{n \geq 0}$  este convergent cu limita  $-y$  (din teorema de mai sus), urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

2. Ca mai sus, șirul  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  este bine definit, cu excepția eventuală a unui număr finit de termeni. Deoarece  $\left(\frac{1}{y_n}\right)_{n \geq 0}$  este convergent cu limita  $\frac{1}{y}$ , urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

■

Se poate demonstra de asemenea următorul rezultat.

**Teorema 2.24.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  două șiruri convergente de numere reale astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Atunci șirul putere  $(x_n^{y_n})_{n \geq 0}$  este convergent. În plus, are loc relația

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{y_n}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \text{ (limita puterii se distribuie atât bazei și exponentului).}$$

Alegând șirurile constante  $(b_n)_{n \geq 0}: b_n = k, k \in \mathbb{N}^*$ , respectiv  $(b_n)_{n \geq 0}: b_n = \frac{1}{p}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*, p \geq 2$ , se obține următoarea consecință a teoremei de mai sus.

**Corolar 2.24.1.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir convergent de numere reale astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*, p \geq 2$ . Atunci

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)^k = x^k$  (limita puterii este egală cu puterea limitei).
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \sqrt[p]{x}$  (limita radicalului este egală cu radicalul limitei).

Analizăm acum cazul în care  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limita 0.

**Teorema 2.25.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir convergent de numere reale pozitive astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  și fie  $(y_n)_{n \geq 0}$  un șir convergent de numere reale astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \neq 0$ . Atunci

1. Dacă  $y > 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{y_n}) = 0$ .
2. Dacă  $y < 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{y_n}) = +\infty$ .

Considerații asemănătoare se pot formula în cazul în care  $(x_n)_{n \geq 0}$  este un șir convergent de numere reale negative cu limita 0, sau măcar conține termeni negativi, cu rezerva ca  $(x_n^{y_n})_{n \geq 0}$  trebuie mai întâi să fie bine definit. De exemplu, pentru  $x_n = -\frac{1}{n}$  și  $y_n = \frac{1}{2n}$ ,  $x_n^{y_n} = \sqrt[2n]{-\frac{1}{n}}$  nu este definit pentru nicio valoare a lui  $n$ .

Totuși, dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  au ambele limita 0, nu se poate afirma nimic despre convergența sau divergența șirului  $(x_n^{y_n})_{n \geq 0}$ , spunându-se că  $0^0$  este un caz de nedeterminare. Acest lucru se poate observa din următoarele exemple.

- Dacă  $x_n = \frac{1}{2^n}$ ,  $y_n = \frac{1}{n}$ , atunci  $x_n^{y_n} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ .
- Dacă  $x_n = \frac{1}{2^{n^2}}$ ,  $y_n = -\frac{1}{n}$ , atunci  $x_n^{y_n} = 2^n \rightarrow +\infty$ .
- Dacă  $x_n = \frac{1}{2^n}$ ,  $y_n = -\frac{(-1)^n}{n}$  atunci  $x_n^{y_n} = 2^{(-1)^n}$  nici măcar nu are limită.

### 2.2.5 Operații cu șiruri cu limită infinită

**Teorema 2.26.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  două șiruri de numere reale.

1. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty$ .
2. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty$ .

Rezultatul Teoremei 2.26 poate fi prezentat și sub forma prescurtată

$$\begin{aligned} \infty + \mathbf{c} &= \infty, & \infty + \infty &= \infty, \\ -\infty + \mathbf{c} &= -\infty, & -\infty + (-\infty) &= -\infty, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Teorema 2.27.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  două șiruri de numere reale.

1. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $y > 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty$ .



2. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}, y < 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = -\infty$ .
3. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}, y > 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = -\infty$ .
4. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}, y < 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty$ .

Rezultatul Teoremei 2.27 poate fi prezentat și sub forma prescurtată

$$\begin{aligned} \text{c.p.} \cdot +\infty &= +\infty, & \text{c.n.} \cdot +\infty &= -\infty, \\ \text{c.p.} \cdot -\infty &= -\infty, & \text{c.n.} \cdot -\infty &= +\infty, \end{aligned}$$

unde prin **c.p.** și **c.n.** înțelegem „constantă reală pozitivă” și respectiv „constantă reală negativă”.

**Teorema 2.28.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  două șiruri de numere reale.

1. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \mathbb{R}, y > 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$ .
2. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \mathbb{R}, y < 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$ .
3. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \mathbb{R}, y > 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$ .
4. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \mathbb{R}, y < 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$ .

Rezultatul Teoremei 2.28 poate fi prezentat și sub forma prescurtată

$$\begin{aligned} \frac{\infty}{\text{c.p.}} &= \infty, & \frac{\infty}{\text{c.n.}} &= -\infty, \\ \frac{-\infty}{\text{c.p.}} &= -\infty, & \frac{-\infty}{\text{c.n.}} &= \infty. \end{aligned}$$

**Teorema 2.29.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  două șiruri de numere reale.

Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \{-\infty, +\infty\}$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ .

Rezultatul Teoremei 2.29 poate fi prezentat și sub forma prescurtată

$$\frac{c}{\infty} = 0, \quad \frac{c}{-\infty} = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Teorema 2.30.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  două șiruri de numere reale.

1. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}, y > 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} = +\infty$ .

2. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}, y < 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} = 0$ .

Rezultatul Teoremei 2.30 poate fi prezentat și sub forma prescurtată

$$\infty^{\text{c.p.}} = \infty, \quad \infty^{\text{c.n.}} = 0.$$

Dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limita  $\infty$  iar  $(y_n)_{n \geq 0}$  are limita 0, nu se poate afirma nimic despre convergența sau divergența șirului  $(x_n^{y_n})_{n \geq 0}$ , spunându-se că  $\infty^0$  este un caz de nedeterminare. Acest lucru se poate observa din următoarele exemple.

- Dacă  $x_n = 2^n, y_n = \frac{1}{n}$ , atunci  $x_n^{y_n} = 2 \rightarrow 2$ .
- Dacă  $x_n = 2^{n^2}, y_n = \frac{1}{n}$ , atunci  $x_n^{y_n} = 2^n \rightarrow +\infty$ .
- Dacă  $x_n = 2^n, y_n = \frac{(-1)^n}{n}$  atunci  $x_n^{y_n} = 2^{(-1)^n}$  nici măcar nu are limită.

În general, nu se poate afirma nimic despre convergența sau divergența produsului dintre un șir convergent și un alt șir care nu are neapărat limită. Totuși, sub ipoteze adiționale, are loc următorul rezultat.

**Teorema 2.31.** *Produsul dintre un șir mărginit  $(x_n)_{n \geq 0}$  și un șir  $(y_n)_{n \geq 0}$  convergent la 0 este un șir convergent la 0.*

**Demonstrație.** Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Cum  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit, există  $M > 0$  astfel că  $|x_n| \leq M$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Deoarece  $(y_n)_{n \geq 0}$  este un șir convergent la 0, există un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$|y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci

$$|x_n y_n - 0| = |x_n| |y_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Cum  $\varepsilon$  era arbitrar, urmează că  $(x_n y_n)_{n \geq 0}$  este convergent la 0. ■

### Exemplu

Dacă  $(y_n)_{n \geq 0}$  este convergent la 0, atunci  $((-1)^n y_n)_{n \geq 0}$  este de asemenea convergent la 0.

**Demonstrație.** Este suficient să alegem  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = (-1)^n$ , care este mărginit. ■

## 2.2.6 Calculul unor limite fundamentale

### Limitele funcțiilor polinomiale

Fie  $P$  o funcție polinomială de grad  $k \geq 1$ ,

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Considerăm șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $x_n = P(n)$ . Pentru calculul limitei șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$  se va scoate factor comun forțat  $n^k$  ( $k = \text{grad } P$ ). Se obține că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right) \\ &= \infty \cdot a_k = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui  $P$  este de asemenea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k n^k = \infty \cdot a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

de unde se poate remarca faptul că *limita lui  $P(n)$  este egală cu limita termenului de grad maxim al lui  $P$ .*

**Exemple** 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 2n^2 + n - 1) = +\infty$ , deoarece coeficientul termenului de grad maxim  $n^3$  este pozitiv.

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^4 + 3n^3 - \sqrt{2}n + 5) = -\infty$ , deoarece coeficientul termenului de grad maxim  $n^4$  este negativ

### Limitele funcțiilor raționale

Fie  $P, Q$  două funcții polinomiale de grad  $k$ , respectiv  $l$ , unde  $k, l \geq 1$ ,

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0,$$

$$Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, Q(x) = b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0.$$

Considerăm șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ . Pentru calculul limitei șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$  se va scoate factor comun forțat  $n^k$  de la numărător ( $k = \text{grad } P$ ), respectiv  $n^l$  de la

numitor ( $l = \text{grad } Q$ ). Se obține că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k \left( a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right)}{n^l \left( b_l + b_{l-1} \frac{1}{n} + \dots + b_1 \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \frac{1}{n^l} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-l} \frac{a_k}{b^l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k = l. \\ +\infty \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k > l \end{cases} \end{aligned}$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k}{b_l n^l} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-l} \frac{a_k}{b^l},$$

de unde se poate remarca faptul că limita lui  $\frac{P(n)}{Q(n)}$  este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui  $P$  și  $Q$ . De asemenea, dacă  $\text{grad } P < \text{grad } Q$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$ , deci dacă gradul numitorului este mai mare decât gradul numărătorului, atunci limita lui  $\frac{P(n)}{Q(n)}$  este 0. Dacă  $\text{grad } P = \text{grad } Q$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_k}{b_l}$ , deci dacă gradul numitorului este egal cu gradul numărătorului, atunci limita lui  $\frac{P(n)}{Q(n)}$  este raportul coeficienților termenilor dominanți. Dacă  $\text{grad } P > \text{grad } Q$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = +\infty \frac{a_k}{b_l}$ , deci dacă gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului, atunci limita lui  $\frac{P(n)}{Q(n)}$  este  $+\infty$  dacă coeficienții termenilor dominanți au același semn, respectiv  $-\infty$  dacă coeficienții termenilor dominanți au semne opuse.

**Exemple** 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 6n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2 - 3\frac{1}{n} + 5\frac{1}{n^2})}{n^2(3 + 6\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})} = \frac{2}{3}.$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4n^2 - n + 2}{2n^2 - 3n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(1 + 4\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3})}{n^2(2 - 3\frac{1}{n} + 7\frac{1}{n^2})} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty.$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n - 6}{n^3 + 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(5 + 3\frac{1}{n} - \frac{6}{n^2})}{n^3(1 + 4\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3})} = 0 \cdot 5 = 0.$$

### Subșiruri ale șirurilor mărginite și nemărginite

A fost deja observat că nu orice șir monoton este convergent. Totuși, cu ajutorul teoremei de convergență a șirurilor monotone, putem arăta că din orice șir mărginit se poate extrage un subșir convergent, acest lucru reprezentând obiectul următorului rezultat, numit și *Lema lui Césaro*.

**Teorema 2.32.** *Orice șir mărginit  $(x_n)_{n \geq 0}$  conține un subșir convergent.*

**Demonstrație.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir mărginit și fie  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$  mulțimea termenilor săi. Notăm  $a_0 = \inf A$ ,  $b_0 = \sup A$ . Conform definițiilor marginii inferioare și marginii superioare,  $a_0 \leq x_n \leq b_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , deci, în particular,  $a_0 < x_0 < b_0$ ; fie  $k_0 = 0$ . În plus, măcar unul dintre intervalele  $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$  și  $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$  conține o infinitate de termeni ai șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ , deci și o infinitate de elemente ale mulțimii  $A_1 = \{x_n; n > k_0\}$ . Pentru fixarea ideilor, fie acesta  $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ . Notăm atunci  $a_1 = a_0$  și  $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$  și observăm că

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}, \quad a_1 \geq a_0, \quad b_1 \leq b_0.$$

De asemenea, putem alege un termen  $x_{k_1}$  al șirului astfel ca  $x_{k_1} \in [a_1, b_1]$ . Din nou, măcar unul dintre intervalele  $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$  și  $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$  conține o infinitate de elemente ale mulțimii  $A_2 = \{x_n, n > k_1\}$ ; notăm acest interval  $[a_2, b_2]$  și observăm că

$$b_2 - a_2 = \frac{b_0 - a_0}{2^2}, \quad a_2 \geq a_1 \geq a_0, \quad b_2 \leq b_1 \leq b_0,$$

putând alege un termen  $x_{k_2}$  al șirului,  $k_2 > k_1$ , astfel ca  $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$ . Procedând iterativ, putem construi trei șiruri  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(b_n)_{n \geq 0}$  și  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$  astfel încât  $(a_n)_{n \geq 0}$  este crescător,  $(b_n)_{n \geq 0}$  este descrescător,

$$a_n \leq x_{k_n} \leq b_n \text{ pentru orice } n \geq 0, \text{ iar } b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Mai mult, deoarece  $[a_n, b_n] \subset [a_0, b_0]$  pentru orice  $n \geq 0$ , șirurile  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(b_n)_{n \geq 0}$  sunt mărginite. Fiind și monotone, ele sunt convergente; fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l_2$ . Deoarece  $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ , urmează că  $l_1 = l_2$ , iar întrucât

$$a_n \leq x_{k_n} \leq b_n \text{ pentru orice } n \geq 0, \text{ iar } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l_1$$

urmează conform Teoremei 2.17 (criteriul cleștelui) că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n}$  este convergent, având aceeași limită  $l_1$ . ■

În mod asemănător, putem observa că șirurile nemărginite conțin subșiruri cu limită infinită.

**Teorema 2.33.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir.

1. Dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este nemărginit superior, atunci el conține un subșir cu limita  $+\infty$ .
2. Dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este nemărginit inferior, atunci el conține un subșir cu limita  $-\infty$ .

**Demonstrație.** 1. Fie  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$  mulțimea termenilor șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ . Cum  $A$  este nemărginită, există  $x \in A$  astfel ca  $x > 0$ . Deoarece  $x \in A$  există  $k_0 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x = x_{k_0}$ . Cum  $A_1 = \{x_k; k > k_0\}$  este de asemenea nemărginită, există  $y \in A$  astfel ca  $y > 1$ , deci există  $k_1 > k_0$  astfel ca  $x_{k_1} > 1$ . Procedând iterativ, putem construi un șir  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$  astfel încât  $x_{k_n} > n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , iar conform criteriului majorării (Teorema 2.14) se obține că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = \infty$ . Cea de-a doua afirmație se demonstrează analog. ■

### 2.2.7 Puncte limită ale unui șir

Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir dat. Vom numi *mulțimea punctelor limită* ale șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ , notată  $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$ , mulțimea tuturor limitelor de subșiruri ale lui  $(x_n)_{n \geq 0}$ .

Mai întâi se observă că mulțimea punctelor limită ale unui șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  dat este totdeauna nevidă. Mai precis, dacă șirul este mărginit, atunci el conține un subșir convergent (Teorema 2.32), cu o limită oarecare  $l$ , iar în această situație  $l \in \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Dacă șirul este nemărginit superior (respectiv superior), atunci  $+\infty \in \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$  (respectiv  $-\infty \in \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ), conform Teoremei 2.33.

#### Exemplu

Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = (-1)^n$ . Atunci  $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n = \{-1, 1\}$ . În acest scop, se observă că orice subșir cu limită (care este în mod necesar finită, deoarece  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit)  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$  al lui  $(x_n)_{n \geq 0}$  este constant de la un rang încolo, fiind un șir convergent de numere întregi. Fiind constant de la un rang încolo, termenii săi sunt toți egali cu 1 sau  $-1$  începând cu acel rang, iar  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$  poate avea fie limita 1, fie limita  $-1$ .

Conform definiției, se pot observa următoarele proprietăți.

1. Dacă o infinitate de termeni ai unui șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  sunt egali cu un același număr real  $x$ , atunci putem construi un subșir convergent la  $x$  cu termenii în cauză, deci  $x \in \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
2. Dacă un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limita  $l$ , finită sau nu, atunci  $l \in \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , pe post de subșir convergent la  $l$  putând lua chiar șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ .
3. Există șiruri care au o infinitate de puncte limită. De exemplu, pentru

$$(x_n)_{n \geq 0} : 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots, 1, 2, 3, \dots, n, \dots,$$

orice număr natural este punct limită, întrucât  $(x_n)_{n \geq 0}$  conține toate numerele naturale, repetate de o infinitate de ori.

4. Dacă  $l \in \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , atunci orice vecinătate  $V$  a lui  $l$  conține o infinitate de termeni ai șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ , deoarece există un subșir  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$  al lui  $(x_n)_{n \geq 0}$  care este convergent la  $l$  și deci  $V$  conține toți termenii subșirului  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$  de la un rang încolo.

**Teorema 2.34.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale. Atunci  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limită dacă și numai dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  se reduce la un singur element.

**Demonstrație.** „ $\Leftarrow$ ” Fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ . Deoarece  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limita  $l$ , orice subșir al său are aceeași limită, iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ .

„ $\Rightarrow$ ” Fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$  și  $V \in \mathcal{V}(l)$  o vecinătate arbitrară a lui  $l$ . Atunci în afara lui  $V$  se pot afla doar un număr finit de termeni ai șirului, în caz contrar din acești termeni putându-se extrage un șir cu limită, alta decât  $l$ , deoarece acești termeni se află în afara vecinătății  $V$ , contradicție. ■

### Limita superioară și limita inferioară a unui șir

Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale și fie șirurile  $(a_n)_{n \geq 0}$  și  $(b_n)_{n \geq 0}$  definite prin

$$a_n = \inf_{k \geq n} x_k = \inf \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

$$b_n = \sup_{k \geq n} x_k = \sup \{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Cum  $\{x_{n+1}, \dots\} \subseteq \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ , urmează că  $a_n \leq a_{n+1}$  și  $b_n \geq b_{n+1}$  pentru orice  $n \geq 0$ , deci  $(a_n)_{n \geq 0}$  este monoton crescător, iar  $(b_n)_{n \geq 0}$  este monoton descrescător.

Cum  $(a_n)_{n \geq 0}$  și  $(b_n)_{n \geq 0}$  sunt monotone, ele admit limite. De asemenea, se observă că  $a_n \leq b_n$  pentru orice  $n \geq 0$ .

Vom numi atunci *limită superioară* a șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ , notată  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  sau  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ , limita șirului  $(b_n)_{n \geq 0}$ . Similar, vom numi *limită inferioară* a șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ , notată  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  sau  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ , limita șirului  $(a_n)_{n \geq 0}$ . Deoarece  $a_n \leq b_n$  pentru orice  $n \geq 0$ , urmează că

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

### Exemplu

Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = 2 \sin \frac{n\pi}{3} + (-1)^n$ . Pentru  $n = 6k$ ,  $k \geq 0$ , urmează că  $x_{6k} = \sin(2k\pi) + 1 = 1$ . Similar,  $x_{6k+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ ,  $x_{6k+2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ ,  $x_{6k+3} = -1$ ,  $x_{6k+4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ ,  $x_{6k+5} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ . Cum fiecare dintre aceste subșiruri este convergent, fiind constant, urmează că  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ .

Dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit superior, există  $M \in \mathbb{R}$  astfel ca  $x_n \leq M$  pentru orice  $n \geq 0$ . Urmează că de asemenea  $b_n \leq M$  pentru orice  $n \geq 0$ , deci  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n (= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$  este finită. Similar, dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit inferior, atunci  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  este finită. De asemenea, conform Teoremei 2.33, dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este nemărginit superior, atunci  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , iar dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este nemărginit inferior, atunci  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

Fie acum  $l \in \text{LIM } x_n$ . Există atunci un subșir  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$  astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = l$ . Cum

$$\inf_{n_1 \geq k_n} x_n \leq x_{k_n} \leq \sup_{n_1 \geq k_n} x_n \text{ pentru orice } k_n \geq 0,$$

urmează că

$$a_{k_n} \leq x_{k_n} \leq b_{k_n} \text{ pentru orice } k_n \geq 0,$$

iar trecând la limită în aceste inegalități obținem că

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq l \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Mai mult, se poate demonstra că  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \in \text{LIM } x_n$ , deci  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  este cel mai mare punct limită al șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ . Similar,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \in \text{LIM } x_n$ , deci  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  este cel mai mic punct limită al șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ . În plus, deoarece

$$a_n = \inf_{k \geq n} x_k \geq \inf_{k \geq 0} x_k, \quad b_n = \sup_{k \geq n} x_k \leq \sup_{k \geq 0} x_k,$$



urmează că

$$\inf_{k \geq 0} x_k \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \sup_{k \geq 0} x_k,$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  este cuprinsă între marginea inferioară și marginea superioară a termenilor șirului. Teorema 2.34 se poate reformula atunci sub forma următoare.

**Teorema 2.35.** *Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale. Atunci  $(x_n)_{n \geq 0}$  are limită dacă și numai dacă  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ . În această situație,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Exemplul următor indică faptul că, dat fiind un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$ , nu trebuie confundat  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  cu  $\sup_{n \geq 0} x_n$  și nici  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  cu  $\inf_{n \geq 0} x_n$ . Acest lucru este de altfel evident din faptul că  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  și  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ , fiind puncte limită, nu sunt influențate de valorile primilor termeni ai șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ , pe când  $\sup_{n \geq 0} x_n$  și  $\inf_{n \geq 0} x_n$  da.

### Exemplu

Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = (-1)^n \frac{n+2}{n+1}$ . Atunci  $x_{2n} = \frac{2n+2}{2n+1}$ , care este strict descrescător cu limita 1, iar  $x_{2n+1} = -\frac{2n+4}{2n+3}$ , care este strict crescător, cu limita  $-1$ . Atunci  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ ,  $\sup_{n \geq 0} x_n = x_0 = 2$ ,  $\inf_{n \geq 0} x_n = x_1 = -\frac{3}{2}$ .

Totuși,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  și  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  rețin unele proprietăți de mărginire caracteristice  $\sup_{n \geq 0} x_n$  și  $\inf_{n \geq 0} x_n$ , chiar dacă într-o formă mai slabă. Aceste proprietăți sunt cuprinse în următorul rezultat. Reamintim că

$$x_n \leq \sup_{n \geq 0} x_n \text{ pentru orice } n \geq 0, \quad x_n \geq \inf_{n \geq 0} x_n \text{ pentru orice } n \geq 0.$$

**Teorema 2.36.** *Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir mărginit și fie  $\varepsilon > 0$ . Atunci*

1. Există  $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$  astfel că  $x_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon^1$ .
2. Există  $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$  astfel că  $x_n > \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n - \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon^2$ .

**Demonstrație.** Presupunem prin reducere la absurd că prima proprietate nu este adevărată. Există atunci  $\varepsilon > 0$  astfel încât pentru orice  $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$  există  $n \geq n_\varepsilon^1$  astfel că  $x_n \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon$ .

Pentru  $n_\varepsilon^1 = 0$ , există  $k_0$  astfel ca  $x_{k_0} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon$ . Pentru  $n_\varepsilon^1 = k_0 + 1$ , obținem că există  $k_1 \geq n_0 + 1 > n_0$  astfel ca  $x_{k_1} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon$ . Procedând iterativ, obținem existența unui subșir  $(x_{k_m})_{m \geq 0}$  cu proprietatea că

$$x_{k_m} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon \text{ pentru orice } m \geq 0.$$

Cum  $(x_{k_m})_{m \geq 0}$  este mărginit, fiind subșir al șirului inițial  $(x_n)_{n \geq 0}$ , urmează că  $(x_{k_m})_{m \geq 0}$  are la rândul lui un subșir convergent la o limită finită  $l$ . Conform proprietății de trecere la limită în inegalități, urmează că

$$l \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon,$$

ceea ce contrazice faptul că

$$l \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

deoarece  $l$  este un punct limită al șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ . Cea de-a doua proprietate se demonstrează analog. ■

Cu un raționament asemănător, folosind teoremele de caracterizare analitică a marginii superioare și marginii inferioare a unei mulțimi, se poate demonstra că marginea superioară și marginea inferioară a unei mulțimi mărginite se pot obține ca limite de șiruri cu elemente din acea mulțime.

**Teorema 2.37.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$  o mulțime mărginită. Există atunci două șiruri  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  de elemente din  $M$  astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf A$ .

**Demonstrație.** Conform teoremei de caracterizare analitică a marginii superioare, folosită pentru  $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  există  $x_n \in A$  astfel încât  $x_n > \sup A - \frac{1}{n+1}$ . Deoarece  $x_n \leq \sup A$ , urmează conform criteriului cleștelui că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup A$ . Cea de-a doua parte a teoremei se demonstrează analog. ■

## 2.2.8 Șiruri fundamentale (Cauchy)

În cazurile în care limita unui șir este dificil de intuit sau determinat numeric, poate fi util un criteriu de convergență care să nu facă apel la determinarea limitei

șirului. Considerațiile de mai jos permit demonstrarea convergenței unui șir fără determinarea limitei acestuia.

Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir. Spunem că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este *șir fundamental*, sau *șir Cauchy*, dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$  pentru orice  $m, n \geq n_\varepsilon$ .

Echivalent,  $(x_n)_{n \geq 0}$  este *șir Cauchy* dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|x_n - x_{n+p}| \leq \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$  și orice  $p \geq 0$ . Intuitiv, într-un șir Cauchy toți termenii sunt apropiați unul de celălalt de la un rang încolo.

**Teorema 2.38.** *Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir Cauchy. Atunci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit.*

**Demonstrație.** Conform definiției șirului Cauchy, aplicată pentru  $\varepsilon = 1$ , există un rang  $n_1 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_n - x_m| \leq 1$  pentru orice  $m, n \geq n_1$ . Fixând  $m = n_1$ , urmează că  $|x_n - x_{n_1}| \leq 1$  pentru orice  $n \geq n_1$ , deci  $-1 + x_{n_1} \leq x_n \leq 1 + x_{n_1}$  pentru orice  $n \geq n_1$ . Pentru a obține inegalități valabile și pentru  $x_0, x_1, \dots, x_{n_1-1}$ , observăm că, pentru orice  $n \geq 0$ ,

$$\min(x_0, x_1, \dots, x_{n_1-1}, -1 + x_{n_1}) \leq x_n \leq \max(x_0, x_1, \dots, x_{n_1-1}, 1 + x_{n_1}),$$

deci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit. ■

În particular, fiind mărginit, orice șir Cauchy  $(x_n)_{n \geq 0}$  admite un subșir convergent.

**Teorema 2.39.** *Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale. Atunci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este șir Cauchy dacă și numai dacă este convergent.*

**Demonstrație.** „ $\Rightarrow$ ”. Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir Cauchy. Atunci el conține un subșir convergent  $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ ; fie  $x$  limita acestuia. Fie de asemenea  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Pentru orice  $n \geq 0$ , are loc inegalitatea

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x|,$$

în care dorim să estimăm fiecare termen din membrul drept.

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$ , există un rang  $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_{k_n} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon^1$ .

În plus, cum  $(x_n)_{n \geq 0}$  este șir Cauchy, există un rang  $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_m - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pentru orice  $m, n \geq n_\varepsilon^2$ . Deoarece  $k_n \geq n$ , urmează că  $|x_n - x_{k_n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pentru  $n \geq n_\varepsilon^2$ .

Atunci, pentru  $n \geq \max(n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2)$ , au loc inegalitățile

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cum  $\varepsilon$  era arbitrar, urmează că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent la  $x$ .

„ $\Leftarrow$ ”. Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir convergent și fie  $x$  limita sa. Fie de asemenea  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Deoarece  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent, urmează că există un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ . Atunci

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Cum  $\varepsilon$  era arbitrar, urmează că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este șir Cauchy. ■

### Exercițiu

Fie  $(x_n)_{n \geq 1}$ :  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ . Demonstrați că  $(x_n)_{n \geq 1}$  nu este convergent.

### Soluție

Vom arăta că  $(x_n)_{n \geq 1}$  nu este șir Cauchy. Să presupunem prin reducere la absurd că  $(x_n)_{n \geq 1}$  este șir Cauchy. Conform definiției șirului Cauchy, aplicată pentru  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ , există un rang  $n_1 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_n - x_m| \leq \frac{1}{3}$  pentru orice  $m, n \geq n_1$ . În particular, pentru  $m = 2n$ , urmează că

$$|x_n - x_{2n}| \leq \frac{1}{3} \text{ pentru orice } n \geq n_1.$$

De asemenea,

$$|x_n - x_{2n}| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right| \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

contradicție. Urmează că  $(x_n)_{n \geq 1}$  nu este șir Cauchy, deci nu este nici convergent. ■

### Exercițiu

Fie  $(x_n)_{n \geq 1}$ :  $x_n = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + \frac{\cos nx}{2^n}$ . Demonstrați că  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

### Soluție

Vom arăta că  $(x_n)_{n \geq 1}$  este șir Cauchy. Mai întâi, observăm că au loc inegalitățile

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \left| \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} \right| + \dots + \left| \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ , există un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel ca  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$  pentru  $n \geq n_\varepsilon$ . De aici,

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \geq 0.$$

Urmează că  $(x_n)_{n \geq 1}$  este șir Cauchy, deci este convergent. ■

### 2.2.9 Criterii de convergență utilizând raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$

Prezentăm mai întâi o inegalitate între limitele unor șiruri de radicali, respectiv rapoarte, asociate unui șir cu termeni strict pozitivi.

**Teorema 2.40.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir cu termeni strict pozitivi. Are loc inegalitatea

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

**Demonstrație.** Demonstrăm mai întâi că

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Fie  $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ . Dacă  $L = +\infty$ , inegalitatea de mai sus este evidentă. Presupunem acum că  $L < +\infty$  și fie  $\varepsilon > 0$ .

Cum  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon$ , urmează conform Teoremei 2.36 că există  $n_1^\varepsilon$  astfel ca  $\frac{x_{n+1}}{x_n} < (L + \varepsilon) + \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_1^\varepsilon$ . De aici

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \dots \frac{x_{n_1^\varepsilon+1}}{x_{n_1^\varepsilon}} x_{n_1^\varepsilon} < x_{n_1} (L + 2\varepsilon)^{n-n_1^\varepsilon} \text{ pentru orice } n \geq n_1^\varepsilon,$$

de unde

$$\sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{x_{n_1}}(L + 2\varepsilon)^{1 - \frac{n_1}{n}} \text{ pentru orice } n \geq n_1^\varepsilon,$$

iar

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq L + 2\varepsilon,$$

prin trecere la limită superioară. Cum  $\varepsilon > 0$  era arbitrar, urmează că  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq L$ , ceea ce trebuia demonstrat. Cea de-a doua inegalitate se demonstrează analog. ■

Conform Teoremei 2.35, din rezultatul de mai sus se poate deduce imediat următorul criteriu de existență a limitei radicalului de ordin  $n$  al unui șir dat. În acest mod se poate reduce calculul unor limite care conțin radicali de ordin  $n$  la calculul unor limite de rapoarte, care pot fi mai simple decât cele dintâi.

**Teorema 2.41.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir cu termeni strict pozitivi. Dacă există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , atunci există și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$ .

### Exercițiu

Demonstrați că

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ , unde  $a > 0$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

### Soluție

1. Fie  $(x_n)_{n \geq 2}$ :  $x_n = a$ . Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{a} = 1$ , deci de asemenea  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .
2. Fie  $(x_n)_{n \geq 2}$ :  $x_n = n$ . Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ , deci de asemenea  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . ■

Convergența și divergența șirului  $(a_n)_{n \geq 0}$ :  $a_n = l^n$ , pentru care raportul  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  are valoarea constantă  $l \in [0, \infty)$ , a fost discutată anterior. În cele ce urmează, vom observa că un șir cu termeni strict pozitivi  $(x_n)_{n \geq 0}$  pentru care raportul  $\frac{x_{n+1}}{x_n}$  are limita  $l$ , fără a fi neapărat constant, are aceeași convergență sau divergență cu  $(a_n)_{n \geq 0}$ , cu excepția eventuală a cazului în care  $l = 1$ .

**Teorema 2.42.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir cu termeni strict pozitivi. Dacă există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , atunci

1. Dacă  $l \in [0, 1)$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .
2. Dacă  $l \in (1, \infty]$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .
3. Dacă  $l = 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  nu poate fi precizată a priori cu ajutorul limitei raportului (spunem că este un caz de dubiu).

**Demonstrație.** Fie  $l \in [0, 1)$ . Există atunci  $\varepsilon > 0$  astfel ca  $l + \varepsilon < 1$ . Există de asemenea  $n_1^\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel ca  $\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} - l \right| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_1^\varepsilon$ . Urmează că

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \dots \frac{x_{n_1^\varepsilon+1}}{x_{n_1^\varepsilon}} x_{n_1^\varepsilon} < x_{n_1} (l + \varepsilon)^{n-n_1^\varepsilon} = x_{n_1} (l + \varepsilon)^{-n_1^\varepsilon} (l + \varepsilon)^n.$$

Cum  $l + \varepsilon < 1$ , urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (l + \varepsilon)^n = 0$ . Deoarece  $(x_n)_{n \geq 0}$  este un șir cu termeni strict pozitivi, se obține conform criteriului cleștelui că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Cea de-a doua afirmație se poate demonstra analog. Pentru cea de-a treia, fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = n$ . Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . Fie de asemenea  $(x_n)_{n \geq 1}$ :  $x_n = \frac{1}{n}$ . Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . În concluzie, dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ , atunci  $(x_n)_{n \geq 0}$  poate fi atât convergent cât și divergent. ■

### Exercițiu

Demonstrați că

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ , unde  $a > 0$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ , unde  $a > 1, k > 0$ .

### Soluție

1. Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{a^n}{n!}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

deci de asemenea  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

2. Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{n^k}{a^n}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \in (0, 1),$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . ■

Cea de-a doua proprietate poate fi exprimată prescurtat prin faptul că funcția exponențială crește mai rapid către  $+\infty$  decât funcția putere.

### Exercițiu

Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}.$$

### Soluție

Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2) \cdot (2n+4)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)}}{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{3n+4} = \frac{2}{3} \in (0, 1),$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . ■

## 2.2.10 Teoremele Stolz-Césaro

Teoremele următoare, numite și *Teoremele Stolz-Césaro*, sunt aplicabile limitelor de rapoarte de șiruri de forma  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ , care pot fi reduse la calculul unor limite de rapoarte de șiruri de forma  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ , posibil mai simple, mai ales dacă  $(a_n)_{n \geq 0}$  și  $(b_n)_{n \geq 0}$  sunt definite cu ajutorul unor sume. Ele sunt denumite respectiv *Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare  $\frac{\infty}{\infty}$*  și *Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare  $\frac{\infty}{0}$*  pentru a indica situațiile uzuale de aplicabilitate, deși numai limita numitorului este cerută în mod explicit a fi  $+\infty$ , respectiv 0.

**Teorema 2.43.** Fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  și  $(b_n)_{n \geq 0}$  două șiruri de numere reale astfel încât

1.  $(b_n)_{n \geq 0}$  este strict crescător și  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ .

2. Există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ .



Atunci există și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ .

### Exercițiu

Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}.$$

### Soluție

Fie

$$(a_n)_{n \geq 0} : a_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}$$

$$(b_n)_{n \geq 0} : b_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}$$

Deoarece  $b_{n+1} - b_n = \sqrt{n} > 0$ , urmează că  $(b_n)_{n \geq 0}$  este strict crescător. Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$ , urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ . În plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 0,$$

deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . Urmează că de asemenea  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ , deci valoarea limitei din enunț este 0. ■

### Exercițiu

Fie  $q \in (0, 1)$ . Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$ .

### Soluție

Mai întâi, se observă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}.$$

Fie  $(a_n)_{n \geq 0} : a_n = n$ ,  $(b_n)_{n \geq 0} : b_n = \left(\frac{1}{q}\right)^n$ . Deoarece  $\frac{1}{q} > 1$  iar  $b_{n+1} - b_n = \left(\frac{1}{q}\right)^n \left(\frac{1}{q} - 1\right) > 0$ , urmează că  $(b_n)_{n \geq 0}$  este strict crescător. Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$ , urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ . În plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n \left(\frac{1}{q} - 1\right)} = 0.$$

Urmează că de asemenea  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ , deci valoarea limitei din enunț este 0. ■

**Teorema 2.44.** Fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  și  $(b_n)_{n \geq 0}$  două șiruri de numere reale astfel încât

1.  $(b_n)_{n \geq 0}$  este strict descrescător și  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

2. Există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Atunci există și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ .

### 2.2.11 Șiruri cu limita numărul $e$

Vom considera în continuare șirul  $(x_n)_{n \geq 0} : x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , căruia îi vom demonstra convergența.

**Teorema 2.45.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0} : x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Atunci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este strict crescător și mărginit.

**Demonstrație.** *Monotonie*

Folosind formula binomială, observăm că

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Cu același raționament,

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \frac{1}{k!}.$$

Comparând factor cu factor, obținem că

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right),$$

pentru orice  $1 \leq k \leq n$ , deci  $x_n < x_{n+1}$ , iar  $(x_n)_{n \geq 0}$  este strict crescător.

*Mărginire*

Observăm că

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!},$$

iar cum

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \leq 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{k-1} \text{ pentru } k \geq 2,$$

obținem că

$$\begin{aligned} x_n &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3. \end{aligned}$$

Cum  $(x_n)_{n \geq 0}$  este monoton crescător,  $x_n \geq x_1 = 2$  pentru orice  $n \geq 1$ . În concluzie

$$2 \leq x_n < 3 \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

deci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit.

Fiind monoton și mărginit,  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent. Prin convenție, se notează cu  $e$  limita sa, unde  $e = 2.71828\dots$  ■

Din teorema de mai sus se obține următoarea egalitate importantă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

De asemenea, se observă că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{n}{n-1}} \\ &= e, \end{aligned}$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

**Teorema 2.46.** Șirul  $(y_n)_{n \geq 0}$ :  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  este strict descrescător și convergent la  $e$ .

**Demonstrație.** *Monotonie*

Pentru a demonstra că  $(y_n)_{n \geq 0}$  este strict descrescător, observăm că

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} &\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} > \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n+2}} > \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea dintre media geometrică și media armonică numerelor  $1, 1, \dots, 1, \frac{n+1}{n+2}$ , obținem că

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n+2}} > \frac{n+1}{1+1+\dots+1+\frac{n+2}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n^2+2n+2}.$$

Rămâne deci să demonstrăm că

$$\frac{(n+1)^2}{n^2+2n+2} \geq \frac{n(n+2)}{(n+1)^2},$$

ceea ce este imediat, deoarece

$$(n^2+2n+2)n(n+2) = [(n+1)^2+1][(n+1)^2-1] = (n+1)^4 - 1 < (n+1)^4.$$

Deoarece  $(y_n)_{n \geq 1}$  este strict descrescător, el este mărginit superior de  $y_1$ . Conform inegalității lui Bernoulli,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\frac{1}{n} > 2,$$

deci  $(y_n)_{n \geq 1}$  este și mărginit inferior. Cum  $(y_n)_{n \geq 1}$  este monoton și mărginit, el este convergent. În plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e,$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$ . ■

Cum termenii unui șir strict crescător sunt strict mai mici decât valoarea limitei, respectiv termenii unui șir strict descrescător sunt strict mai mari decât valoarea limitei, obținem din cele de mai sus că

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

de unde, prin logaritmare

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}.$$

Câteva consecințe importante ale convergenței șirurilor de mai sus, motivate de egalitățile deja obținute, sunt indicate în cele ce urmează.

**Teorema 2.47.** *Au loc următoarele proprietăți.*

1. Fie  $(p_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale strict pozitive cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty$ . Atunci
 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{p_n} \right)^{p_n} = e.$$
2. Fie  $(m_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale strict negative cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = -\infty$ . Atunci
 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{m_n} \right)^{m_n} = e.$$
3. Fie  $(z_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale nenule cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ . Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z_n)^{\frac{1}{z_n}} = e$ .

### Exemple

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n-1} \right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{2n-1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{2}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{2}} \right]^{\frac{2}{2n-1}(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{2}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{2}} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n-1}} = e^2 \end{aligned}$$

Aici,

$$(z_n)_{n \geq 1} : z_n = \frac{2}{2n-1} \rightarrow 0 \text{ pentru } n \rightarrow \infty.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 - n + 1}{2n^2 + n + 1} \right)^{n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2n}{2n^2 + n + 1} \right)^{n+2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 - \frac{2n}{2n^2 + n + 1} \right)^{\frac{2n^2 + n + 1}{-2n}} \right]^{\frac{-2n}{2n^2 + n + 1} (n+2)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 - \frac{2n}{2n^2 + n + 1} \right)^{\frac{2n^2 + n + 1}{-2n}} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 - 4n}{2n^2 + n + 1}} \\
&= e^{-1} = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Aici,

$$(z_n)_{n \geq 1} : z_n = \frac{2n}{2n^2 + n + 1} \rightarrow 0 \text{ pentru } n \rightarrow \infty.$$

Din Teorema 2.47 se pot deduce de asemenea și următoarele proprietăți.

**Teorema 2.48.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale nenule cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Atunci

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a$  pentru orice  $a > 0$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + x_n)^k - 1}{x_n} = k$  pentru orice  $k \in \mathbb{R}$ .

### Exercițiu

Demonstrați că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0, \quad k > 0.$$

### Soluție

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1)^k - n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{(1 + \frac{1}{n})^k - 1}{n^k}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^k - 1}{n^k}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k+1} = 1 \cdot \frac{1}{k} \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$



Proprietatea poate fi exprimată prescurtat prin faptul că funcția putere crește mai rapid către  $+\infty$  decât funcția logaritmică.

**Exemple** 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln 2.$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2} \right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}} \right]^{\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2} n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2} \right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{2} - 1) + (\sqrt[n]{3} - 1)}{2} n} \\ &= e^{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right) \frac{1}{2}} = e^{(\ln 2 + \ln 3) \frac{1}{2}} = e^{\ln \sqrt{2 \cdot 3}} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

**Un alt șir cu limita  $e$**

Fie acum șirul  $(e_n)_{n \geq 1}$  definit prin

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

**Teorema 2.49.** Șirul  $(e_n)_{n \geq 0}$  este convergent cu limita  $e$ .

**Demonstrație.** Cum  $e_{n+1} - e_n = \frac{1}{(n+1)!}$ ,  $(e_n)_{n \geq 0}$  este strict crescător, deci  $e_n \geq e_1 = 2$  pentru orice  $n \geq 1$ , iar conform inegalităților obținute în Teorema 2.45,  $e_n < 3$  pentru orice  $n \geq 1$ . În concluzie,  $(e_n)_{n \geq 0}$  este mărginit. Fiind și monoton,  $(e_n)_{n \geq 0}$  este convergent; să notăm cu  $e'$  limita sa. Să notăm de asemenea  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Deoarece  $x_n < e_n$ , obținem prin trecere la limită pentru  $n \rightarrow \infty$  că  $e \leq e'$ .

Fie acum  $1 \leq m < n$  fixat. Atunci

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \\ &< 1 + \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Trecând la limită pentru  $n \rightarrow \infty$  în relația de mai sus, obținem că

$$e \leq 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!},$$

adică  $e \leq e_m$ . Cum această egalitate este valabilă în fapt pentru orice  $m$  (restricția  $m < n$  se elimină prin alegerea de la început a unui  $n$  suficient de mare), prin trecere la limită se obține că  $e \leq e'$ . Cum și  $e' \leq e$ , urmează că  $e = e'$ , iar  $(e_n)_{n \geq 0}$  este convergent tot la  $e$ . ■

Din cele de mai sus, se obține următoarea egalitate

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

### Iraționalitatea lui $e$

**Teorema 2.50.** Numărul  $e$  este irațional.

**Demonstrație.** Ca mai sus, să notăm

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Atunci, pentru  $p \geq 2$

$$\begin{aligned} e_{n+p} - e_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+p)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2) \dots (n+p)}\right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{p-1}}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1 - \frac{1}{(n+2)^p}}{1 - \frac{1}{n+2}} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{nn!} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \\ &< \frac{1}{nn!}, \text{ pentru } p \geq 2. \end{aligned}$$



deci

$$0 < e_{n+p} - e_n < \frac{1}{nn!}.$$

Trecând la limită pentru  $p \rightarrow \infty$ , obținem că

$$0 < e - e_n \leq \frac{1}{nn!}.$$

Să presupunem prin reducere la absurd că  $e$  este rațional,  $e = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 2$ .

Atunci

$$0 < \frac{p}{q} - e_q \leq \frac{1}{qq!} \implies 0 < (q-1)!p - q!e_q \leq \frac{1}{q} < 1$$

Cum  $e_q$  poate fi scris, prin aducere la același numitor, ca o fracție cu numitorul  $q!$ ,  $q!e_q$  este un număr natural, deci între 0 și 1 se află numărul întreg  $(q-1)!p - q!e_q$ , contradicție. În concluzie,  $e$  este număr irațional. ■

### Constanta lui Euler

Fie acum șirul  $(c_n)_{n \geq 1}$  definit prin

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

**Teorema 2.51.** Șirul  $(c_n)_{n \geq 0}$  este convergent.

**Demonstrație.** Vom demonstra că  $(c_n)_{n \geq 0}$  este monoton și mărginit.

*Monotonie*

Observăm că

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

deci  $(c_n)_{n \geq 0}$  este strict descrescător.

*Mărginire*

Cum  $(c_n)_{n \geq 0}$  este strict descrescător, el este mărginit superior. Observăm că

$$\ln(k+1) - \ln k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k+1}, \text{ pentru } k \geq 1.$$

Sumând inegalitățile obținute pentru  $k = 1, k = 2, \dots, k = n-1$  obținem că

$$\ln n > \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \Leftrightarrow c_n < 1 \text{ pentru } n \geq 2,$$

Cum  $(c_n)_{n \geq 0}$  este monoton și mărginit, el este convergent. Prin convenție, se notează cu  $c$  limita sa, unde  $c = 0.57721\dots$ . Numărul  $c$  astfel definit se numește *constantă lui Euler*. ■

**Exercițiu**

Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

**Soluție**

Au loc relațiile

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} &= \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln(2n) \right) \\ &\quad - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) + \ln 2n - \ln n \\ &= c_{2n} - c_n + \ln 2. \end{aligned}$$

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = e$ , urmează că limita din enunț este  $\ln 2$ . ■

**Aplicații**

**2.1.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{n+2}{2n+5}$ . Precizați valorile lui  $n$  pentru care  $|x_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{9}$ .

**2.2.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$ ,  $x_0 = \frac{4}{3}$ .

1. Demonstrați că  $x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)^2$ .
2. Determinați expresia termenului general  $x_n$ .
3. Determinați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**2.3.** Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + n^3 + 3n^2 - n + 5}{3n^3 - 2n^2 + n - 6}$ ; 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n^2 + 2n + 3) - \ln(3n^2 + n - 6))$ ;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2 + n + 1)}{\ln(n^6 + 2n + 3)}$ .

**2.4.** Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n + \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} + \left( \frac{2}{3} \right)^{2n+3} \right)$ ; 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{5 \cdot 2^{n+1} + 3^{n+2}}$ ; 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n - 1}{3n^2 + 2n + 1} \cdot \left( \frac{3}{5} \right)^n$ ;
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 0.5 + 0.5^2 + \dots + 0.5^n}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}$ ; 5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^{n+1} - (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{n+1}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^n - (\sqrt{5} - \sqrt{3})^n}$ .

**2.5.** Dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este un șir cu proprietatea că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , determinați

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 2}{2x_n + 3}$ ; 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 2}{3x_n + 1}$ ; 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 3}{x_n^3 + 2}$ .

**2.6.** Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}); \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + (-1)^n}{2n + 3}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + n} - n).$$

**2.7.** Folosind eventual un criteriu de majorare-minorare, demonstrați că

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 1 + 2 \sin 2 + \dots + n \sin n}{n^3} = 0; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n + n \sin \frac{n}{2}) = +\infty;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + [n] \cos \frac{n\pi}{3}) = -\infty.$$

**2.8.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ :  $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$ . Demonstrați că  $0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$  pentru orice  $n \geq 1$  și determinați de aici  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**2.9.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 2}$ :  $x_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ . Demonstrați că  $3 < x_n < 3\sqrt[n]{2}$  pentru orice  $n \geq 2$  și determinați de aici  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**2.10.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 2}$ :  $x_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}$ . Demonstrați că  $1 < x_n < \sqrt[n]{n^2}$  pentru orice  $n \geq 2$  și determinați de aici  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**2.11.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 2}$ :  $x_n = \sqrt[n]{n}$ . Se notează  $x_n = 1 + \alpha_n$ ,  $n \geq 2$ . Demonstrați că  $0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$  și determinați de aici  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**2.12.** Determinați

$$1. \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2n+1}{3n+2}, \frac{2n+5}{3n+1} \right], \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2n+1}{3n+2}, \frac{2n+5}{3n+1} \right];$$

$$2. \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{3n+4}{4n+5}, \frac{3n+8}{4n+9} \right], \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{3n+4}{4n+5}, \frac{3n+8}{4n+9} \right].$$

**2.13.** Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+n}{n^2+n+1} \right)^{n+\sqrt{n}}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n+3}{2^n+1} \right)^{n+\ln n}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+3\sqrt{n+5}}{2n+5} \right)^{\sqrt{n}}.$$

**2.14.** Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}.$$

**2.15.** Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}.$$

**2.16.** Folosind eventual una dintre teoremele Stolz-Césaro, determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{n^2(n+1)^2}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} \right);$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

**2.17.** Determinați  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  și  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  în următoarele situații:

1.  $(x_n)_{n \geq 0}: x_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n^2}}{n^2+1};$
2.  $(x_n)_{n \geq 0}: x_n = \frac{\sin n^2}{n+1};$
3.  $(x_n)_{n \geq 0}: x_n = \arcsin(-1)^n + \arccos(-1)^{n+1} + \operatorname{arctg}(-1)^{n+2};$
4.  $(x_n)_{n \geq 0}: x_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^{n \sin \frac{n\pi}{3}} + \left(\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + 2n + 3}\right)^n.$

**2.18.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}: x_n = 2 + \frac{n}{n+2} \cos \frac{n\pi}{2}$ . Determinați  $\operatorname{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**2.19.** Determinați valoarea limitei:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^1 \cdot e^2 \cdot \dots \cdot e^n}{n}.$$

**2.20.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}: x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1+x_n}, n \geq 0$  și  $x_0 = 1$ .

1. Studiați monotonia și mărginirea șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ .
2. Demonstrați că șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent și calculați-i limita.
3. Folosind eventual una dintre teoremele Stolz-Césaro, determinați  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ .

**2.21.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}: x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}, n \geq 0$  și  $x_0 \in (1, 2)$ .

1. Demonstrați că  $1 < x_n < 2$  pentru orice  $n \geq 0$ .
2. Demonstrați că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este strict crescător.
3. Demonstrați că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent și precizați-i limita.

**2.22.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}: x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ radicali}}$ .

1. Determinați o relație de recurență verificată de termenii șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ .
2. Demonstrați că  $0 < x_n < 2$  pentru orice  $n \geq 1$ .
3. Demonstrați că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este strict crescător.
4. Demonstrați că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent și precizați-i limita.

**2.23.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3$ ,  $n \geq 0$  și  $x_0 \in (0, 1)$ .

1. Demonstrați că  $0 < x_n < 1$  pentru orice  $n \geq 0$ .
2. Demonstrați că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este strict descrescător.
3. Demonstrați că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent și precizați-i limita.

**2.24.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}$ ,  $n \geq 0$  și  $x_0 > 0$ .

1. Demonstrați că  $x_n > 0$  pentru orice  $n \geq 0$ .
2. Demonstrați că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este strict crescător.
3. Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

**2.25.** Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

**2.26.** Dacă un șir monoton  $(x_n)_{n \geq 0}$  are un subșir convergent, atunci  $(x_n)_{n \geq 0}$  este de asemenea convergent.

**2.27.** Dacă un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  are o infinitate de subșiruri convergente, rezultă că acesta este convergent?

**2.28.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir și  $l \in \mathbb{R}$ . Dacă orice vecinătate  $V$  a lui  $l$  conține o infinitate de termeni ai șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ , rezultă că șirul are limita  $l$ ?

**2.29.** Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4n^2 + 4n + 3} - an - b \right) = 2.$$

## Capitolul 3

# SERII NUMERICE

Date fiind numerele reale  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , în număr finit, suma lor  $x_0 + x_1 + \dots + x_n$  se poate calcula fără dificultate, după regulile uzuale. Extinderea noțiunii de sumă pentru mulțimi infinite de numere nu este însă la fel de imediată. Acest lucru se poate observa încercând să se calculeze suma

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) + \dots$$

(termenii sumei sunt, alternativ, 1 și  $-1$ ). Gruparea în modul

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots + (1 + (-1)) + \dots,$$

în care suma termenilor din fiecare grup este 0, poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 0. De asemenea, gruparea în modul

$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \dots + ((-1) + 1) + \dots,$$

poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 1; desigur, asocierea a două valori distincte pentru o aceeași sumă de numere reale reprezintă o situație inacceptabilă. În special, din cele de mai sus se observă faptul că în cazul adunării unui număr infinit de numere reale nu are neapărat loc proprietatea de asociativitate.

În lipsa proprietății de asociativitate, singura posibilitate de calcul a unei sume infinite rămâne de a aduna termenii din sumă unul câte unul. În concluzie, pentru a calcula o sumă de forma

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

vom determina

$$S_0 = x_0, \quad S_1 = x_0 + x_1, \quad S_2 = x_0 + x_1 + x_2, \dots,$$

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n, \dots$$

și vom încerca să extragem informații despre comportarea șirului  $(S_n)_{n \geq 0}$ , utilizând aceste informații pentru determinarea sumei.

Numim atunci *serie numerică de termen general*  $x_n$  (sau, mai simplu, *serie de termen general*  $x_n$ ) cuplul  $((x_n)_{n \geq 0}, (S_n)_{n \geq 0})$  format din șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  al termenilor seriei și șirul  $(S_n)_{n \geq 0}$  al sumelor parțiale, definit după regula

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

În această situație,  $x_n$  se va numi și *termenul de rang*  $n$  sau *indice*  $n$  al seriei. Vom nota o serie de termen general  $x_n$  prin

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots,$$

sau, sub formă prescurtată, prin

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Dacă primii  $k$  termeni  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  nu sunt definiți, vom nota seria de termen general  $x_n$  prin

$$x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n + \dots,$$

respectiv prin

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n.$$

Notațiile de mai sus sugerează și denumirea de „sumă infinită” pentru o serie, deși, conform exemplului anterior, sumele infinite de numere reale nu au neapărat aceleași proprietăți ca și sumele finite de numere reale, această denumire nefiind deci întrutotul justificată.

### Serii convergente, serii divergente

Spunem că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este *convergentă* dacă șirul sumelor parțiale  $(S_n)_{n \geq 0}$  este convergent, respectiv că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este *divergentă* dacă șirul sumelor parțiale

$(S_n)_{n \geq 0}$  este divergent. Dacă șirul sumelor parțiale  $(S_n)_{n \geq 0}$  are limită, atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$  se va numi *suma* seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ . Seriilor  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  pentru care șirul sumelor parțiale  $(S_n)_{n \geq 0}$  nu are limită nu li se asociază nicio sumă.

### Exemplu

Fie seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ . Termenul general al acestei serii este  $x_n = \frac{1}{2^n}$ . Sub formă desfășurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Deoarece

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2,$$

deci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  este convergentă, iar suma sa este 2.

### Exemplu

Fie seria  $\sum_{n=0}^{\infty} n$ . Termenul general al acestei serii este  $x_n = n$ . Sub formă desfășurată, seria se poate scrie în modul următor

$$0 + 1 + 2 + \dots + n + \dots$$

Deoarece

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty,$$

deci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} n$  este divergentă, iar suma sa este  $+\infty$ .



**Exemplu**

Fie seria  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ . Termenul general al acestei serii este  $x_n = (-1)^n$ . Sub formă desfășurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) + \dots$$

Deoarece

$$S_{2n} = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots + (1 + (-1)) + 1 = 1,$$

iar

$$S_{2n+1} = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) = 0,$$

urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = 0,$$

deci nu există  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Atunci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  este divergentă, suma sa neputând fi definită.

În cele ce urmează, vom preciza condiții pentru a stabili dacă o serie dată este sau nu convergentă, acolo unde este posibil determinându-se explicit și suma seriei.

**Sume calculabile exact**

**Seria**  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

Termenul general al acestei serii este  $x_n = q^n$ . Dacă  $q \neq 1$ , atunci

$$S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

în vreme ce dacă  $q = 1$ , atunci  $S_n = n + 1$ .

Urmează atunci că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  este convergentă pentru  $q \in (-1, 1)$ , cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$ , deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$  pentru  $q \in (-1, 1)$ . În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

De asemenea, pentru  $q = 1$  seria  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  este divergentă, deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty$ , iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q = 1.$$

Dacă  $q \in (1, +\infty)$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ , deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = +\infty$  pentru  $q \in (1, \infty)$ , iar  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  este divergentă. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q \in (1, +\infty).$$

Dacă  $q \in (-\infty, -1]$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  nu există, deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}$  nu există pentru  $q \in (-\infty, -1]$ , iar  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  este divergentă, acestei serii neputându-i-se asocia o sumă.

Discuția de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{nu este definită,} & \text{dacă } q \leq -1 \\ \frac{1}{1-q}, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ +\infty, & \text{dacă } q \geq 1 \end{cases}$$

### Exemplu

Fie suma  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n}$ . Atunci termenul general al acestei serii este

$$x_n = \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \left( \frac{(-1)2^3}{9} \right)^n = \left( -\frac{8}{9} \right)^n,$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{8}{9} \right)^n = \frac{1}{1 - (-\frac{8}{9})} = \frac{9}{17}.$$

### Serii telescopice

Fie seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ . Spunem că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este o *serie telescopică* dacă există șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$ , astfel ca

$$x_n = a_n - a_{n+1} \text{ pentru orice } n \geq 0,$$

adică există un șir pentru care termenul general al seriei se poate scrie ca diferența a doi termeni consecutivi ai acestui șir, primul cu același indice ca și indicele termenului general al seriei. În această situație,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_0 - a_{n+1}, \end{aligned}$$

de unde seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă dacă și numai dacă  $(a_n)_{n \geq 0}$  este convergent.

În această ultimă situație,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 - a_{n+1}) = a_0 - l,$$

unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ .

### Exemplu

Fie seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ . Atunci termenul general al sumei este  $x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ .

Observăm că

$$x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

### Exemplu

Fie seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$ . Atunci termenul general al sumei este  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$ .

Observăm că

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})} \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ &= \sqrt{n+2} - 1, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - 1) = +\infty.$$

### Proprietăți generale ale seriilor

#### Eliminarea termenilor

În Capitolul 2, a fost observat că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai unui șir nu-i modifică acestuia proprietatea de a avea sau nu avea limită. Cum convergența unei serii este definită prin intermediul șirului sumelor parțiale, este natural ca nici eliminarea unui număr finit de termeni ai unei serii date să nu modifice natura acesteia. Prin „natură” înțelegem aici proprietatea unei serii de a fi convergentă sau divergentă, iar prin serii „cu aceeași natură” înțelegem două serii care sunt ambele convergente sau ambele divergente.

**Teorema 3.1.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie dată. Dacă se adaugă sau se elimină un număr finit de termeni, atunci seria obținută are aceeași natură cu seria inițială, putându-se modifica în schimb suma sa, dacă seria este convergentă. Dacă suma seriei este  $+\infty$  sau  $-\infty$ , aceasta nu se modifică.

**Demonstrație.** Presupunem că se elimină termenii  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ ,  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ . Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  seria obținută prin modificare și fie  $(T_n)_{n \geq 0}$  șirul sumelor sale parțiale. Atunci  $y_n = x_{n+k}$  pentru orice  $n > n_k - k$ , iar

$$T_n = S_{n+k} - (x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}) \text{ pentru orice } n > n_k - k.$$

Cum șirurile  $(T_n)_{n \geq 0}$  și  $(S_{n+k})_{n \geq 0}$  diferă prin constanta  $C = x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}$  pentru  $n \geq n_k - k$ , ele au aceeași natură. Deoarece  $(S_{n+k})_{n \geq 0}$  se obține din  $(S_n)_{n \geq 0}$  prin eliminarea termenilor  $S_0, S_1, \dots, S_{k-1}$  (în număr finit), el are aceeași natură cu  $(S_n)_{n \geq 0}$ .

Cum  $T_n = S_{n+k} - C$ , urmează că dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = +\infty - C = +\infty$ , iar dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = -\infty$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = -\infty - C = -\infty$  (suma seriei nu se modifică).

Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = L \in \mathbb{R}$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = L - C$  (suma seriei se modifică dacă  $C \neq 0$ ). Pentru cazul în care se adaugă un număr finit de termeni se procedează analog. ■

### Comutativitate (Schimbarea ordinii termenilor)

Este cunoscut că o sumă finită are proprietatea de comutativitate, în sensul că valoarea sumei rămâne aceeași după orice schimbare a ordinii termenilor. Cu anumite precauții (schimbarea ordinii va afecta doar un număr finit de termeni), această proprietate rămâne valabilă și pentru serii.

**Teorema 3.2.** *Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie dată. Dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni, atunci seria obținută are aceeași natură cu seria inițială și aceeași sumă.*

**Demonstrație.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  seria obținută prin schimbarea ordinii. Cum această schimbare afectează doar un număr finit de termeni, există  $n_1 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n = y_n$  pentru orice  $n \geq n_1$ . Deoarece

$$x_0 + x_1 + \dots + x_{n_1-1} = y_0 + y_1 + \dots + y_{n_1-1},$$

aceste sume având aceiași termeni, eventual într-o altă ordine, urmează că  $S_n = T_n$  pentru orice  $n \geq n_1$ , de unde  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  au aceeași natură și aceeași sumă. ■

### Proprietăți generale ale seriilor convergente

#### Asociativitate

S-a observat deja că pentru cazul seriei divergente  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  asocierea termenilor cu ajutorul parantezelor conduce la mai multe valori posibile ale sumei sale. Totuși, se poate demonstra că prin gruparea termenilor unei serii convergente cu

ajutorul parantezelor se obține tot o serie convergentă, cu aceeași sumă ca și seria inițială.

**Teorema 3.3.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie convergentă. Asocierea termenilor săi cu ajutorul parantezelor conduce la o serie convergentă, cu aceeași sumă ca și seria inițială.

**Demonstrație.** Se observă că șirul sumelor parțiale corespunzător seriei în care termenii sunt asociați cu ajutorul parantezelor este un subșir al șirului sumelor parțiale al seriei inițiale. Cum acesta din urmă este convergent, urmează concluzia. ■

### Restul de ordin $p$

Dată fiind seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , vom numi *rest de ordin  $p$*  al acesteia seria

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots,$$

obținută din seria inițială prin eliminarea termenilor  $x_0, x_1, \dots, x_p$ , cu indici mai mici sau egali cu  $p$ . Se observă atunci că

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S_p + R_p, \quad \text{pentru orice } p \geq 0,$$

unde  $(S_n)_{n \geq 0}$  este șirul sumelor parțiale asociat seriei date. Din acest motiv, dacă seria dată este convergentă, atunci șirul sumelor parțiale tinde la suma seriei, iar șirul resturilor tinde la 0, conform formulei de mai sus. Mai precis, are loc următorul rezultat.

**Teorema 3.4.** *Seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă dacă și numai dacă  $R_p$ , restul de ordin  $p$ , este o serie convergentă pentru orice  $p \in \mathbb{N}$ . În plus, dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă, atunci  $\lim_{p \rightarrow \infty} R_p = 0$ .*

**Demonstrație.** Cum  $R_p$  se obține din seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  prin eliminarea termenilor  $x_0, x_1, \dots, x_p$ , în număr finit, respectiv  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  se obține din  $R_p$  prin adăugarea ter-

menilor  $x_0, x_1, \dots, x_p$ , prima parte a teoremei se obține în mod imediat din Teorema 3.1. De asemenea, dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă iar  $S$  este suma sa, atunci  $S = S_p + R_p$ , deci  $R_p = S - S_p$ , iar cum  $\lim_{p \rightarrow \infty} S_p = S$ , urmează că  $\lim_{p \rightarrow \infty} R_p = 0$ . ■

### Criteriul de convergență Cauchy

A fost deja demonstrat în Capitolul 2 că un șir este convergent dacă și numai dacă este șir fundamental (Cauchy). De aici, o serie dată este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor sale parțiale este șir Cauchy. Acest lucru se reflectă în următorul rezultat.

**Teorema 3.5.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie dată. Atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| \leq \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \geq 0.$$

**Demonstrație.** Fie  $(S_n)_{n \geq 0}$  șirul sumelor parțiale asociate seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ . Atunci

$$|S_{n+p} - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}|, \quad \text{pentru orice } n, p \geq 0.$$

Cum  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă dacă și numai dacă  $(S_n)_{n \geq 0}$  este șir fundamental, adică dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$|S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \geq 0,$$

rezultă concluzia. ■

### Divergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

A fost demonstrat în Capitolul 2 că șirul

$$(S_n)_{n \geq 1} : x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

nu este șir Cauchy. Cum acesta este șirul sumelor parțiale asociat seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ,

urmează că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă. Seria de mai sus se numește și *seria armonică*, întrucât fiecare termen al seriei este media armonică a termenilor care-l înconjoară, adică  $\frac{1}{n} = \frac{2}{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}}$  pentru orice  $n > 1$ .

**Limita termenului general**

**Teorema 3.6.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie dată. Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă, atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Demonstrație.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie convergentă, cu suma  $l$ . Deoarece

$$x_n = S_n - S_{n-1} \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = l$ , urmează concluzia. ■

Se observă de aici că dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  nu există, sau există și nu este 0, atunci seria dată nu este convergentă. Se obține deci următorul rezultat.

**Corolar 3.6.1.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie dată. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  nu există, sau există și nu este 0, atunci seria dată este divergentă.

**Exercițiu**

Demonstrați că următoarele serii sunt divergente:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n + \frac{1}{n}}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}.$$

**Soluție**

Putem calcula limita termenului general în fiecare dintre aceste cazuri. Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \right]^{\frac{3n + \frac{1}{n}}{2n}} = e^{\frac{3}{2}} \neq 0,$$

seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n + \frac{1}{n}}$  este divergentă. Se observă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(\frac{2}{5} + 1\right)}{5^{n+1} \left(\frac{2}{5} + 1\right)} = \frac{1}{5} \neq 0,$$

deci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}$  este divergentă. De asemenea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} = +\infty \neq 0,$$



deci și seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}$  este divergentă. ■

Se poate observa de asemenea faptul că doar faptul că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  nu este o condiție suficientă pentru convergența seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  (fiind doar necesară). În acest sens, se poate observa că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , dar totuși seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă.

### Mărginirea șirului sumelor parțiale

**Teorema 3.7.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie convergentă. Atunci șirul  $(S_n)_{n \geq 0}$  al sumelor parțiale asociate seriei este mărginit.

**Demonstrație.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie convergentă și fie  $(S_n)_{n \geq 0}$  șirul sumelor parțiale asociate seriei. Cum  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă, urmează că  $(S_n)_{n \geq 0}$  este convergent, iar cum orice șir convergent este mărginit, urmează că  $(S_n)_{n \geq 0}$  este mărginit. ■

Reciproc, dacă șirul sumelor parțiale asociate unei serii date este nemărginit, atunci seria este divergentă. Se obține deci următorul rezultat.

**Corolar 3.7.1.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie dată și fie  $(S_n)_{n \geq 0}$  șirul sumelor parțiale asociate seriei.

Dacă  $(S_n)_{n \geq 0}$  este nemărginit, atunci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.

### Exercițiu

Demonstrați că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  este divergentă.

### Soluție

Are loc estimarea

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}.$$

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ , urmează că  $(S_n)_{n \geq 0}$  este nemărginit, deci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  este divergentă. ■

### Operații cu serii convergente

Întrucât, așa cum s-a menționat anterior, convergența unei serii se definește prin intermediul convergenței șirului sumelor sale parțiale, se va observa că proprietatea unor serii de a fi convergente se păstrează după efectuarea operațiilor uzuale de sumă, diferență și produs cu o constantă.

**Teorema 3.8.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  două serii convergente de numere reale astfel ca  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = B$ . Atunci seria sumă  $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$  și seria produs cu o constantă  $\sum_{n=0}^{\infty} cx_n$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , sunt convergente. În plus, au loc relațiile

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n + y_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n = A + B;$
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} cx_n = c \sum_{n=0}^{\infty} x_n = cA.$

Demonstrația este imediată, utilizând proprietățile operațiilor cu șiruri convergente.

### Serii cu termeni pozitivi, serii cu termeni negativi, serii alternante, serii cu termeni oarecare

Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie dată. Spunem că  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este o *serie cu termeni pozitivi* dacă toți termenii săi de la un indice încolo sunt pozitivi, adică există  $N_1 \in \mathbb{N}$  astfel că  $x_n \geq 0$  pentru orice  $n \geq N_1$ . Similar, spunem că  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este o *serie cu termeni negativi* dacă toți termenii săi de la un indice încolo sunt negativi, adică există  $N_2 \in \mathbb{N}$  astfel că  $x_n \leq 0$  pentru orice  $n \geq N_2$ .

Seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  se va numi *serie cu termeni oarecare* dacă are atât o infinitate de termeni pozitivi, cât și o infinitate de termeni negativi. Un caz particular de serii cu termeni oarecare sunt *seriile alternante*. O serie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  se va numi *alternantă* dacă termenii săi sunt alternativ pozitivi și negativi de la un rang încolo, adică există  $N_3 \in \mathbb{N}$  pentru care  $x_n = (-1)^n a_n$  pentru orice  $n \geq N_3$ , unde  $(a_n)_{n \geq 0}$  este un șir de termeni nenuli cu semn constant. În concluzie, pentru o serie alternantă

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , fie  $x_n = (-1)^n a_n$  pentru orice  $n \geq N_3$ , fie  $x_n = (-1)^{n+1} a_n$  pentru orice  $n \geq N_3$ , unde  $(a_n)_{n \geq 0}$  este un șir cu termeni strict pozitivi.

În cele ce urmează, conform faptului că eliminarea unui număr finit de termeni ai seriei nu modifică natura acesteia, vom presupune acolo unde este necesar că proprietatea de pozitivitate (respectiv negativitate, alternanță) are loc începând cu primul termen al seriei. De asemenea, întrucât înmulțirea cu un număr negativ nu modifică natura unei serii, seriile cu termeni negativi nu vor fi tratate separat, rezultate privind convergența acestora putând fi deduse cu ușurință din rezultatele corespunzătoare privind convergența seriilor cu termeni pozitivi.

### 3.1 Serii cu termeni pozitivi

#### Monotonia șirului sumelor parțiale

Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni pozitivi. Deoarece  $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0$ , urmează că șirul sumelor parțiale  $(S_n)_{n \geq 0}$  este monoton crescător. Acest lucru are consecințe importante asupra convergenței unei serii cu termeni pozitivi, deoarece dacă  $(S_n)_{n \geq 0}$  este monoton, o condiție necesară și suficientă pentru convergența sa este ca el să fie mărginit superior. Obținem deci următorul criteriu de convergență pentru serii cu termeni pozitivi.

**Teorema 3.9.** *Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni pozitivi. Atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă dacă și numai dacă și numai dacă șirul  $(S_n)_{n \geq 0}$  al sumelor parțiale asociate seriei este mărginit superior.*

În plus, dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este o serie cu termeni pozitivi cu  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$ , atunci, deoarece  $(S_n)_{n \geq 0}$  tinde monoton crescător către limita sa  $A$ , urmează că  $S_n \leq A$  pentru orice  $n \geq 0$ .

#### Exemplu

Fie seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Deoarece

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \text{pentru orice } n \geq 2,$$

urmează că

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2, \end{aligned}$$

iar șirul  $(S_n)_{n \geq 1}$  al sumelor parțiale este mărginit superior, deci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  este convergentă.

De asemenea, se poate observa că pentru serii cu termeni pozitivi are loc proprietatea de comutativitate, în care de această dată se pot schimba locurile unui număr infinit de termeni.

**Teorema 3.10.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie convergentă cu termeni pozitivi. Dacă se schimbă ordinea unor termeni din serie (chiar în număr infinit), seria  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  astfel obținută este convergentă și are aceeași sumă.

**Demonstrație.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$ . Fie deasemenea  $(T_n)_{n \geq 0}$  șirul sumelor parțiale asociat seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ . Deoarece  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este obținută prin rearanjarea termenilor seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , corespondența

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad \varphi(i) = \text{indicele lui } y_i \text{ înainte de rearanjare}$$

definește o funcție. Cum

$$T_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n = x_{\varphi(0)} + x_{\varphi(1)} + \dots + x_{\varphi(n)} \leq S_{n_M} \leq A$$

unde

$$n_M = \max(\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)),$$

urmează că  $(T_n)_{n \geq 0}$  este mărginit; fiind și monoton crescător, el este convergent.

De aici,  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este convergentă. Deoarece  $T_n \leq A$  pentru orice  $n \geq 0$ , urmează

$$\text{că } \sum_{n=0}^{\infty} y_n \leq A = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Refăcând raționamentul în sens invers (privind  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  ca o rearanjare a  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ ) obținem că  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ , de unde  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ . ■

### 3.1.1 Criteriul de condensare

Un criteriu util pentru stabilirea, între altele, a convergenței așa-numitei serii armonice generalizate, care va fi folosită ca termen de comparație pentru alte serii, este următorul rezultat, numit *criteriul de condensare*.

**Teorema 3.11.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir monoton descrescător cu termeni pozitivi. Atunci seriile  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$  au aceeași natură.

**Demonstrație.** Vom demonstra că  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă dacă și numai dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$  este convergentă, restul teoremei obținându-se prin aplicarea operatorului de negație logică acestei afirmații. În acest scop, fie

$$S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n; \quad T_n = x_1 + 2x_2 + \dots + 2^n x_{2^n}$$

șirurile sumelor parțiale asociate celor două serii; se observă că ambele serii sunt cu termeni pozitivi.

Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă, se observă că

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= x_0 + x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \dots \\ &\quad + (x_{2^{k+1}} + x_{2^{k+2}} + \dots + x_{2^{k+1}}) + \dots + (x_{2^{n-1}+1} + x_{2^{n-1}+2} + \dots + x_{2^n}) \\ &\geq x_0 + x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_8 + \dots + 2^k x_{2^{k+1}} + \dots + 2^{n-1} x_{2^n}, \end{aligned}$$

întrucât  $(x_n)_{n \geq 0}$  este monoton descrescător. De aici,

$$S_{2^n} \geq x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}T_n,$$

iar cum  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă și cu termeni pozitivi, urmează că  $S_{2^n} \leq S$ , unde  $S$  este suma seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ . Se obține că  $(T_n)_{n \geq 0}$  este mărginit superior, deci  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$  este convergentă.

Presupunem acum că  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$  este convergentă și fie  $n \in \mathbb{N}$  oarecare. Există atunci un unic  $m \in \mathbb{N}$  astfel că  $2^m \leq n < 2^{m+1}$  (deci  $2^m$  este ultima putere a lui 2 mai mică sau egală cu  $n$ ). Se observă că

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \dots + x_n \\ &\leq x_0 + x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \dots \\ &\quad + (x_{2^k} + x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}-1}) + \dots + (x_{2^m} + x_{2^m+1} + \dots + x_{2^{m+1}-1}) \\ &\leq x_0 + x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \dots + 2^k x_{2^k} + \dots + 2^m x_{2^m}, \end{aligned}$$

întrucât  $(x_n)_{n \geq 0}$  este monoton descrescător. De aici,

$$S_n \leq x_0 + T_n,$$

iar cum  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$  este convergentă și cu termeni pozitivi, urmează că  $T_n \leq T$ , unde  $T$  este suma seriei  $2^n x_{2^n}$ . Se obține că  $(S_n)_{n \geq 0}$  este mărginit superior, deci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă. ■

### Exercițiu

Studiați convergența seriei  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ .

### Soluție

Deoarece  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \left(\frac{1}{n \ln n}\right)_{n \geq 2}$  este un șir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează conform criteriului de condensare că  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  și  $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$  au aceeași natură. Cum  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$  este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că și  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  este divergentă. ■

**Convergența seriei**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Dacă  $p < 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$ , iar seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  este divergentă, întrucât termenul său general nu tinde la 0. Similar, pentru  $p = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ ,

deci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  este de asemenea divergentă.

Fie acum  $p > 0$ . Conform criteriului de condensare, seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$  au aceeași natură. Cum

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^n,$$

iar  $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$  pentru  $p \in (0, 1]$ , respectiv  $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$  pentru  $p > 1$ , urmează că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  este divergentă pentru  $p \in (0, 1]$ , respectiv convergentă pentru  $p > 1$ .

Discuția de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ este } \begin{cases} \text{divergentă,} & \text{dacă } p \leq 1 \\ \text{convergentă,} & \text{dacă } p > 1 \end{cases}.$$

Reprezentând o formă mai generală a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  se mai numește și *seria armonică generalizată*.

### 3.1.2 Criterii de comparație

În cele ce urmează vom prezenta un set de criterii care permit analiza convergenței sau divergenței unei serii cu termeni pozitivi date prin stabilirea unei relații între termenii seriei și termenii unei alte serii a cărei natură este cunoscută (deseori cu seria armonică generalizată). Revenind la faptul că, pentru serii cu termeni pozitivi, convergența acestora este echivalentă cu nemărginirea șirului sumelor parțiale, interpretarea următorului rezultat este imediată: o serie ai cărei termeni sunt mai mari decât termenii unei serii „nemărginite” (i.e., divergente) date este de asemenea „nemărginită” (i.e., divergentă), în vreme ce o serie ai cărei termeni sunt mai mici decât termenii unei serii „mărginite” (i.e., convergente) date este de asemenea „mărginită” (i.e., convergentă).

**Teorema 3.12.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  două serii cu termeni pozitivi. Dacă există  $N \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$x_n \leq y_n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este convergentă, atunci și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.
2. Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă, atunci și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este divergentă.

**Demonstrație.** Fie  $(S_n)_{n \geq 0}$  șirul sumelor parțiale ale seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , respectiv  $(T_n)_{n \geq 0}$  șirul sumelor parțiale ale seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ . Cum

$$x_n \leq y_n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

urmează că

$$x_N + x_{N+1} + \dots + x_n \leq y_N + y_{N+1} + \dots + y_n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

deci

$$S_n - (x_0 + x_1 + \dots + x_{N-1}) \leq T_n - (y_0 + y_1 + \dots + y_{N-1}) \quad \text{pentru orice } n \geq N. \quad (3.1)$$

1. Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este convergentă, atunci  $(T_n)_{n \geq 0}$  este mărginit superior. Conform (3.1),  $(S_n)_{n \geq 0}$  este de asemenea mărginit superior. Cum  $(S_n)_{n \geq 0}$  este crescător, urmează că el este convergent, deci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.

2. Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă, atunci  $(S_n)_{n \geq 0}$  este nemărginit superior. Conform (3.1),  $(T_n)_{n \geq 0}$  este de asemenea nemărginit superior, deci  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este divergentă. ■

Date fiind  $c \in (0, \infty)$  și o serie cu termeni pozitivi  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ , se observă că seriile  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$  au aceeași natură. În aceste condiții, se poate obține ușor următorul corolar al teoremei de mai sus, numit *criteriul de comparație cu inegalități*.



**Corolar 3.12.1.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  două serii cu termeni pozitivi și fie  $c \in (0, \infty)$ . Dacă există  $N \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$x_n \leq cy_n \text{ pentru orice } n \geq N, \quad (3.2)$$

atunci au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este convergentă, atunci și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.
2. Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă, atunci și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este divergentă.

### Exercițiu

Studiați convergența următoarelor serii:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}.$$

### Soluție

1) Deoarece  $\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$  iar seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  este convergentă, urmează că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$  este de asemenea convergentă.

2) Deoarece  $\frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}$ , iar seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  este convergentă, urmează că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$  este de asemenea convergentă.

3) Deoarece  $\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^4}} = \frac{1}{n+1}$ , iar seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  este divergentă (este același lucru cu seria divergentă  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ), urmează că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}$  este divergentă.

4) Deoarece  $n \leq 2^n$  pentru orice  $n \geq 2$ , urmează că  $\sqrt[n]{n} \leq 2$  pentru orice  $n \geq 2$ , deci  $\frac{1}{n^{\sqrt{n}}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$  pentru orice  $n \geq 2$ . Cum seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă, urmează că și seria  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$  este divergentă. ■

Informații despre îndeplinirea relației (3.2), necesară pentru utilizarea criteriului de comparație, se pot obține studiind comportarea raportului  $\frac{x_n}{y_n}$ .

În acest sens, să presupunem că  $y_n > 0$  pentru orice  $n \geq 0$ . Conform Teoremei 2.36, dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L < \infty$ , iar  $\varepsilon > 0$ , atunci există un rang  $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$  astfel că  $\frac{x_n}{y_n} < L + \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon^1$ . Se obține că

$$x_n < (L + \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1.$$

Similar, dacă  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l > 0$ , iar  $\varepsilon \in (0, l)$ , atunci există un rang  $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$  astfel că  $\frac{x_n}{y_n} > l - \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon^2$ . De aici,

$$x_n > (l - \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

Putem atunci obține următorul rezultat, numit *criteriul de comparație cu limite extreme*.

**Corolar 3.12.2.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni pozitivi și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  o serie cu termeni strict pozitivi.

1. Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L < \infty$ , iar  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este convergentă, atunci și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.
2. Dacă  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l > 0$ , iar  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este divergentă, atunci și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.

**Demonstrație.** 1) Concluzia se obține deoarece  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este convergentă și există un rang  $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$x_n < (L + \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1.$$

2) Concluzia se obține deoarece  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este divergentă și există un rang  $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$x_n > (l - \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

■

În situația în care există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , există și  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ . În plus, au loc egalitățile

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită și *criteriul de comparație cu limită*.

**Corolar 3.12.3.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni pozitivi și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ . Au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă  $l < \infty$ , iar  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este convergentă, atunci și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.
2. Dacă  $l > 0$ , iar  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este divergentă, atunci și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.
3. Dacă  $l \in (0, \infty)$ , atunci seriile  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  au aceeași natură.

În multe situații, un bun termen de comparație este seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ,  $\frac{1}{n^p}$  precizând comportarea „aproximativă” a termenului general al seriei de studiat. De exemplu, în studiul convergenței seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 2n + 1}$  este utilă comparația cu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ , întrucât  $\frac{1}{n^3 - 2n + 1}$  are comportarea „aproximativă” a lui  $\frac{1}{n^3}$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , iar în studiul convergenței seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 \sqrt{n} - n + 1}$  este utilă comparația cu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n}}$ , întrucât  $\frac{n}{n^2 \sqrt{n} - n + 1}$  are comportarea „aproximativă” a lui  $\frac{n}{n^2 \sqrt{n}} = \frac{1}{n \sqrt{n}}$ .

### Exemplu

Studiați convergența seriilor:

- 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}$ ; 2)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2 + 6n + 11}$ ; 3)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$ ;
- 4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$ .

**Soluție**

1) Vom compara seria dată cu seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ . Se obține că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  au aceeași natură. Cum cea din urmă este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu  $p = \frac{3}{2} > 1$ , urmează că și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$  este convergentă.

2) Vom compara seria dată cu seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Se obține că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{n^2+6n+11}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{n^2+6n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  au aceeași natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind o serie armonică, urmează că și  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$  este divergentă.

3) Vom compara seria dată cu seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ . Se obține că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  au aceeași natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că și  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$  este divergentă.

4) Este deja cunoscut că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = c \in (0, 1)$ . De aici,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n}{\ln n} = 0,$$

iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n}{\ln n}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$  și  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  au aceeași natură. Deoarece  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$  este un șir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează conform criteriului de condensare că  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  și  $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{\ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{n \ln 2}$  au aceeași natură. Deoarece  $n \leq 2^n$  pentru orice  $n \geq 2$ , urmează că  $2^n \frac{1}{n \ln 2} \geq \frac{1}{\ln 2}$ , deci termenul general al seriei  $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{n \ln 2}$  nu tinde la 0, aceasta fiind în concluzie divergentă. Urmează că și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$  este divergentă. ■

Vom preciza în cele ce urmează un alt criteriu, numit și *criteriul de comparație cu rapoarte*, prin care convergența sau divergența unei serii se poate stabili prin intermediul comparației cu o serie a cărei natură este cunoscută, ce poate fi dedus cu ajutorul Corolarului 3.12.1.

**Teorema 3.13.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  două serii cu termeni strict pozitivi. Dacă există  $N \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n} \quad \text{pentru orice } n \geq N, \quad (3.3)$$

atunci au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este convergentă, atunci și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.
2. Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă, atunci și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este divergentă.

**Demonstrație.** Cu ajutorul (3.3) se deduce că

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

de unde

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{x_N}{y_N} \quad \text{pentru orice } n \geq N.$$

Cu notația  $\frac{x_N}{y_N} = c$ , urmează că

$$\frac{x_n}{y_n} \leq c \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

de unde concluzia urmează conform Corolarului 3.12.1. ■

### 3.1.3 Criterii ale radicalului

Un dezavantaj al criteriilor de comparație este că utilizarea acestora necesită construcția unor serii ajutătoare, alegerea acestora din urmă nefiind totdeauna imediată. Următorul criteriu, numit și *criteriul radicalului cu inegalități*, este utilizat îndeosebi pentru studierea convergenței unor serii pentru care termenul general conține puterea de ordin  $n$  a unui alt șir și nu necesită construcția unei serii ajutătoare.

**Teorema 3.14.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți.

1. Dacă există  $q < 1$  și  $N \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.

2. Dacă

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru o infinitate de valori ale lui } n,$$

atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.

**Demonstrație.** 1. Dacă

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

urmează că

$$x_n \leq q^n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

iar cum  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  este convergentă se obține că și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.

2. Deoarece

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru o infinitate de valori ale lui } n,$$

se obține că  $x_n \geq 1$  pentru o infinitate de valori ale lui  $n$ , deci șirul termenilor generali  $(x_n)_{n \geq 0}$  nu este convergent la 0, iar seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă. ■

Se poate obține atunci următorul criteriu al radicalului cu limite extreme.

**Teorema 3.15.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți.

1. Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.
2. Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.
3. Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$ , atunci natura seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  nu poate fi precizată a priori cu ajutorul criteriului radicalului cu limite extreme (spunem că este un caz de dubiu).

**Demonstrație.** 1. Conform Teoremei 2.36, dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = L < 1$ , iar  $0 < \varepsilon < 1 - L$ , atunci există un rang  $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$  astfel că  $\sqrt[n]{x_n} < L + \varepsilon < 1$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon^1$ , deci  $x_n < (L + \varepsilon)^n$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon^1$ . Cum seria  $\sum_{n=0}^{\infty} (L + \varepsilon)^n$  este convergentă, urmează că și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.

2. Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = L > 1$ , cum  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$  este un punct limită al șirului  $(\sqrt[n]{x_n})_{n \geq 0}$ , urmează că există un subșir  $(\sqrt[k_n]{x_{k_n}})_{k_n \geq 0}$  astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[k_n]{x_{k_n}})_{k_n \geq 0} = L > 1$ .

Dacă  $L < \infty$ , fie  $0 < \varepsilon < L - 1$ . Atunci există un rang  $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $\sqrt[k_n]{x_{k_n}} > L - \varepsilon > 1$  pentru  $n \geq n_\varepsilon^2$ . De aici,  $x_{k_n} \geq 1$  pentru  $n \geq n_\varepsilon^2$ , deci  $(x_n)_{n \geq 0}$  nu este convergent la 0, iar seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.

Dacă  $L = \infty$ , există un rang  $n_\varepsilon^3 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $\sqrt[k_n]{x_{k_n}} > 1$  pentru  $n \geq n_\varepsilon^3$ , obținându-se în mod similar că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.

3. Este suficient să se considere seriile  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Pentru ambele,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1 (= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n})$ , prima fiind divergentă, iar cea de-a doua convergentă. ■

În situația în care există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , există și  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ , iar

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$

Teorema de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită și *criteriul radicalului cu limită*.

**Corolar 3.15.1.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni pozitivi astfel încât există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ . Au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă  $l < 1$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.
2. Dacă  $l > 1$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.
3. Dacă  $l = 1$ , atunci natura seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  nu poate fi precizată a priori cu ajutorul criteriului radicalului cu limită.

### Exercițiu

Studiați convergența seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$ .

### Soluție

1) Termenul general al seriei este  $x_n = \left( \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$ . Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( 3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} \\ &= \frac{3}{2} > 1 \end{aligned}$$

deci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$  este divergentă. ■



**Exercițiu**

Discutați natura seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an+1}{n+2}\right)^n$ , unde  $a > 0$ .

**Soluție**

Termenul general al seriei este  $x_n = \left(\frac{an+1}{n+2}\right)^n$ . Urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{an+1}{n+2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(a + \frac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = a.$$

De aici,  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an+1}{n+2}\right)^n$  este convergentă dacă  $a \in (0, 1)$ , respectiv divergentă dacă  $a > 1$ .

Dacă  $a = 1$ , urmează că  $x_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ , deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\right]^{-\frac{n}{n+2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Urmează că  $(x_n)_{n \geq 0}$  nu este convergent la 0, iar  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$  este divergentă. ■

**3.1.4 Criterii ale raportului**

Un alt criteriu util pentru studiul convergenței unor serii cu termeni pozitivi, în special a acelor pentru care termenul general conține produse, este *criteriul raportului cu inegalități*, indicat mai jos. De asemenea, acesta nu necesită construcția unei serii ajutătoare.

**Teorema 3.16.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți.

1. Dacă există  $q < 1$  și  $N \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.

2. Dacă există  $N \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.

**Demonstrație.** 1. Deoarece

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

urmează că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

iar deoarece  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  este convergentă, se obține cu ajutorul Teoremei 3.13 (criteriul

de comparație cu rapoarte) că și seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.

2. Se observă că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1^{n+1}}{1^n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

iar cum seria  $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$  este divergentă, se obține cu ajutorul Teoremei 3.13 (criteriul

de comparație cu rapoarte) că și seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă. ■

Se poate obține atunci următorul criteriu al raportului cu limite extreme.

**Teorema 3.17.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți.

1. Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.

2. Dacă  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.

3. Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ , atunci natura seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  nu poate fi precizată a priori cu ajutorul criteriului raportului cu limite extreme.

**Demonstrație.** 1. Conform Teoremei 2.36, dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1$ , iar  $0 < \varepsilon < 1 - L$ , atunci există un rang  $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$  astfel că  $\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon < 1$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon^1$ , deci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.

2. Similar, dacă  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l > 1$ , iar  $0 < \varepsilon < l - 1$ , atunci există un rang  $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$  astfel că  $\frac{x_{n+1}}{x_n} > l - \varepsilon > 1$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon^2$ , deci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.

3. Este suficient să se considere seriile  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Pentru ambele,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ , prima fiind divergentă, iar cea de-a doua convergentă. ■

În situația în care există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , există și  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ . În plus, au loc egalitățile

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită și *criteriul raportului cu limită*.

**Corolar 3.17.1.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ . Au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă  $l < 1$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.

2. Dacă  $l > 1$ , atunci și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.

3. Dacă  $l = 1$ , atunci natura seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  nu poate fi precizată a priori cu ajutorul criteriului raportului cu limită.

**Exercițiu**

Studiați convergența seriilor

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$$

**Soluție**

1) Termenul general al seriei este  $x_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ . Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{2}{e} < 1, \end{aligned}$$

deci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$  este convergentă.

2) Termenul general al seriei este  $x_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$ . Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)(3n+5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)(2n+3)}}{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)(3n+5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{2n+3} = \frac{3}{2} > 1, \end{aligned}$$

deci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$  este divergentă. ■

În ceea ce privește relația între domeniile de aplicabilitate ale criteriilor raportului și radicalului, să notăm că dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este un șir cu termeni strict pozitivi atunci, așa cum reiese din Teorema 2.40, are loc inegalitatea

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Se observă de aici că dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$  atunci și  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$ , iar dacă  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ , atunci și  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$ . De aici, dacă sunt îndeplinite condițiile pentru aplicarea criteriului raportului cu limite extreme, atunci sunt îndeplin-

ite și condițiile pentru aplicarea criteriului radicalului cu limite extreme, obținându-se același rezultat. De asemenea, dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$  există, atunci și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$  există și are aceeași valoare, deci dacă sunt îndeplinite condițiile pentru aplicarea criteriului raportului cu limită, atunci sunt îndeplinite și condițiile pentru aplicarea criteriului radicalului cu limită, obținându-se același rezultat.

În plus, există situații în care criteriile raportului nu sunt aplicabile, fiind aplicabile în schimb criterii ale radicalului. Un exemplu în acest sens este seria cu termeni pozitivi  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n}$ . Deoarece termenul general este  $x_n = \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$ , urmează că  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n} \cdot \frac{1}{2}$ , de unde

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3}{2} > 1; \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{6} < 1,$$

deci criteriul raportului cu limite extreme nu este aplicabil. Totuși,  $\frac{1}{2^n} \leq x_n \leq \frac{3}{2^n}$ , de unde  $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \frac{\sqrt[n]{3}}{2}$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{2} < 1$ , conform criteriului cleștelui. De aici, criteriul radicalului cu limită (și de fapt și cel cu limite extreme) este aplicabil, iar seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n}$  este convergentă. Se poate deci concluziona faptul că sus-menționatele criterii ale radicalului au o arie de aplicabilitate mai largă decât criteriile corespunzătoare ale raportului.

### 3.1.5 Criteriul Raabe-Duhamel

Diversele variante ale criteriului Raabe-Duhamel, menționate în cele ce urmează, sunt în general utilizate atunci când aplicarea criteriului raportului conduce la un caz de dubiu. Vom prezenta mai întâi *criteriul Raabe-Duhamel cu inegalități*; a se remarca faptul că utilizarea raportului inversat ( $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ , în contrast cu raportul  $\frac{x_{n+1}}{x_n}$  utilizat în cadrul criteriului raportului) conduce la obținerea unor situații inverse de convergență față de cele obținute în criteriul raportului, respectiv „ $\geq q > 1$ ” pentru convergență (în loc de „ $\leq q < 1$ ” pentru criteriul raportului) și „ $\leq 1$ ” pentru divergență (în loc de „ $\geq 1$ ” pentru criteriul raportului).

**Teorema 3.18.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți.

1. Dacă există  $q > 1$  și  $N \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \geq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.

2. Dacă există  $N \in \mathbb{N}$  astfel ca

$$n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.

**Demonstrație.** 1. Deoarece

$$n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \geq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

urmează că

$$nx_n - (n+1)x_{n+1} \geq (q-1)x_{n+1} \quad \text{pentru orice } n \geq N.$$

Punând succesiv  $n = N, n = N+1, \dots, n = k-1$  și sumând inegalitățile obținute deducem că

$$Nx_N - kx_k \leq (q-1)(x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_k) \quad \text{pentru orice } k \geq N+1,$$

de unde

$$x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_k \leq \frac{1}{q-1} Nx_N$$

și deci

$$S_k \leq \frac{1}{q-1} Nx_N + (x_0 + x_1 + \dots + x_N) \quad \text{pentru orice } k \geq N+1,$$

iar șirul sumelor parțiale  $(S_n)_{n \geq 0}$  este mărginit superior. Urmează de aici că

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.

2. Deoarece

$$n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

se obține că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \quad \text{pentru orice } n \geq N.$$

Cum seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă, urmează conform criteriului de comparație cu rapoarte că și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă. ■

Se poate obține atunci următorul criteriu Raabe-Duhamel cu limite extreme.

**Teorema 3.19.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți.

1. Dacă  $\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) > 1$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.
2. Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) < 1$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.
3. Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$ , atunci natura seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  nu poate fi precizată a priori cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limite extreme.

**Demonstrație.** 1. Conform Teoremei 2.36, dacă  $\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l > 1$ , iar  $0 < \varepsilon < l - 1$ , atunci există un rang  $n_{\varepsilon}^1 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) > l - \varepsilon > 1$  pentru orice  $n \geq n_{\varepsilon}^1$ , deci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.

2. Similar, dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = L < 1$ , iar  $0 < \varepsilon < 1 - L$ , atunci există un rang  $n_{\varepsilon}^2 \in \mathbb{N}$  astfel ca  $n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) < L + \varepsilon < 1$  pentru orice  $n \geq n_{\varepsilon}^2$ , deci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă. ■

În situația în care există  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , există și  $\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$ ,

$\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$ . În plus, au loc egalitățile

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită și *criteriul Raabe-Duhamel cu limită*.

**Corolar 3.19.1.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ . Au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă  $l > 1$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă.
2. Dacă  $l < 1$ , atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este divergentă.
3. Dacă  $l = 1$ , atunci natura seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  nu poate fi precizată a priori cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limită.

### Exercițiu

Demonstrați că seria armonică generalizată  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  este convergentă pentru  $p > 1$ , respectiv divergentă pentru  $p < 1$ .

### Soluție

Termenul general al seriei este  $x_n = \frac{1}{n^p}$ . Urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = p.$$

Concluzia urmează atunci conform criteriului Raabe-Duhamel cu limită. ■

### Exercițiu

Studiați convergența seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$ .



**Soluție**

Termenul general al seriei este  $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$ , de unde

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2}. \end{aligned}$$

Urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ , deci aplicarea criteriului raportului conduce la un caz de dubiu. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria dată este divergentă. ■

**3.2 Serii cu termeni oarecare**

Comparativ cu situația seriilor cu termenilor pozitivi, pentru care studiul convergenței se reduce la studiul mărginirii șirului sumelor parțiale, deoarece monotonia acestuia este asigurată *a priori*, situația seriilor cu termeni oarecare este mult mai complicată, întrucât această cale de abordare se pierde, șirul sumelor parțiale nemaifiind monoton. În concluzie, nici criteriile de convergență obținute anterior (criteriile de comparație, ale raportului și radicalului, ș. a. m. d.) nu mai sunt valabile.

Principala strategie de demonstrare a convergenței seriilor cu termeni oarecare va fi acum scrierea termenului general ca un produs de doi factori, construirea seriei care are ca termen general unul din factori și a șirului care are ca termen general pe cel de-al doilea factor și determinarea unor proprietăți de convergență, monotonie și mărginire pentru acestea care vor conduce la convergența seriei inițiale. În situația în care seria care are ca termen general modulul termenului general al seriei inițiale este convergentă, convergența seriei inițiale se va obține din convergența acesteia din urmă; desigur, convergența celei de-a doua serii este mult mai simplu de obținut, fiind vorba despre o serie cu termeni pozitivi. În fine,

pentru cazul particular al seriilor alternante, convergența acestora se poate obține demonstrând monotonia șirului obținut prin eliminarea factorului alternant.

### 3.2.1 Criteriul lui Dirichlet

În situația în care  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este o serie nu neapărat convergentă, dar cu șirul sumelor parțiale mărginit, înmulțirea termenului general  $x_n$  cu termenul general  $y_n$  al unui șir cu valori „mici” (monoton descrescător și convergent la 0) „îmbunătățește” convergența seriei, în sensul că seria rezultat  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$  este convergentă. Are loc atunci următorul rezultat, numit *criteriul lui Dirichlet*.

**Teorema 3.20.** *Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este o serie cu șirul sumelor parțiale mărginit, iar  $(y_n)_{n \geq 0}$  este un șir monoton descrescător și convergent la 0, atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$  este convergentă.*

**Demonstrație.** Vom demonstra că șirul  $(T_n)_{n \geq 0}$  al sumelor parțiale asociat seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$  este convergent, fiind șir Cauchy. În acest scop, să notăm cu  $(S_n)_{n \geq 0}$  șirul sumelor parțiale asociat seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ; cum  $(S_n)_{n \geq 0}$  este mărginit, urmează că există  $M \geq 0$  astfel ca  $|S_n| \leq M$  pentru orice  $n \geq 0$ . Să observăm că  $x_k = S_k - S_{k-1}$  pentru  $k \geq 1$ . Obținem de aici că

$$\begin{aligned} |T_{n+p} - T_n| &= |x_{n+1}y_{n+1} + x_{n+2}y_{n+2} + \dots + x_{n+p}y_{n+p}| \\ &= |(S_{n+1} - S_n)y_{n+1} + (S_{n+2} - S_{n+1})y_{n+2} + \dots \\ &\quad + (S_{n+p} - S_{n+p-1})y_{n+p}| \\ &= |S_{n+1}(y_{n+1} - y_{n+2}) + S_{n+2}(y_{n+2} - y_{n+3}) + \dots \\ &\quad + S_{n+p-1}(y_{n+p-1} - y_{n+p}) + S_{n+p}y_{n+p} - S_n y_{n+1}| \\ &\leq |S_{n+1}(y_{n+1} - y_{n+2})| + |S_{n+2}(y_{n+2} - y_{n+3})| + \dots \\ &\quad + |S_{n+p-1}(y_{n+p-1} - y_{n+p})| + |S_{n+p}y_{n+p}| + |S_n y_{n+1}|. \end{aligned}$$

Deoarece  $(y_n)_{n \geq 0}$  este un șir monoton descrescător, urmează că  $y_{n+1} - y_{n+2} \geq 0$ ,

$y_{n+2} - y_{n+3} \geq 0, \dots, y_{n+p-1} - y_{n+p} \geq 0$ . De aici,

$$\begin{aligned} |T_{n+p} - T_n| &\leq |S_{n+1}|(y_{n+1} - y_{n+2}) + |S_{n+2}|(y_{n+2} - y_{n+3}) + \dots \\ &\quad + |S_{n+p-1}|(y_{n+p-1} - y_{n+p}) + |S_{n+p}||y_{n+p}| + |S_n||y_{n+1}| \\ &\leq M(y_{n+1} - y_{n+2}) + M(y_{n+2} - y_{n+3}) + \dots \\ &\quad + M(y_{n+p-1} - y_{n+p}) + My_{n+p} + My_{n+1} \\ &= 2My_{n+1}. \end{aligned}$$

Fie  $\varepsilon > 0$ . Cum  $(y_n)_{n \geq 0}$  este șir convergent la 0, urmează că există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ . Atunci

$$|T_{n+p} - T_n| \leq 2My_{n+1} \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N},$$

de unde  $(T_n)_{n \geq 0}$  este șir Cauchy, deci și convergent. Cum șirul sumelor sale parțiale  $(T_n)_{n \geq 0}$  este convergent, seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$  este convergentă. ■

### Exercițiu

Demonstrați că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  este convergentă, unde  $x \in \mathbb{R}$ .

### Soluție

Mai întâi, fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Fie  $(S_n)_{n \geq 1}$  șirul sumelor parțiale asociat seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ,

$$S_n = \sin 0x + \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

Să observăm că

$$|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{2}{2|\sin \frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|},$$

dacă  $\sin \frac{x}{2} \neq 0$  (adică  $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ), respectiv

$$|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| = |0 + 0 + \dots + 0| = 0,$$

dacă  $\sin \frac{x}{2} = 0$  (adică  $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ), deci în orice caz  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  are șirul sumelor

parțiale mărginit. Cum  $(y_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$  este monoton descrescător și convergent la 0, urmează concluzia. ■

### 3.2.2 Criteriul lui Abel

Dacă se pornește de această dată de la o serie convergentă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , înmulțirea termenului general  $x_n$  cu termenul general  $y_n$  al unui șir cu proprietăți suficient de bune (i.e. monoton și mărginit) păstrează convergența seriei, în sensul că seria rezultat  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$  este de asemenea convergentă. Are loc atunci următorul rezultat, numit *criteriul lui Abel*.

**Teorema 3.21.** *Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este o serie convergentă, iar  $(y_n)_{n \geq 0}$  este un șir monoton și mărginit, atunci  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$  este convergentă.*

**Demonstrație.** Deoarece  $(y_n)_{n \geq 0}$  este un șir monoton și mărginit, el este convergent; fie  $y \in \mathbb{R}$  limita acestuia. Observăm că

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n (y_n - y + y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n (y_n - y) + x_n y).$$

Vom arăta că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$  este convergentă, fiind suma seriilor convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n (y_n - y)$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y$ ; pentru a demonstra convergența primei serii se va aplica criteriul lui Dirichlet.

Dacă  $(y_n)_{n \geq 0}$  este monoton descrescător, atunci  $(y_n - y)_{n \geq 0}$  este monoton descrescător și convergent la 0, iar seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  are șirul sumelor parțiale mărginit, fiind convergentă. Urmează că  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n (y_n - y)$  este convergentă, conform criteriului lui Dirichlet.

Dacă  $(y_n)_{n \geq 0}$  este monoton crescător, atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n (y_n - y) = \sum_{n=0}^{\infty} -x_n (y - y_n).$$

Cum  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n (y - y_n)$  este convergentă, conform criteriului lui Dirichlet, urmează

că și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(y_n - y)$ , obținută din cea dintâi prin produsul cu constanta  $-1$ , este convergentă.

De asemenea, seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y$  este convergentă, fiind obținută prin produsul dintre seria convergentă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și constanta  $y$ . De aici, seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$  este convergentă, fiind suma seriilor convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(y_n - y)$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y$ . ■

### Exercițiu

Demonstrați că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n}$  este convergentă.

### Soluție

Observăm mai întâi că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos(\frac{1}{n}).$$

A fost deja demonstrat că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  este convergentă, unde  $x \in \mathbb{R}$ , deci, pentru  $x = 1$ , urmează că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$  este convergentă. Cum șirul  $(y_n)_{n \geq 1}$ :  $y_n = \frac{1}{n}$  este monoton descrescător și convergent la 0, luând valori între 0 și 1, iar funcția cosinus este descrescătoare pe intervalul  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , urmează că  $(y_n)_{n \geq 1}$  este monoton crescător. În plus,  $(y_n)_{n \geq 1}$  este mărginit, deoarece funcția cosinus este mărginită. Urmează că seria din enunț este convergentă, conform criteriului lui Abel. ■

### 3.2.3 Serii alternante. Criteriul Leibniz

Pentru cazul particular al seriilor alternante, se poate observa cu ajutorul criteriului lui Dirichlet că pornindu-se de la seria  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ , cu șirul sumelor parțiale mărginit, prin înmulțirea termenului general  $(-1)^n$  cu termenul general  $y_n$  al unui șir cu valori monoton descrescător și convergent la 0 se obține o serie convergentă. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *criteriul lui Leibniz*.

**Teorema 3.22.** Dacă  $(y_n)_{n \geq 0}$  este un șir monoton descrescător și convergent la 0, atunci

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$  este convergentă.

**Demonstrație.** Fie  $(S_n)_{n \geq 0}$  șirul sumelor parțiale asociat seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ . Deoarece  $S_{2k} = 1$ ,  $S_{2k+1} = 0$  pentru orice  $k \in \mathbb{N}$ , urmează că  $(S_n)_{n \geq 0}$  este mărginit. Aplicând criteriul lui Dirichlet, urmează că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$  este convergentă. ■

### Exercițiu

Demonstrați că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$  este convergentă.

### Soluție

Se observă că

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Deoarece  $(y_n)_{n \geq 0}$ :  $y_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$  este monoton descrescător și convergent la 0, urmează

că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$  este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Atunci

și seria  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$  este convergentă, fiind obținută prin înmulțirea seriei

convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$  cu constanta  $-1$ . ■

### Monotonia unor subșiruri ale șirului sumelor parțiale

Să presupunem acum că  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$  este o serie alternantă, în condițiile de aplicare ale criteriului lui Leibniz, adică  $(y_n)_{n \geq 0}$  este un șir monoton descrescător și convergent la 0. Fie deasemenea  $(S_n)_{n \geq 0}$  șirul sumelor parțiale asociat seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ . Se observă atunci că  $(S_{2k})_{k \geq 0}$  este monoton descrescător iar  $(S_{2k+1})_{k \geq 0}$  este monoton crescător. În plus, are loc relația

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n \leq S_{2k} \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

Într-adevăr,

$$S_{2(k+1)} - S_{2k} = (-1)^{2k+1}a_{2k+1} + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0$$

deci  $(S_{2k})_{k \geq 0}$  este monoton descrescător. Similar,

$$S_{2(k+1)+1} - S_{2k+1} = (-1)^{2k+2}a_{2k+2} + (-1)^{2k+3}a_{2k+3} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0,$$

deci  $(S_{2k+1})_{k \geq 0}$  este monoton crescător. Deoarece orice termen al unui șir crescător este mai mic sau egal cu limita șirului, respectiv orice termen al unui șir descrescător este mai mare sau egal cu limita șirului, urmează că

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n \leq S_{2k} \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

### 3.2.4 Serii absolut convergente

Cu ajutorul criteriului lui Leibniz, se poate observă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  este convergentă. Totuși, seria asociată a modulelor,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă.

În același timp, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  este convergentă, iar seria asociată a modulelor,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  este de asemenea convergentă.

Aceste exemple sugerează o posibilă clasificare a seriilor convergente în serii pentru care seria asociată a modulelor este convergentă, respectiv divergentă. În acest sens, o serie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  pentru care  $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$  este convergentă se va numi *absolut convergentă*, în vreme ce o serie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  pentru care  $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$  este divergentă se va numi *condiționat convergentă* sau *semiconvergentă*. Din cele de mai sus, se observă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  este absolut convergentă, în vreme ce seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  nu este convergentă (este condiționat convergentă, sau semiconvergentă).

Se observă de asemenea că pentru serii cu termeni pozitivi noțiunile de convergență și absolută convergență coincid, deoarece modulul unui număr pozitiv este chiar numărul în cauză. În general, pentru serii cu termeni oarecare, convergența nu implică absolută convergență, după cum se poate deduce din exemplul

seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  de mai sus. Totuși, are loc implicația inversă, în sensul că orice serie absolut convergentă este convergentă.

**Teorema 3.23.** *Dacă o serie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este absolut convergentă, atunci ea este și convergentă.*

**Demonstrație.** Cum seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este absolut convergentă, urmează că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$  este convergentă. Fie  $\varepsilon > 0$ . Conform criteriului Cauchy, există un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$||x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}|| \leq \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \geq 0.$$

Cum

$$||x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}|| = |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}|,$$

iar

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}|,$$

urmează că

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| \leq \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \geq 0,$$

deci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă, conform criteriului Cauchy. ■

Deoarece seria modulelor  $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$  este o serie cu termeni pozitivi, pentru studierea convergenței acesteia se pot utiliza criteriile de convergență pentru serii cu termeni pozitivi stabilite anterior. Acest lucru sugerează faptul că se poate obține convergența unei serii cu termeni oarecare demonstrând mai întâi convergența seriei modulelor cu ajutorul unui criteriu oarecare de convergență, convergența seriei date fiind atunci o consecință a absolutei ei convergențe.

### Exercițiu

Studiați absoluta convergență a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .



**Soluție**

Cum

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

iar  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu  $p = 2 > 1$ ,

urmează că și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right|$  este convergentă, conform criteriului de comparație cu inegalități. De aici, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  este absolut convergentă. ■

**Exercițiu**

Studiați absoluta convergență a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

**Soluție**

Deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

iar  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  este divergentă, fiind o serie armonică generalizată cu  $p = \frac{1}{2} < 1$ ,

urmează că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  nu este absolut convergentă. ■

**3.2.5 Produsul după Cauchy a două serii**

Fie seriile cu termeni oarecare  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ . Vom numi *seria produs după Cauchy*

a celor două serii seria  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  definită prin

$$c_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \dots + x_n y_0 = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k},$$

pentru care  $c_n$ , termenul de ordin  $n$ , conține suma tuturor produselor de forma  $x_k y_l$  în care suma indicilor celor doi factori  $x_k$  și  $y_l$  este  $n$ .

Se observă că, definită în acest mod, seria produs după Cauchy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  conține într-adevăr toate produsele de forma  $x_k y_l$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ , câte o singură dată, un astfel

de produs fiind un termen al sumei prin care este definit  $c_{k+l}$  și numai al acesteia.

Totuși, deși procedeul de sumare este natural, el nu asigură proprietatea de păstrare a convergenței a două serii. Mai precis, dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  sunt două serii convergente, seria produs după Cauchy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  nu este neapărat convergentă.

În acest sens, să considerăm exemplul seriilor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

În primul rând, se observă cu ajutorul criteriului lui Leibniz că aceste serii sunt convergente. În plus,

$$c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} (-1)^{n-k} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}.$$

Cum

$$\sqrt{(k+1)(n+1-k)} \leq \sqrt{(n+1)(n+1)} = n+1,$$

urmează că

$$|c_n| = \left| (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \right| \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} = 1,$$

deci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  este divergentă, întrucât termenul general  $c_n$  nu tinde la 0.

Totuși, convergența seriei produs după Cauchy este asigurată dacă măcar una dintre cele două serii  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  este absolut convergentă. În acest sens, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Mertens*.

**Teorema 3.24.** *Dacă seriile  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  sunt convergente, măcar una dintre ele fiind și absolut convergentă, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este și ea convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii, adică*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right).$$

În situația în care se îmbunătățește convergența seriilor  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ , în sensul că ambele serii sunt asumate a fi absolut convergente, se îmbunătățește și convergența seriei produs după Cauchy, în sensul că seria produs devine și ea absolut convergentă. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Cauchy*.

**Teorema 3.25.** *Dacă seriile  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  sunt absolut convergente, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este și ea absolut convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.*

Cum pentru cazul seriilor cu termeni pozitivi proprietățile de convergență și absolută convergență coincid, are loc următoarea consecință.

**Corolar 3.25.1.** *Dacă seriile cu termeni pozitivi  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  sunt convergente, atunci și seria produs după Cauchy a celor două serii este convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.*

În fine, în situația în care  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  și seria produs după Cauchy a celor două serii  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  sunt toate convergente, acest lucru este suficient pentru a arăta că suma seriei produs este produsul sumelor celor două serii. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Abel*.

**Teorema 3.26.** *Dacă seriile  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  sunt convergente, cu  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = B$ , iar seria produs după Cauchy a celor două serii  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  este de asemenea convergentă, cu  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$ , atunci  $C = AB$ .*

### 3.3 Estimarea restului de ordin $p$

Din punct de vedere practic, pentru calculul aproximativ al sumei unei serii convergente, este important să se cunoască o estimare a restului de ordin  $p$  al seriei,

această estimare reprezentând de fapt o estimare a erorii cu care  $S_p$ , suma parțială de ordin  $p$ , aproximează suma  $S$  a seriei.

Pentru serii cu termeni pozitivi, se poate stabili o estimare a restului de ordin  $p$  în condițiile de aplicare ale criteriului radicalului, respectiv criteriului raportului.

**Teorema 3.27.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni pozitivi. Dacă

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q < 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci

$$0 \leq R_p \leq \frac{q^{p+1}}{1-q} \quad \text{pentru orice } p \geq N.$$

**Demonstrație.** Se observă că

$$R_p = x_{p+1} + x_{p+2} + \dots \geq 0 \quad \text{pentru orice } p \geq 0.$$

Deoarece  $\sqrt[n]{x_n} \leq q$  pentru orice  $n \geq N$ , urmează că  $x_n \leq q^n$  pentru orice  $n \geq N$ . Atunci

$$\begin{aligned} R_p &= x_{p+1} + x_{p+2} + \dots \\ &\leq q^{p+1} + q^{p+2} + \dots \\ &\leq q^{p+1}(1 + q + q^2 + \dots) \\ &\leq \frac{q^{p+1}}{1-q}, \quad \text{pentru orice } p \geq N, \end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

**Teorema 3.28.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni strict pozitivi. Dacă

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci

$$0 \leq R_p \leq x_N \frac{q^{p-N+1}}{1-q} \quad \text{pentru orice } p \geq N.$$

**Demonstrație.** Deoarece  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q$  pentru orice  $n \geq N$ , urmează că

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \dots \frac{x_{N+1}}{x_N} x_N \\ &\leq q^{n-N} x_N \quad \text{pentru orice } n \geq N. \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} R_p &= x_{p+1} + x_{p+2} + \dots \\ &\leq x_N q^{p-N+1} + x_N q^{p-N+2} + \dots \\ &\leq x_N q^{p-N+1} (1 + q + q^2 + \dots) \\ &\leq x_N \frac{q^{p-N+1}}{1-q}, \quad \text{pentru orice } p \geq N, \end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

Pentru serii alternante, se poate stabili o estimare a restului de ordin  $p$  în condițiile de aplicare ale criteriului lui Leibniz.

**Teorema 3.29.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$  o serie alternantă, unde  $(y_n)_{n \geq 0}$  este un șir monoton descrescător și convergent la 0. Atunci

$$|R_p| \leq y_{p+1} \quad \text{pentru orice } p \geq 0.$$

**Demonstrație.** Fie  $(S_n)_{n \geq 0}$  șirul sumelor parțiale asociate seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ . Pentru orice  $p \geq 0$ , au loc relațiile

$$|R_{2p}| = |S - S_{2p}| = S_{2p} - S \leq S_{2p} - S_{2p+1} = -(-1)^{2p+1} y_{2p+1} = y_{2p+1},$$

respectiv

$$|R_{2p+1}| = |S - S_{2p+1}| = S - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1} = (-1)^{2p+2} y_{2p+2} = y_{2p+2},$$

deoarece  $S_{2p} \geq S \geq S_{2p+1}$ . Din relațiile de mai sus, urmează concluzia. ■

## Aplicații

**3.1.** Determinați sumele următoarelor serii folosind formula de sumare a progresiei geometrice

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{7^n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{3^{2n}}; \\ 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}; \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{[3 + (-1)^n]^n}. \end{aligned}$$

## 3.2. Ținând seama de relația

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!},$$

determinați suma seriei telescopice  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ .

## 3.3. Ținând seama de relația

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{n+1} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{n},$$

determinați suma seriei telescopice  $\sum_{n=1}^{\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ .

## 3.4. Ținând seama de relația

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)},$$

determinați suma seriei telescopice  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ .

## 3.5. Ținând seama de relația

$$\frac{n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)},$$

determinați suma seriei telescopice  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$ .

## 3.6. Demonstrați că următoarele serii sunt divergente analizând comportarea termenului general

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{1 + 3^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{5} - 1 \right);$$

$$5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(e^n + 2)}{n}; \quad 7) \sum_{n=2}^{\infty} \ln(\ln n).$$

3.7. Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ ,  $x_0 \in (0, 1)$ .

1. Demonstrați că  $x_n \in (0, 1)$  pentru orice  $n \geq 0$ .

2. Demonstrați că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este strict descrescător.

3. Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .
4. Demonstrați că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$  este convergentă.
- 3.8. Demonstrați că nu există șiruri  $(x_n)_{n \geq 0}$  astfel ca seria  $\sum_{n=0}^{\infty} (|x_n - 2| + |3 - x_n|)$  să fie convergentă.
- 3.9. Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie cu termeni pozitivi.
1. Demonstrați, folosind eventual criteriul de convergență Cauchy, că dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă, atunci și  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$  este convergentă.
  2. Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$  este convergentă, rezultă neapărat că  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este convergentă?
- 3.10. Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  o serie convergentă cu termeni strict pozitivi. Demonstrați că  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}}}$  sunt de asemenea convergente.
- 3.11. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului de condensare
- 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ ; 2)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ ; 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n(\ln n)^2}$ .
- 3.12. Demonstrați cu ajutorul criteriului de condensare că seria  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  este convergentă dacă  $p > 1$ , respectiv divergentă dacă  $p \leq 1$ .
- 3.13. 1. Determinați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$ ;
2. Studiați convergența seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}$ , folosind eventual un criteriu de comparație.

**3.14.** Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu de comparație

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + (-1)^n}{n^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \sin n}{n}; \quad 3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; \\
 & 5) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n + (-1)^n)^2}; \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 3}; \quad 7) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 3n + 4}; \quad 8) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^3 + n + 2}; \\
 & 9) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n+2}{n^2+1} \right)^2; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n^2+1}}}{n^2}; \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\frac{3}{n}}}; \quad 12) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1); \\
 & 13) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{2^{2n} + 1}; \quad 14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right); \quad 15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).
 \end{aligned}$$

**3.15.** Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu al raportului

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^n}{n^n}; \\
 & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2^n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}; \quad 8) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}; \\
 & 9) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3} - \sqrt[3]{3})(\sqrt{3} - \sqrt[5]{3}) \dots (\sqrt{3} - \sqrt[2n+1]{3}).
 \end{aligned}$$

**3.16.** Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu al radicalului

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{n+2} \right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{3n+2} \right)^{n+2}; \quad 3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+2}{2n+3} \right)^{n \ln n}; \\
 & 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4n+1}{4n+5} \right)^{n^2}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2}; \quad 8) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^{n^2}; \\
 & 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}; \quad 10) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}; \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left( 3 + \frac{1}{n} \right)^n}; \quad 12) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3n+5)^n}; \\
 & 13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{n+1}}{(2n+3)^n}; \quad 14) \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^n; \quad 15) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{(n+1)(n+2)} - n \right)^n.
 \end{aligned}$$

**3.17.** Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{4 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 4n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(3 + \sqrt{1})(3 + \sqrt{2}) \dots (3 + \sqrt{n})}; \\
 & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{3n+2}{3n+1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}; \\
 & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 6n}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)} \cdot \frac{1}{2^n + 1}.
 \end{aligned}$$

**3.18.** Discuțați convergența următoarelor serii în funcție de valorile parametrilor  $a > 0$  și  $p \in \mathbb{R}$



$$\begin{aligned}
& 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( a \frac{n^2 - n + 2}{n^2} \right)^n; \\
& 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + a + a^2 + \dots + a^n)}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n)}; \\
& 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}{n^n}; \quad 7) \sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}.
\end{aligned}$$

**3.19.** Discuțați convergența următoarelor serii în funcție de valorile parametrilor  $a, b > 0$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+(n-1))}{b(b+1)(b+2)\dots(b+(n-1))}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n + b^n}.$$

**3.20.** Discuțați convergența seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{an+b}{cn+d} \right)^n$  în funcție de valorile parametrilor  $a, b, c, d > 0$ .

**3.21.** Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Dirichlet

$$\begin{aligned}
& 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3n}{\ln(n+1)}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{\ln(n+2)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[3]{2} - 1) \sin 2n; \\
& 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \ln(1 + \frac{1}{n})}{\sqrt[3]{n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos x}{n}; \\
& 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n^3}; \quad 10) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \sin n^2}{\sqrt[4]{n}}; \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}; \quad 12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}; \\
& 13) \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \sin nx \cos nx, n \in \mathbb{R}; \quad 14) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

**3.22.** Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Abel

$$\begin{aligned}
& 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \sin \frac{1}{n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \sqrt[n]{n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg} n; \\
& 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left( e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right); \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n+2}} \sin \frac{1}{n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right); \\
& 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{n}.
\end{aligned}$$

**3.23.** Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Leibniz

$$\begin{aligned}
& 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n + \ln n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[3]{3} - 1); \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}; \\
& 5) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{6^n}; \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+3)}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \ln^2 n};
\end{aligned}$$

$$9) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+3} \left( \frac{3n+2}{6n+1} \right)^n.$$

**3.24.** Demonstrați că următoarele serii sunt divergente

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 + \cos n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(2^n + 3)}{\ln(3^n + 2)}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n+2)}{4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+4)};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{2 + (-1)^n}.$$

**3.25.** Studiați convergența absolută a următoarelor serii

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + n + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{n\sqrt{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n!}{n \ln^2 n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2n^2 + \sin n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(-1)^n}}{n^2 + (-1)^n}.$$

**3.26.** Discutați convergența următoarelor serii în funcție de valorile parametrului  $a \in \mathbb{R}$ .

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{a+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + 2^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^{2n} + 1};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + 1} - an); \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a+3}{2a+1} \right)^n; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n + \sqrt{n}}.$$

**3.27.** Demonstrați că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$ , unde

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$$

este divergentă.

# Capitolul 4

## PROPRIETĂȚI TOPOLOGICE ȘI DE NUMĂRARE ALE LUI $\overline{\mathbb{R}}$

### 4.1 Proprietăți topologice ale lui $\overline{\mathbb{R}}$

#### 4.1.1 Puncte de acumulare

Fie o mulțime  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Vom spune că  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  se numește *punct de acumulare* al mulțimii  $A$  dacă orice vecinătate  $V$  a lui  $a$  conține puncte ale lui  $A$  diferite de  $a$ , adică

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), (V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset.$$

**Exemple** 1.  $a = 0$  este punct de acumulare al mulțimii  $A = (0, 1)$  deoarece orice vecinătate  $V$  a lui  $0$  conține un interval  $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , deci și puncte ale lui  $(0, 1)$  diferite de  $0$ . Altfel spus,

$$(V \setminus \{0\}) \cap A = (0, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

2.  $a = 3$  nu este punct de acumulare al mulțimii  $A = (0, 1) \cup \{3\}$  deoarece vecinătatea  $V = (2, 4)$  a lui  $3$  nu conține puncte ale lui  $A$  diferite de  $3$ . Altfel spus,

$$(V \setminus \{3\}) \cap A = \emptyset.$$

3.  $a = +\infty$  este punct de acumulare al mulțimii  $A = \mathbb{N}$  deoarece orice vecinătate  $V$  a lui  $+\infty$  conține un interval  $I = (M, +\infty]$ ,  $M > 0$ , deci și puncte ale

lui  $\mathbb{N}$  diferite de  $+\infty$ . Altfel spus,

$$(V \setminus \{+\infty\}) \cap A = \{[M] + 1, [M] + 2, \dots\} \neq \emptyset.$$

Din exemplele de mai sus se deduc câteva consecințe privind localizarea punctelor de acumulare. mai întâi, un punct de acumulare al unei mulțimi  $A$  poate să nu fie element al acelei mulțimi (exemplul 1). De asemenea, nu orice element al unei mulțimi  $A$  este neapărat punct de acumulare al acelei mulțimi (exemplul 2). Din cel de-al treilea exemplu, se poate observa că punctele de acumulare ale unei mulțimi pot fi și la infinit.

Mulțimea tuturor punctelor de acumulare ale mulțimii  $A$  se numește atunci *mulțimea derivată* a lui  $A$  și se notează  $A'$ , în vreme ce un element al unei mulțimi  $A$  care nu este punct de acumulare al acelei mulțimi se numește *punct izolat* al lui  $A$ . De aici se poate observa că  $a \in A$  este punct izolat al lui  $A$  dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $A$  care nu conține puncte din  $A$ .

**Exemple** 1. Dacă  $A = (0, 3) \cup \{5\}$ , atunci  $A' = [0, 3]$ , iar 5 este punct izolat al lui  $A$ .

2. Dacă  $A = \{0, 1, 2\}$ , atunci  $A' = \emptyset$ , toate elementele lui  $A$  fiind puncte izolate.

3. Dacă  $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ , atunci  $A' = \{0\}$ , toate elementele lui  $A$  fiind puncte izolate.

Alegând în mod potrivit în definiția unui punct de acumulare vecinătăți  $V$  din ce în ce mai mici se obțin puncte ale lui  $A$  diferite de  $a$  care sunt din ce în ce mai aproape de  $a$ . În acest mod se poate obține următoarea caracterizare echivalentă a unui punct de acumulare cu ajutorul șirurilor, exprimând faptul că o mulțime care are un punct de acumulare  $a$  conține elemente „oricât de apropiate” de  $a$  și diferite de  $a$ .

**Teorema 4.1.** Fie  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Atunci  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  este punct de acumulare al lui  $A$  dacă și numai dacă există un șir  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  de elemente ale lui  $A$ , diferite de  $a$ , cu limita  $a$ .

**Demonstrație.** Pentru fixarea ideilor, să presupunem că  $a \in \mathbb{R}$ , situațiile în care  $a \in \{\pm\infty\}$  tratându-se analog.

„ $\Rightarrow$ ” Fie  $a$  un punct de acumulare al lui  $A$ . Conform definiției, în vecinătatea  $V_0 = (a - 1, a + 1)$  se află un punct  $a_0$  al lui  $A$  diferit de  $a$ . Datorită alegerii lui  $V_0$ , urmează și că  $|a - a_0| < 1$ .

Fie acum  $\delta_1 = \min\left(\frac{1}{2}, |a - a_0|\right)$  și  $V_1 = (a - \delta_1, a + \delta_1)$ . Atunci vecinătatea  $V_1$  conține un punct  $a_1$  al lui  $A$  diferit de  $a$ . Are loc și  $|a - a_1| < \delta_1 < \frac{1}{2}$ , iar deoarece  $|a - a_1| < \delta_1 \leq |a - a_0|$ , urmează că  $a_1 \neq a_0$ . Procedând în mod inductiv și alegând

$$\delta_n = \min\left(\frac{1}{2^n}, |a - a_{n-1}|\right), \quad V_n = (a - \delta_n, a + \delta_n).$$

obținem un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  de elemente ale lui  $A$  diferite de  $a$  și diferite și între ele. Deoarece  $|a - a_n| < \frac{1}{2^n}$ , urmează că  $(a_n)_{n \geq 0}$  converge către  $a$ .

„ $\Leftarrow$ ” Fie un șir  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  de elemente ale lui  $A$ , diferite de  $a$ , cu limita  $a$ . Fie de asemenea  $V \in \mathcal{V}(a)$  o vecinătate oarecare a lui  $a$ . Cum  $a_n \rightarrow a$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , există  $n_V \in \mathbb{N}$  astfel ca  $a_n \in V$  pentru orice  $n \geq n_V$ . Atunci

$$(V \setminus \{a\}) \cap A \supset \{a_{n_V}\} \neq \emptyset.$$

Cum  $V$  era arbitrară, urmează că  $a$  este un punct de acumulare al lui  $A$ . ■

Din cele de mai sus, observând că șirul  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  poate fi ales cu termenii diferiți între ei (vezi procedeul său de construcție), deducem că o mulțime  $A$  care are un punct de acumulare  $a$  este în mod necesar infinită. În particular, o mulțime finită nu are puncte de acumulare, toate elementele sale fiind deci puncte izolate.

De asemenea, din aceeași observație se obține în mod imediat următorul rezultat.

**Corolar 4.1.1.** *Un punct  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  este punct de acumulare al unei mulțimi  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  dacă și numai dacă orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(a)$  conține o infinitate de elemente ale lui  $A$ .*

Pot fi demonstrate cu ajutorul celor de mai sus următoarele proprietăți de calcul.

**Teorema 4.2.** *Fie  $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Au loc următoarele proprietăți.*

1. Dacă  $A \subset B$ , atunci  $A' \subset B'$ .
2.  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ .
3.  $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$ .

**Demonstrație.** 1. Fie  $a \in A'$ . Există atunci un șir  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  de elemente ale lui  $A$ , diferite de  $a$ , cu limita  $a$ . Cum  $A \subset B$ , urmează că  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  este și un șir de elemente ale lui  $B$ , deci și  $a \in B'$ .

2. Deoarece  $A \subset A \cup B$  și  $B \subset A \cup B$ , urmează conform 2. că  $A' \subset (A \cup B)'$  și  $B' \subset (A \cup B)'$ , deci  $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$ .

Fie acum  $a \in (A \cup B)'$ . Există atunci un șir  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  de elemente ale lui  $A \cup B$ , diferite de  $a$ , cu limita  $a$ . Acest șir conține fie un număr infinit de elemente ale lui  $A$ , fie un număr infinit de elemente ale lui  $B$ , în caz contrar el având un număr finit de elemente, contradicție. Să presupunem pentru fixarea ideilor că  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  conține un număr infinit de elemente ale lui  $A$ . Atunci subșirul format cu toate aceste elemente are limita tot  $a$  și deci  $a \in A'$ . În concluzie,  $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$ , iar deoarece și  $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$ , urmează că  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ , ceea ce încheie demonstrația teoremei.

3. Deoarece  $A \cap B \subset A$  și  $A \cap B \subset B$ , urmează conform 2. că  $(A \cap B)' \subset A'$  și  $(A \cap B)' \subset B'$ , deci  $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$ . ■

Faptul că  $(A \cap B)'$  și  $A' \cap B'$  nu sunt neapărat egale se poate observa considerând  $A = (0, 1)$  și  $B = (1, 2)$ . Atunci  $A' = [0, 1]$  și  $B' = [1, 2]$ , deci  $A' \cap B' = \{1\}$ . Totuși,  $A \cap B = \emptyset$ , deci  $(A \cap B)' = \emptyset$ , iar  $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$ .

### 4.1.2 Puncte aderente

Fie o mulțime  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Vom spune că  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  se numește *punct aderent* al mulțimii  $A$  dacă orice vecinătate  $V$  a lui  $a$  conține puncte ale lui  $A$ , adică

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \emptyset.$$

Cum definiția unui punct aderent este mai puțin restrictivă decât definiția unui punct de acumulare (este necesar ca  $V \cap A \neq \emptyset$ , în loc de  $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ , când cea din urmă relație este satisfăcută fiind satisfăcută în mod evident și cea dintâi), urmează că orice punct de acumulare al unei mulțimi  $A$  este în același timp și punct aderent al acelei mulțimi.

De asemenea, deoarece  $a \in V$  pentru orice  $V \in \mathcal{V}(a)$ , urmează că  $a \in V \cap A$  pentru orice  $a \in A$  și orice  $V \in \mathcal{V}(a)$ , deci  $V \cap A \neq \emptyset$ . De aici, orice  $a \in A$  este punct aderent al lui  $A$ .

Mulțimea tuturor punctelor aderente ale mulțimii  $A$  se numește atunci *aderența* sau *închiderea* mulțimii  $A$  și se notează  $\bar{A}$ . Din cele de mai sus se observă că  $A \subset \bar{A}$  și  $A' \subset \bar{A}$ .

În mod analog Teoremei 4.1 se poate demonstra următorul rezultat, care afirmă faptul că  $A$  conține, pe lângă elementele din  $A$ , și limitele de șiruri cu termeni din  $A$ .

**Teorema 4.3.** Fie  $A \subset \bar{\mathbb{R}}$ . Atunci  $a \in \bar{\mathbb{R}}$  este punct aderent al lui  $A$  dacă și numai dacă există un șir  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  de elemente ale lui  $A$ , cu limita  $a$ .

**Exemple** 1. Dacă  $A = \{0, 1, \dots, n\}$ , atunci  $\bar{A} = A$ .

2. Dacă  $A = (0, 1)$ , atunci  $\bar{A} = [0, 1]$ .

3. Dacă  $A = \mathbb{Q}$ , atunci  $\bar{A} = \bar{\mathbb{R}}$ , deoarece orice număr real este limita unui șir de numere raționale,  $+\infty$  este limita șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = n \in \mathbb{Q}$ , iar  $-\infty$  este limita șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = -n \in \mathbb{Q}$ .

Cu ajutorul celor de mai sus se pot demonstra următoarele proprietăți de calcul.

**Teorema 4.4.** Fie  $A, B \subset \bar{\mathbb{R}}$ . Au loc următoarele proprietăți.

1.  $\bar{A} = A \cup A'$ .

2. Dacă  $A \subset B$ , atunci  $\bar{A} \subset \bar{B}$ .

3.  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .

4.  $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ .

**Demonstrație.** 1. S-a demonstrat deja că  $A \subset \bar{A}$  și  $A' \subset \bar{A}$ , deci  $A \cup A' \subset \bar{A}$ .

Fie acum  $a \in \bar{A}$ . Dacă  $a \notin A$ , fie  $V \in \mathcal{V}(a)$  oarecare. Atunci  $V \cap A \neq \emptyset$  și cum  $a \notin A$  urmează că  $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ . Deoarece  $V$  este o vecinătate arbitrară, urmează că  $a \in A'$ . În concluzie, luând în calcul și cazul în care  $a \in A$ , urmează că  $a \in A \cup A'$ , deci  $\bar{A} \subset A \cup A'$ , iar deoarece  $A \cup A' \subset \bar{A}$ , urmează că  $\bar{A} = A \cup A'$ .

Cea de-a doua și cea de-a treia afirmație se demonstrează la fel ca afirmațiile similare din Teorema 4.2.

4. Deoarece  $A \cap B \subset A$  și  $A \cap B \subset B$ , urmează conform 2. că  $\overline{A \cap B} \subset \bar{A}$  și  $\overline{A \cap B} \subset \bar{B}$ . ■

Faptul că  $\overline{A \cap B}$  și  $\overline{A} \cap \overline{B}$  nu sunt neapărat egale se poate observa considerând  $A = (0, 1)$  și  $B = (1, 2)$ . Atunci  $\overline{A} = [0, 1]$ ,  $\overline{B} = [1, 2]$ , deci  $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$ . Totuși,  $A \cap B = \emptyset$ , deci  $\overline{A \cap B} = \emptyset$ , iar  $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ .

### 4.1.3 Puncte interioare

Fie o mulțime  $A \subset \mathbb{R}$ . Vom spune că  $a \in \mathbb{R}$  se numește *punct interior* al mulțimii  $A$  dacă  $A$  este vecinătate pentru  $a$ . Deoarece  $A$  este vecinătate pentru  $a$ , rezultă că  $a \in A$ , adică un punct interior al unei mulțimi aparține în mod necesar acelei mulțimi.

Conform definiției vecinătății unui punct, urmează că  $a \in \mathbb{R}$  este punct interior al lui  $A$  dacă există  $(c, d)$  astfel ca  $a \in (c, d) \subset A$ , respectiv  $+\infty$  este punct interior lui  $A$  dacă există  $(c, \infty]$  astfel ca  $+\infty \in (c, \infty] \subset A$ , iar  $-\infty$  este punct interior lui  $A$  dacă există  $[-\infty, d)$  astfel ca  $-\infty \in [-\infty, d) \subset A$ . De asemenea, dacă  $A$  nu conține intervale, atunci  $A$  nu are puncte interioare, neputând fi vecinătate pentru niciun punct al său. În cele ce urmează, prin „interval deschis  $I$ ” vom înțelege un interval de tip  $(c, d)$ ,  $(c, \infty]$  sau  $[-\infty, d)$ , potrivit cu situația în care este utilizat.

**Exemple** 1.  $a = \frac{1}{2}$  este punct interior al mulțimii  $A = [0, 1) \cup 2$  deoarece  $a \in (0, 1) \subset A$ , dar  $a = 0$  și  $a = 2$  nu sunt puncte interioare ale lui  $A$ , întrucât  $A$  nu conține intervale deschise în care se află 0 și 2, neconținând nici numere negative, nici numere mai mari ca 2.

2.  $A = \mathbb{Q}$  nu are puncte interioare deoarece nu conține intervale.

Mulțimea tuturor punctelor interioare ale mulțimii  $A$  se numește atunci *interiorul* mulțimii  $A$  și se notează  $\overset{\circ}{A}$ .

**Teorema 4.5.** Fie  $A, B \subset \mathbb{R}$ . Au loc următoarele proprietăți.

1.  $\overset{\circ}{A} \subset A$ .
2. Dacă  $A \subset B$ , atunci  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .
3.  $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ .
4.  $\overset{\circ}{A \cup B} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ .



**Demonstrație.** Proprietatea cuprinsă în prima afirmație a fost deja demonstrată.

2. Fie  $a \in \overset{\circ}{A}$ . Există atunci un interval deschis  $I$  astfel ca  $a \in I \subset A$ , iar cum  $A \subset B$  urmează că  $a \in I \subset B$ , deci  $a \in \overset{\circ}{B}$ . Cum  $a$  era arbitrar, se obține că  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .

3. Deoarece  $A \cap B \subset A$  și  $A \cap B \subset B$ , se deduce conform 2. că  $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A}$  și  $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B}$ , deci  $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ .

Fie acum  $a \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ . Atunci  $a \in \overset{\circ}{A}$  și  $a \in \overset{\circ}{B}$ , deci există intervalele deschise  $I_1$  și  $I_2$  astfel că  $a \in I_1 \subset A$  și  $a \in I_2 \subset B$ . Cum  $I = I_1 \cap I_2$  este tot un interval deschis, iar  $a \in I \subset A \cap B$ , urmează că  $a \in \overset{\circ}{A \cap B}$ . De aici,  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$ , iar cum  $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ , rezultă că  $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ .

4. Deoarece  $A \subset A \cup B$  și  $B \subset A \cup B$ , urmează conform 2. că  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$  și  $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ , deci  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ . ■

Faptul că  $\overset{\circ}{A \cup B}$  și  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$  nu sunt neapărat egale se poate observa considerând  $A = (0, 1)$  și  $B = [1, 2)$ . Atunci  $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$ ,  $\overset{\circ}{B} = (1, 2)$ , deci  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = (0, 1) \cup (1, 2)$ . Totuși,  $A \cup B = (0, 2)$ , deci  $\overset{\circ}{A \cup B} = (0, 2)$ , iar  $\overset{\circ}{A \cup B} \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ .

Un alt tip de legătură între aderența și interiorul unei mulțimi, exprimat cu ajutorul mulțimilor complementare, este precizat în teorema următoare. În cele ce urmează, pentru o mulțime  $M$  dată, prin  $cM$  se va înțelege complementara mulțimii  $M$  în raport cu  $\overline{\mathbb{R}}$ , adică mulțimea  $\overline{\mathbb{R}} \setminus M$ . De asemenea,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  se va numi *punct exterior* al mulțimii  $M$  dacă  $cM$  este vecinătate pentru  $a$ .

**Teorema 4.6.** Fie  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Au loc egalitățile

$$1. \overline{cA} = \overset{\circ}{cA};$$

$$2. \overset{\circ}{cA} = \overline{cA}.$$

**Demonstrație.** 1. Fie  $a \in \overline{cA}$ . Atunci  $a \notin \overline{A}$ , deci există  $V \in \mathcal{V}(a)$  astfel ca  $V \cap A \neq \emptyset$ . De aici,  $V \subset cA$ . Cum  $V \in \mathcal{V}(a)$ , există un interval deschis  $I$  astfel ca  $a \in I \subset V \subset cA$ . În concluzie,  $a \in \overset{\circ}{cA}$ . De aici,  $\overline{cA} \subset \overset{\circ}{cA}$ .

Fie acum  $a \in \overset{\circ}{cA}$ . Atunci  $cA \in \mathcal{V}(a)$ , deci există un interval deschis  $I$  astfel ca  $a \in I \subset cA$ . De aici,  $I \cap A = \emptyset$ . Cum  $I \in \mathcal{V}(a)$ , urmează că  $a \notin \overline{A}$ , deci  $a \in \overline{cA}$ . De aici,  $\overset{\circ}{cA} \subset \overline{cA}$ , iar cum și  $\overline{cA} \subset \overset{\circ}{cA}$ , urmează că  $\overline{cA} = \overset{\circ}{cA}$ .

2. Fie  $a \in c\overset{\circ}{A}$ . Presupunem prin reducere la absurd că  $a \notin \overline{cA}$ . Atunci există  $V \in \mathcal{V}(a)$ ,  $V \cap cA = \emptyset$ . De aici,  $V \subset A$ , deci  $A \in \mathcal{V}(a)$ , iar  $a \in \overset{\circ}{A}$ , contradicție. Presupunerea făcută este deci falsă, iar  $a \in \overline{cA}$ , de unde  $c\overset{\circ}{A} \subset \overline{cA}$ .

Fie acum  $a \in \overline{cA}$ . Presupunem prin reducere la absurd că  $a \notin c\overset{\circ}{A}$ . Atunci  $a \in \overset{\circ}{A}$ , deci există un interval deschis  $I$  astfel ca  $a \in I \subset A$ , deci  $I \cap cA = \emptyset$ . Cum  $I \in \mathcal{V}(a)$ , urmează că  $a \notin \overline{cA}$ , contradicție. Presupunerea făcută este deci falsă, iar  $a \in c\overset{\circ}{A}$ , de unde  $\overline{cA} \subset c\overset{\circ}{A}$ . Cum  $c\overset{\circ}{A} \subset \overline{cA}$ , urmează că  $c\overset{\circ}{A} = \overline{cA}$ . ■

**Corolar 4.6.1.** Fie  $B \subset \mathbb{R}$ . Au loc egalitățile

$$1. \overline{B} = c(\overset{\circ}{cB});$$

$$2. \overset{\circ}{B} = c(\overline{cB}).$$

**Demonstrație.** Demonstrațiile celor două egalități se obțin în mod imediat punând  $B = cA$  în Teorema 4.6, ținând seama că  $c(cB) = B$ . ■

#### 4.1.4 Puncte de frontieră

Fie  $A \subset \mathbb{R}$ . Vom spune că  $a \in \mathbb{R}$  se numește *punct de frontieră* al lui  $A$  dacă  $a \in \overline{A} \cap \overline{cA}$ .

Din definiția de mai sus se observă că un punct  $a \in \mathbb{R}$  este punct de frontieră al lui  $A$  dacă este limita atât a unui șir de elemente din  $A$  cât și a unui șir de elemente din  $cA$ , adică există două șiruri  $(a_n)_{n \geq 0} \subset A$  și  $(b_n)_{n \geq 0} \subset cA$  astfel ca  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow a$  pentru  $n \rightarrow \infty$ .

Mulțimea tuturor punctelor de frontieră ale lui  $A$  se numește atunci *frontiera* lui  $A$  și se notează  $\text{Fr } A$  sau  $\partial A$ .

Are loc de asemenea următoarea proprietate de calcul, utilă în determinarea frontierei unei mulțimi.

**Teorema 4.7.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$ . Atunci  $\text{Fr } A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .

**Demonstrație.** Au loc relațiile

$$\text{Fr } A = \overline{A} \cap \overline{cA} = \overline{A} \cap c\overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A},$$

de unde concluzia. ■

- Exemple**
1. Dacă  $A = (0, 1)$ , atunci  $\bar{A} = [0, 1]$ ,  $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$ , deci  $\text{Fr } A = \{0, 1\}$ .
  2. Dacă  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ , atunci  $\bar{A} = A$ ,  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$  (deoarece  $A$  nu conține intervale), deci  $\text{Fr } A = A$ .
  3. Dacă  $A = \mathbb{Q}$ , atunci  $\bar{A} = \bar{\mathbb{R}}$ ,  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ , deci  $\text{Fr } A = \bar{\mathbb{R}}$ .

#### 4.1.5 Mulțimi deschise, mulțimi închise, mulțimi compacte

##### Mulțimi deschise

Fie  $A \subset \bar{\mathbb{R}}$ . Vom spune că  $A$  este *deschisă* dacă este mulțimea vidă sau este vecinătate pentru orice punct al său.

- Exemple**
1. Dacă  $A = (0, 1)$ , atunci ea este deschisă, fiind vecinătate pentru orice  $a \in (0, 1)$ .
  2. Dacă  $A = [0, 2)$ , atunci  $A$  nu este deschisă, întrucât ea nu este vecinătate pentru  $a = 0$ .
  3. Dacă  $A = \mathbb{N}$ , atunci  $A$  nu este deschisă, întrucât ea nu este vecinătate pentru niciun punct al său, neconținând intervale.
  4. Dacă  $A = \emptyset$ , ea este deschisă prin definiție. Dacă  $A = \mathbb{R}$ , atunci pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \in (a - 1, a + 1) \subset \mathbb{R}$ , deci  $\mathbb{R}$  este vecinătate pentru  $a$ . Cum  $a$  este arbitrar,  $\mathbb{R}$  este deschisă. Dacă  $A = \bar{\mathbb{R}}$ , la observația anterioară se adaugă faptul că  $+\infty \in (0, \infty] \subset \bar{\mathbb{R}}$ , iar  $-\infty \in [-\infty, 0) \subset \bar{\mathbb{R}}$ , deci  $\bar{\mathbb{R}}$  este de asemenea deschisă.

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a mulțimilor deschise prin intermediul interiorului acestora.

**Teorema 4.8.** Fie  $A \subset \bar{\mathbb{R}}$ . Atunci  $A$  este deschisă dacă și numai dacă  $A = \overset{\circ}{A}$ .

**Demonstrație.** „ $\Rightarrow$ ” Dacă  $A$  este deschisă, fie  $a \in A$  oarecare. Conform definiției,  $A$  este vecinătate a lui  $a$ , deci  $a \in \overset{\circ}{A}$  și atunci, deoarece  $a$  este oarecare, urmează că  $\overset{\circ}{A} \subset A$ . Cum și  $A \subset \overset{\circ}{A}$ , urmează că  $A = \overset{\circ}{A}$ .

„ $\Leftarrow$ ” Dacă  $A = \overset{\circ}{A}$ , atunci orice  $a \in A$  aparține și lui  $\overset{\circ}{A}$ , deci, conform definiției unui punct interior,  $A$  este vecinătate pentru  $A$ . Urmează atunci că  $A$  este vecinătate pentru orice  $a \in A$ , deci  $A$  este deschisă. ■

În particular, din rezultatul de mai sus se obține ușor faptul că  $I_1 = (c, d)$ ,  $I_2 = (c, +\infty)$ ,  $I_3 = (c, +\infty]$ ,  $I_4 = [-\infty, d]$  și  $I_5 = (-\infty, d)$  sunt mulțimi deschise pentru orice  $c, d \in \mathbb{R}$ .

Se va observa în cele ce urmează că interiorul unei mulțimi  $A$  este mulțime deschisă și este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în  $A$ , în sensul că oricare altă mulțime deschisă inclusă în  $A$  este conținută în  $\overset{\circ}{A}$ .

**Teorema 4.9.** Fie  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Atunci  $\overset{\circ}{A}$  este o mulțime deschisă, iar  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ . Mai mult, dacă  $B \subset A$  este o altă mulțime deschisă, atunci  $B \subset \overset{\circ}{A}$ .

**Demonstrație.** Demonstrăm mai întâi că  $\overset{\circ}{A}$  este o mulțime deschisă.

Dacă  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ , teorema este demonstrată. Fie acum  $a \in \overset{\circ}{A}$ . Atunci există un interval deschis  $I$  astfel ca  $a \in I \subset A$ . Cum  $I$  este interval deschis, este mulțime deschisă conform observației de mai sus, deci  $I$  este vecinătate pentru orice punct al său. Deoarece și  $I \subset A$ , urmează că  $A$  este vecinătate pentru orice punct al lui  $I$ , deci  $I \subset \overset{\circ}{A}$ . Deoarece  $a \in I \subset \overset{\circ}{A}$ , se obține că  $\overset{\circ}{A}$  este vecinătate pentru  $a$ , iar cum  $a$  este arbitrar, urmează că  $\overset{\circ}{A}$  este deschisă.

Deoarece  $\overset{\circ}{A}$  este deschisă, urmează conform Teoremei 4.8 că  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ . Fie acum  $B \subset A$  o mulțime deschisă. Atunci  $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A}$ , iar deoarece  $B$  este deschisă,  $\overset{\circ}{B} = B$ , de unde  $B \subset \overset{\circ}{A}$ . ■

### Operații cu mulțimi deschise

**Teorema 4.10.** Au loc următoarele proprietăți.

1. Orice reuniune de mulțimi deschise este mulțime deschisă.
2. Orice intersecție finită de mulțimi deschise este mulțime deschisă.

**Demonstrație.** 1. Fie  $(A_i)_{i \in I} \subset \overline{\mathbb{R}}$  mulțimi deschise, mulțimea  $I$  a indicilor nefiind neapărat finită. Fie deasemenea  $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ . Există atunci  $i_0 \in I$  astfel ca  $a \in A_{i_0}$ , iar cum  $A_{i_0}$  este deschisă,  $A_{i_0} \in \mathcal{V}(a)$ . Deoarece  $A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ , urmează că de asemenea  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{V}(a)$ . Cum  $a$  era arbitrar în  $\bigcup_{i \in I} A_i$ , se obține că  $\bigcup_{i \in I} A_i$  este mulțime deschisă.

2. Fie  $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \overline{\mathbb{R}}$  mulțimi deschise și  $a \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ . Atunci  $a \in A_i$  pentru  $1 \leq i \leq n$ , deci pentru orice  $1 \leq i \leq n$  există un interval deschis  $I_i$  astfel ca  $I_i \subset A_i$ . Deoarece  $\bigcap_{i=1}^n I_i$  este tot un interval deschis, iar  $a \in \bigcap_{i=1}^n I_i \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$ , urmează că  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{V}(a)$ . Cum  $a$  era arbitrar, se obține că  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  este mulțime deschisă. ■

Se poate observa că o intersecție infinită de mulțimi deschise nu este neapărat mulțime deschisă. În acest sens, să considerăm  $(A_i)_{i \geq 1} : A_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$ . Atunci  $A_i$  este deschisă pentru orice  $i \geq 1$ , dar  $\bigcap_{i \geq 1} A_i = \{0\}$ , care nu este mulțime deschisă.

### Exemplu

$A = (0, 1) \cup (2, 4)$  este deschisă, ca reuniune a mulțimilor deschise  $(0, 1)$  și  $(2, 4)$ .

### Mulțimi închise

Fie  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Vom spune că  $A$  este *închisă* dacă  $cA$  este deschisă.

Se poate observa imediat că are loc următoarea teoremă de caracterizare a mulțimilor închise prin intermediul aderenței acestora.

**Teorema 4.11.** Fie  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Atunci  $A$  este închisă dacă și numai dacă  $A = \overline{A}$ .

**Demonstrație.** Au loc următoarele echivalențe

$$A \text{ închisă} \Leftrightarrow cA \text{ deschisă} \Leftrightarrow cA = \overset{\circ}{cA} \Leftrightarrow cA = c\overline{A} \Leftrightarrow A = \overline{A}. \quad \blacksquare$$

Din teorema de mai sus și din teorema de caracterizare a mulțimilor închise cu ajutorul limitelor de șiruri (Teorema 4.3) se poate observa că  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  este închisă dacă și numai dacă ea conține limitele tuturor șirurilor cu elemente din  $A$ .

**Exemple** 1.  $A = [0, 1]$  este mulțime închisă, deoarece  $\overline{A} = A$ . Altfel,  $cA = [-\infty, 0) \cup (0, \infty]$ , care este mulțime deschisă, fiind reuniunea mulțimilor deschise  $[-\infty, 0)$  și  $(0, \infty]$ .

2.  $A = \mathbb{R}$  nu este mulțime închisă, deoarece  $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}} \neq A$ . Altfel,  $A$  nu conține  $+\infty$ , care este limita șirului  $(x_n)_{n \geq 0} : x_n = n$  cu elemente din  $A$ .

3.  $A = (-\infty, 0]$  nu este mulțime închisă, deoarece  $cA = \{-\infty\} \cup (0, \infty]$ , care nu este mulțime deschisă, întrucât nu este vecinătate a lui  $+\infty$ . Altfel,  $\overline{A} = [-\infty, 0] \neq A$ , sau  $A$  nu conține  $-\infty$ , care este limita șirului  $(x_n)_{n \geq 0} : x_n = -n$  cu elemente din  $A$ .

4.  $\emptyset$  este mulțime închisă deoarece  $c\emptyset = \mathbb{R}$ , care este mulțime deschisă. De asemenea,  $\mathbb{R}$  este mulțime închisă, deoarece  $c\mathbb{R} = \emptyset$ , care este mulțime deschisă.

Din exemplele de mai sus se poate observa că  $\emptyset$  și  $\mathbb{R}$  sunt atât mulțimi deschise, cât și închise. Se poate demonstra că aceste mulțimi sunt singurele care au simultan cele două proprietăți.

Prin analogie cu Teorema 4.9, se va observa că aderența unei mulțimi date  $A$  este mulțime închisă și este cea mai mică mulțime închisă care include pe  $A$ , în sensul că oricare altă mulțime închisă care include pe  $A$  conține și  $\bar{A}$ .

**Teorema 4.12.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$ . Atunci  $\bar{A}$  este o mulțime închisă, iar  $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$ . Mai mult, dacă  $B \supset A$  este o altă mulțime închisă, atunci  $B \supset \bar{A}$ .

**Demonstrație.** Demonstrăm mai întâi că  $\bar{A}$  este o mulțime închisă.

Deoarece  $c\bar{A} = c\overset{\circ}{A}$  iar  $c\overset{\circ}{A}$  este deschisă, urmează că  $c\bar{A}$  este deschisă, deci  $\bar{A}$  este închisă.

Au loc deasemenea următoarele egalități

$$c(\overline{\bar{A}}) = c\overset{\circ}{\bar{A}} = c\overset{\circ}{c\overset{\circ}{A}} = c\overset{\circ}{A} = c\bar{A},$$

de unde  $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$ . Fie acum  $B \supset A$  o mulțime închisă. Atunci  $\bar{B} \supset \bar{A}$ , iar deoarece  $B$  este închisă,  $\bar{B} = B$ , de unde  $B \supset \bar{A}$ . ■

### Operații cu mulțimi închise

**Teorema 4.13.** Au loc următoarele proprietăți.

1. Orice reuniune finită de mulțimi închise este mulțime închisă.
2. Orice intersecție de mulțimi închise este mulțime închisă.

**Demonstrație.** 1. Fie  $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}$  mulțimi închise. Atunci  $c\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcap_{i=1}^n cA_i$ , iar cum  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  sunt închise,  $cA_i$  este mulțime deschisă pentru orice  $1 \leq i \leq n$ . Atunci  $\bigcap_{i=1}^n cA_i$  este deschisă, fiind o intersecție finită de mulțimi deschise. De aici,  $c\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$  este deschisă, iar complementara sa  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  este închisă.

2. Fie  $(A_i)_{i \in I} \subset \overline{\mathbb{R}}$  mulțimi închise, mulțimea  $I$  a indicilor nefiind neapărat finită. Atunci  $c\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} cA_i$ , iar  $\bigcup_{i \in I} cA_i$  este deschisă, fiind reuniune de mulțimi deschise. De aici,  $c\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$  este deschisă, iar complementara sa  $\bigcap_{i \in I} A_i$  este închisă. ■

Se poate observa că o reuniune infinită de mulțimi închise nu este neapărat mulțime închisă. În acest sens, să considerăm  $(A_i)_{i \geq 0} : A_i = [-i, i]$ . Atunci  $A_i$  este închisă pentru orice  $i \geq 0$ , dar  $\bigcup_{i \geq 0} A_i = \mathbb{R}$ , care nu este mulțime închisă.

### Exemplu

$A = [-1, 2] \cup [4, 5]$  este deschisă, ca reuniune a mulțimilor închise  $[-1, 2]$  și  $[4, 5]$ .

### Mulțimi compacte

Fie  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Vom spune că  $A$  este *compactă* dacă este închisă și mărginită.

**Exemple** 1.  $A = [0, 1]$  este compactă, fiind închisă și mărginită.

2.  $A = [0, 2] \cup [4, 6]$  este compactă, fiind închisă (ca reuniune finită de mulțimi închise) și mărginită.

3.  $A = [0, \infty]$  nu este compactă, nefiind mărginită.

4.  $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$  nu este compactă, nefiind închisă, deoarece limita șirului  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  este 0, element neconținut în mulțimea  $A$ .

### Operații cu mulțimi compacte

**Teorema 4.14.** *Au loc următoarele proprietăți.*

1. *Orice reuniune finită de mulțimi compacte este mulțime compactă.*

2. *Orice intersecție de mulțimi compacte este mulțime compactă.*

**Demonstrație.** 1. Fie  $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \overline{\mathbb{R}}$  mulțimi compacte. Atunci  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  este închisă, conform Teoremei 4.13, iar cum o reuniune finită de mulțimi mărginite este mărginită, ea este și mărginită. Fiind mărginită și închisă,  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  este compactă.

2. Fie  $(A_i)_{i \in I} \subset \overline{\mathbb{R}}$  mulțimi închise, mulțimea  $I$  a indicilor nefiind neapărat finită. Atunci  $\bigcap_{i \in I} A_i$  este închisă, conform Teoremei 4.13, iar cum o intersecție de

mulțimi mărginite este mărginită, ea este și mărginită. Fiind mărginită și închisă,  $\bigcap_{i \in I} A_i$  este compactă. ■

**Teorema 4.15.** Fie  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Atunci  $A$  este compactă dacă și numai dacă din orice șir de elemente din  $A$  se poate extrage un subșir convergent la un element din  $A$ .

**Demonstrație.** „ $\Rightarrow$ ” Fie  $A$  compactă și fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  un șir de elemente din  $A$ . Cum  $A$  este compactă, ea este mărginită și atunci  $(a_n)_{n \geq 0}$  este mărginit. Cum orice șir mărginit conține un subșir convergent,  $(a_n)_{n \geq 0}$  conține un subșir  $(a_{n_k})_{k \geq 0}$  convergent; fie  $a$  limita acestui subșir. Deoarece  $a$  este limita unui șir de elemente din  $A$ , urmează că  $a \in \overline{A}$ , iar cum  $A$  este închisă,  $A = \overline{A}$ . De aici,  $a \in A$ , deci  $(a_n)_{n \geq 0}$  conține un subșir  $(a_{n_k})_{k \geq 0}$  convergent la  $a \in A$ . Cum  $(a_n)_{n \geq 0}$  era arbitrar, urmează concluzia.

„ $\Leftarrow$ ” Fie  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  pentru care este îndeplinită proprietatea din enunț. Demonstrăm mai întâi că  $A$  este închisă. În acest scop, fie  $a \in \overline{A}$ . Atunci există un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  de elemente din  $A$ ,  $a_n \rightarrow a$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , conform definiției aderenței unei mulțimi. Conform proprietății din enunț, există un subșir  $(a_{n_k})_{k \geq 0}$  al acestuia convergent la un element  $b \in A$ . Deoarece  $(a_{n_k})_{k \geq 0}$  este un subșir al unui șir cu limita  $a$ , el are limita  $a$ , deci  $b = a$  și deci  $a \in A$ . Cum  $a$  era arbitrar, urmează că  $A$  este închisă.

Demonstrăm acum că  $A$  este și mărginită. Mai întâi, presupunem prin reducere la absurd că  $A$  este nemărginită superior. Atunci  $A$  conține un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu limita  $+\infty$ . Conform proprietății din enunț,  $(a_n)_{n \geq 0}$  conține un subșir  $(a_{n_k})_{k \geq 0}$  convergent la  $a \in A$ , ceea ce este o contradicție, deoarece  $(a_{n_k})_{k \geq 0}$  este divergent cu limita  $+\infty$ , fiind subșir al lui  $(a_n)_{n \geq 0}$ . Urmează că presupunerea făcută este falsă, iar  $A$  este mărginită superior. Analog se demonstrează că  $A$  este mărginită inferior. Fiind mărginită superior și inferior,  $A$  este mărginită. Deoarece  $A$  este închisă și mărginită,  $A$  este compactă, ceea ce încheie demonstrația. ■

### Mulțimi dense

Fie  $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Vom spune că  $A$  este densă în  $B$  dacă orice element al lui  $B$  este limita unui șir cu elemente din  $A$ , adică  $B \subset \overline{A}$ . Dacă  $B = \overline{\mathbb{R}}$ , adică orice element al lui  $\overline{\mathbb{R}}$  este limita unui șir cu elemente din  $A$ , atunci  $A$  se numește densă.

Din definiția de mai sus, se observă că dacă  $A$  este densă, atunci  $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$ . Într-adevăr, conform definiției,  $\overline{\mathbb{R}} \subset \overline{A}$ , iar cum  $\overline{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ , urmează că  $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$ .



De asemenea, pentru a se demonstra că  $A$  este densă este suficient să se arate că  $\overline{A} \supset \mathbb{R}$ . În acest sens, dacă  $\overline{A} \supset \mathbb{R}$ , atunci  $\overline{\overline{A}} \supset \overline{\mathbb{R}}$ , iar cum  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ , urmează că  $\overline{A} \supset \overline{\mathbb{R}}$ .

**Exemple** 1.  $\mathbb{Q}$  este densă, deoarece orice număr real este limita unui șir de numere raționale.

2.  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  este de asemenea densă, deoarece orice număr real este limita unui șir de numere iraționale. Altfel,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} &= \overline{\overline{\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\})}} = \overline{c(\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\})} \\ &= c\mathbb{Q} \cup \overset{\circ}{c\{-\infty, +\infty\}} = c\emptyset = \overline{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

deci  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  este densă. S-a folosit faptul că  $\mathbb{Q} \cup \overset{\circ}{\{-\infty, +\infty\}} = \emptyset$ , deoarece  $\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$  nu conține intervale.

3.  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  este densă în  $[0, 1]$ , deoarece  $\overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{[0, 1]} = \overline{\mathbb{R}} \cap [0, 1] = [0, 1]$ .

4.  $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$  nu este densă în  $[0, 1]$ , deoarece  $\overline{A} = A \cup \{0\} \not\supset [0, 1]$ .

Denumirea de mulțime densă este justificată de următoarea teoremă, care afirmă faptul că pentru oricare două numere reale date, o mulțime densă conține măcar un element situat între acestea.

**Teorema 4.16.** Fie  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Atunci  $A$  este densă dacă și numai dacă pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ , există  $a \in A$  astfel ca  $x < a < y$ .

**Demonstrație.** „ $\Rightarrow$ ” Fie  $A$  densă și fie  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ . Atunci  $\frac{x+y}{2} \in (x, y)$ , iar  $(x, y) \in \mathcal{V}\left(\frac{x+y}{2}\right)$ . Cum  $\frac{x+y}{2} \in \overline{A}$ , există un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  de elemente din  $A$  astfel că  $a_n \rightarrow \frac{x+y}{2}$  pentru  $n \rightarrow \infty$  și deoarece  $(x, y) \in \mathcal{V}\left(\frac{x+y}{2}\right)$ , există  $N \in \mathbb{N}$  astfel ca  $a_n \in (x, y)$  pentru orice  $n \geq N$ . De aici,  $x < a_n < y$  și  $a_n \in A$  pentru orice  $n \geq N$ .

„ $\Leftarrow$ ” Fie  $A$  o mulțime cu proprietatea din enunț și fie  $c \in \mathbb{R}$ . Conform proprietății din enunț, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  există  $a_n \in A$  astfel că  $c - \frac{1}{2^n} < a_n < c + \frac{1}{2^n}$ . Deoarece  $c - \frac{1}{2^n} \rightarrow c$ ,  $c + \frac{1}{2^n} \rightarrow c$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , urmează că  $a_n \rightarrow c$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , conform criteriului cleștelui, deci  $c \in \overline{A}$ . Cum  $c$  era arbitrar, urmează că  $A$  este densă. ■

**Exemple** 1.  $\mathbb{Z}$  nu este densă, deoarece nu conține niciun punct situat între 0 și 1.

2.  $(\mathbb{Q} \cap (-\infty, -1]) \cup (\mathbb{Q} \cap [1, \infty))$  nu este densă, deoarece nu conține niciun punct situat între  $-1$  și  $1$ .

## 4.2 Proprietăți de numărare ale lui $\overline{\mathbb{R}}$

### 4.2.1 Numere cardinale

Fie  $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Vom spune că  $A, B$  au același cardinal și vom nota  $A \sim B$  dacă există o funcție bijectivă  $f : A \rightarrow B$ . Se observă că relația „ $\sim$ ” astfel definită între mulțimi este relație de echivalență, întrucât este

1. reflexivă, deoarece  $A \sim A$ , cu  $f : A \rightarrow A$ ,  $f(x) = x$ .
2. simetrică, deoarece dacă  $A \sim B$ , cu  $f : A \rightarrow B$  bijectivă, atunci și  $B \sim A$ , cu  $f^{-1} : B \rightarrow A$  bijectivă.
3. tranzitivă, deoarece dacă  $A \sim B$ , cu  $f : A \rightarrow B$  bijectivă, iar  $B \sim C$ , cu  $g : B \rightarrow C$  bijectivă, atunci  $A \sim C$ , cu  $g \circ f : A \rightarrow C$  bijectivă.

### Mulțimi finite

O mulțime  $A$  va fi numită atunci *finită* dacă este mulțimea vidă (și atunci are cardinal 0, sau are 0 elemente) sau are același cardinal cu  $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$  pentru un  $n \in \mathbb{N}$  oarecare (și atunci se spune că are cardinal  $n$ , sau are  $n$  elemente).

### 4.2.2 Mulțimi numărabile

Fie  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Vom spune că  $A$  este *numărabilă* dacă există o funcție bijectivă  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ . În această situație, cardinalul mulțimii  $A$  se va nota cu  $\aleph_0$  (alef zero). O mulțime care nu este numărabilă se va numi *nenumărabilă*.

Dacă notăm  $f(n) = a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , atunci se observă că  $A$  este numărabilă dacă elementele sale pot fi puse sub forma unui șir cu termeni distincți, anume

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}.$$

O mulțime  $A$  se va numi atunci *cel mult numărabilă* dacă este finită sau numărabilă. Se observă atunci că  $A$  este cel mult numărabilă dacă și numai dacă există o funcție injectivă  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ .

**Exemple** 1.  $A = \mathbb{N}$  este numărabilă. În acest caz,  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = n$  este funcția căutată. Altfel,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , elementele sale putând fi puse sub forma unui șir cu termeni distincți.

2.  $A = \mathbb{Z}$  este numărabilă, deoarece  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ , elementele sale putând fi puse sub forma unui șir cu termeni distincți. Altfel,

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}.$$

este bijectivă.

Din Exemplul 2, în care s-a construit o funcție bijectivă  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ , se observă că o mulțime infinită poate avea același cardinal ca și o submulțime proprie a sa. De asemenea,

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), \quad f_1(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{dacă } x \in [0, \infty) \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

sunt bijective, deci  $\mathbb{R}$ ,  $(0, \infty)$  și  $(-1, 1)$  au același cardinal. De fapt, toate intervalele deschise  $(a, b)$  au același cardinal, întrucât au același cardinal cu  $(-1, 1)$ , acest lucru observându-se din faptul că

$$f_3 : (a, b) \rightarrow (-1, 1), \quad f_3(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}$$

este bijectivă. Similar, intervalele  $(a, \infty)$  au același cardinal cu  $(0, \infty)$  întrucât

$$f_4 : (a, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad f_4(x) = x - a$$

este bijectivă, iar intervalele  $(-\infty, b)$  au același cardinal cu  $(-\infty, 0)$  întrucât

$$f_5 : (-\infty, b) \rightarrow (-\infty, 0), \quad f_5(x) = x - b$$

este bijectivă. Cum  $(0, \infty)$  și  $(-\infty, 0)$  au același cardinal, întrucât

$$f_6 : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0), \quad f_6(x) = -x$$

este bijectivă, urmează că mulțimile  $\mathbb{R}$ ,  $(a, \infty)$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $(a, b)$  au același cardinal pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ . Vom demonstra ulterior că aceste mulțimi nu sunt numărabile.

### Operații cu mulțimi numărabile

Se poate observa că o reuniune finită de mulțimi numărabile este numărabilă. În acest sens, fie  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  o familie finită de mulțimi numărabile. Atunci  $A_i$  poate fi pusă sub forma unui șir cu termeni distincți,  $A_i = \{a_0^i, a_1^i, a_2^i, \dots\}$  pentru orice  $1 \leq i \leq n$ . De aici,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{a_0^1, a_0^2, \dots, a_0^n, a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n, \dots\}.$$

Eliminând eventualele repetări, elementele mulțimii  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  pot fi scrise sub forma unui șir cu termeni distincți, iar  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  este numărabilă. Cu un raționament asemănător, se poate demonstra că dacă  $F$  este finită iar  $A$  este numărabilă, atunci  $A \cup F$  este numărabilă. De asemenea, dacă  $A$  este numărabilă, atunci orice submulțime a sa este finită sau numărabilă.

Vom studia acum situația în care se face reuniunea unei familii numărabile de mulțimi numărabile.

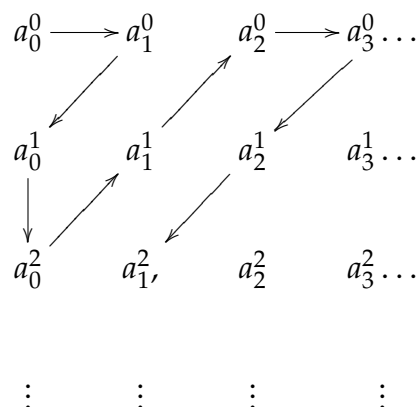
**Teorema 4.17.** Fie  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  o familie de mulțimi numărabile. Atunci  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  este numărabilă.

**Demonstrație.** Fie  $A_i = \{a_0^i, a_1^i, a_2^i, \dots\}$  pentru  $i \in \mathbb{N}$ . Aranjăm elementele mulțim-

ilor  $A_i, i \in \mathbb{N}$  sub forma următorului tabel

$$\begin{array}{cccc}
 a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \dots \\
 a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \dots \\
 a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

în care pe linia  $i, i \geq 0$ , se află elementele mulțimii  $A_i$ . Urmărind săgețile din diagrama de mai jos



se deduce că,

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{a_0^0, a_1^0, a_0^1, a_2^0, a_1^1, a_0^2, \dots\}.$$

Eliminând eventualele repetări, se observă că elementele mulțimii  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  pot fi scrise sub forma unui șir cu termeni distincți, deci  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  este numărabilă. ■

Cu ajutorul acestei teoreme se poate demonstra că mulțimea numerelor raționale este numărabilă.

**Teorema 4.18.**  $\mathbb{Q}$  este numărabilă.

**Demonstrație.** Fie  $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$ ,  $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q}, x < 0\}$ . Atunci,

$$\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{m}{n}, \dots \right\},$$

unde  $A_n = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{m}{n}, \dots \right\}$  conține toate fracțiile pozitive cu numitorul  $n$  și este numărabilă. Atunci  $\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{n \geq 1} A_n$  este numărabilă, conform Teoremei 4.17.

De aici,  $\mathbb{Q}_-$  este numărabilă, deoarece  $\mathbb{Q}_+$  este numărabilă, iar  $f_1 : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_-$ ,  $f_1(x) = -x$  este bijectivă, în concluzie  $\mathbb{Q}_+$  și  $\mathbb{Q}_-$  având același cardinal. Atunci  $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$  este numărabilă, ca reuniune finită de mulțimi numărabile, iar  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$  este de asemenea numărabilă, ca reuniunea dintre o mulțime numărabilă și o mulțime finită. ■

### 4.2.3 Mulțimi de puterea continuului

Vom demonstra în cele ce urmează că intervalul  $[0, 1]$  „are mai multe elemente” decât  $\mathbb{Q}$ , proprietate care nu este evidentă intuitiv, în sensul că elementele lui  $\mathbb{Q}$  se pot număra, iar elementele lui  $[0, 1]$  nu, deși este evident că ambele mulțimi au un număr infinit de elemente.

**Teorema 4.19.** *Intervalul  $[0, 1]$  nu este o mulțime numărabilă.*

**Demonstrație.** Presupunem prin reducere la absurd că  $[0, 1]$  este o mulțime numărabilă. Atunci

$$[0, 1] = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\},$$

intervalul  $[0, 1]$  putându-se pune sub forma unui șir cu termeni distincți.

Notăm  $I_0 = [0, 1]$  și împărțim acest interval în subintervalele  $[0, \frac{1}{3}]$ ,  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ,  $[\frac{2}{3}, 1]$  de lungimi egale; fie  $I_1$  un interval dintre acestea care nu-l conține pe  $x_0$ . Împărțim acum  $I_1$  în trei subintervale de lungimi egale și fie  $I_2$  un interval dintre acestea care nu-l conține pe  $x_1$ . Procedând în mod inductiv, obținem un șir de intervale  $(I_n)_{n \geq 0}$ ,  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $b_n - a_n = \frac{1}{3^n}$ , astfel ca

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \dots \supset I_n \supset \dots$$

și  $I_n$  nu conține  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ . Șirul de intervale  $(I_n)_{n \geq 0}$  este descrescător, cu lungimea tinzând la 0, intersecția tuturor intervalelor fiind un punct.

Urmează că  $\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{x\}$ , iar cum  $x \in [0, 1]$ ,  $x = x_{n_0}$  pentru  $n_0 \in \mathbb{N}$  oarecare, ceea ce este o contradicție, deoarece atunci  $x \notin I_{n_0+1}$ , deci  $x \notin \bigcap_{n \geq 0} I_n$ . ■

Vom nota atunci cardinalul intervalului  $[0, 1]$  cu  $c$  (*puterea continuului*), înțelegând că o mulțime cu cardinal  $c$  „are mai multe elemente” decât o mulțime numărabilă,

de cardinal  $\aleph_0$ . Cum

$$f : [0, 1] \rightarrow (0, 1), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0, \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \\ x, & \text{în rest} \end{cases}$$

este bijectivă, urmează că  $[0, 1]$  și  $(0, 1)$  au același cardinal. Cu ajutorul unei construcții similare se poate demonstra că  $[0, 1]$  și  $[0, 1)$  au același cardinal. Din considerațiile enunțate anterior se deduce că atât mulțimea  $\mathbb{R}$  cât și toate intervalele  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(a, \infty)$  au același cardinal  $c$ .

Din cele ce urmează se va observa că numerele iraționale, fiind în număr mai mare decât cele raționale, sunt „responsabile” pentru faptul că mulțimea numerelor reale nu este numărabilă.

**Corolar 4.19.1.** *Mulțimea  $I$  a numerelor iraționale nu este numărabilă.*

**Demonstrație.** Presupunem prin reducere la absurd că  $I$  este numărabilă. Atunci, deoarece  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ , urmează că  $\mathbb{R}$  este numărabilă, ca reuniunea unui număr finit de mulțimi numărabile, contradicție. ■

## Aplicații

**4.1.** *Precizați interiorul următoarelor mulțimi:*

$A_1 = (0, 1) \cup [2, 3]$ ,  $A_2 = [0, 2) \cup (4, 5] \cup \{6\}$ ,  $A_3 = [2, \infty)$ ,  $A_4 = [-\infty, 5]$ ,  $A_5 = \mathbb{Q} \cap [1, 2]$ ,  $A_6 = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [2, 3]$ ,  $A_7 = \{x \in \mathbb{R}; 4 \leq x < 8\}$ ,  $A_8 = \mathbb{R}^*$ ,  $A_9 = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ .

**4.2.** *Precizați mulțimea derivată și aderența următoarelor mulțimi:*

$A_1 = (0, 1) \cup (1, 2)$ ,  $A_2 = (1, 2) \cup (3, 4) \cup \{7\}$ ,  $A_3 = \mathbb{N}$ ,  $A_4 = (2, \infty)$ ,  $A_5 = \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$ ,  $A_6 = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, 2)$ ,  $A_7 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots\right\}$ ,  $A_8 = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots\right\}$ .

**4.3.** *Fie  $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{6\}$ . Determinați  $A'$ ,  $\overline{A}$ ,  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\text{Fr } A$ . Este  $A$  deschisă? Dar închisă sau compactă?*

**4.4.** *Demonstrați că  $A = \bigcup_{i \geq 0} \left(\frac{2i+1}{i+1}, \frac{2i+3}{i+1}\right)$  este mulțime deschisă.*

**4.5.** Demonstrați că  $A = \bigcap_{i=1}^{10} \left[ \frac{2n+1}{n+1}, \frac{3n+5}{n+2} \right]$  este mulțime închisă.

**4.6.** Precizați dacă următoarele mulțimi sunt dense în mulțimile precizate:

$A_1 = \mathbb{Z}$  în  $B_1 = \mathbb{R}$ ,  $A_2 = \mathbb{N}$  în  $B_2 = \mathbb{Z}$ ,  $A_3 = [0, 1]$  în  $B_3 = [-1, 2]$ ,  $A_4 = \mathbb{Q}^*$  în  $B_4 = \mathbb{R}$ ,  $A_5 = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$  în  $B_5 = [0, 10]$ ,  $A_6 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right\}$  în  $B_6 = [0, 1]$ .

**4.7.** Precizați care dintre următoarele mulțimi sunt numărabile:

$A_1 = [0, 1) \cup (2, 3]$ ,  $A_2 = 2\mathbb{Z} = \{x; x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $A_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $A_4 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ ,  $A_5 = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ ,  $A_6 = \mathbb{R}^n$ ,  $A_7 = \mathbb{Q}^n$ .



# Capitolul 5

## LIMITE DE FUNCȚII

### 5.1 Limita unei funcții într-un punct

Fie o funcție  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ne punem problema de a studia comportarea lui  $f$  în apropierea unui punct dat  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , în sensul de a observa dacă pentru valori  $x$  ale argumentului apropiate de  $x_0$  valorile  $f(x)$  ale funcției se apropie și ele de o valoare reală fixă sau sunt arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici.

Formulată în acest sens, suficient de intuitiv dar relativ imprecis, problema necesită unele clarificări și restricții. Din cele de mai sus, se poate observa faptul că sunt de interes valorile funcției  $f$  pentru argumente apropiate de  $x_0$  și nu valoarea  $f(x_0)$  însăși. De fapt,  $f$  poate nici să nu fie definită în  $x_0$ , adică nu este necesar ca  $x_0$  să aparțină lui  $D$ . Totuși, este necesar ca  $D$  să conțină valori  $x$  ale argumentului oricât de apropiate de  $x_0$ , adică  $x_0$  trebuie să fie punct de acumulare al lui  $D$ . Mai mult, nu este necesar ca  $x_0$  să fie finit, el putând fi  $-\infty$  sau  $+\infty$ .

Pentru o funcție  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și pentru  $x_0 \in D'$ , vom spune că funcția  $f$  are limita  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  în  $x_0$  dacă pentru orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(l)$  există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât pentru orice  $x \in U \cap D$ ,  $x \neq x_0$ , urmează că  $f(x) \in V$ . În acest caz, vom nota  $f(x) \rightarrow l$  pentru  $x \rightarrow x_0$  sau  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , spunându-se și că  $f(x)$  tinde la  $l$  pentru  $x$  tinzând la  $x_0$ .

Se observă că dacă  $x_0$  nu este punct de acumulare al lui  $D$ , adică dacă  $x_0$  este punct izolat al lui  $D$  sau punct exterior lui  $D$ , atunci problema existenței limitei lui  $f$  în  $D$  nu are sens, întrucât  $D$  nu conține valori ale argumentului  $x$  oricât de apropiate de  $x_0$ .

De asemenea, într-un mod similar demonstrației rezultatului corespunzător privind limite de șiruri, se poate demonstra că dacă limita unei funcții există, atunci aceasta este unică.

**Exemple** 1. Fie  $f : (-1, 1) \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 1$ . Atunci  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , iar  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , problema existenței limitei lui  $f$  în  $x_0 = 1$  având sens, deoarece acesta este punct de acumulare al domeniului de definiție, chiar dacă nu aparține acestuia. În același timp, problema existenței limitei lui  $f$  în  $x_0 = 2$  nu are sens, deoarece acesta este punct izolat al domeniului de definiție. În mod similar, problema existenței limitei lui  $f$  în  $x_0 = 3$  nu are sens, deoarece acesta este punct exterior domeniului de definiție.

2. Fie  $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ . Atunci  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ , în timp

ce  $f(0) = 0$ , deci o funcție poate avea într-un punct dat o limită diferită de valoarea funcției în acel punct. În general, dacă  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , iar  $x_0 \in D'$ , se poate întâmpla ca  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ , adică valoarea limitei unei funcții într-un punct poate fi diferită de valoarea funcției în acel punct. Funcțiile care verifică egalitatea  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  se numesc *funcții continue în  $x_0$*  și vor fi studiate în capitolul următor.

### 5.1.1 Caracterizări analitice

Să presupunem pentru moment că  $x_0 \in \mathbb{R}$  și să considerăm vecinătăți  $V$  ale lui  $l$  de tipul  $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$  dacă  $l$  este finit, respectiv  $(M, +\infty]$  dacă  $l = +\infty$  și  $[-\infty, -M)$  dacă  $l = -\infty$ . Conform definiției de mai sus, obținem următoarea *teoremă de caracterizare analitică* a limitei unei funcții într-un punct, numită și *teorema de caracterizare cu  $\varepsilon - \delta$* .

**Teorema 5.1.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D' \cap \mathbb{R}$ . Atunci au loc următoarele afirmații.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$  Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel ca  $|f(x) - l| < \varepsilon$  pentru orice  $x \in D$ ,  $x \neq x_0$  cu proprietatea că  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ .
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$  Pentru orice  $M > 0$  există  $\delta_M > 0$  astfel ca  $f(x) > M$  pentru orice  $x \in D$ ,  $x \neq x_0$  cu proprietatea că  $|x - x_0| < \delta_M$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$  Pentru orice  $M > 0$  există  $\delta_M > 0$  astfel ca  $f(x) < -M$  pentru orice  $x \in D$ ,  $x \neq x_0$  cu proprietatea că  $|x - x_0| < \delta_M$ .

Pentru  $x_0 = +\infty$ , se obține în mod similar următoarea caracterizare a funcțiilor cu limită la  $+\infty$ , un rezultat asemănător având loc și pentru  $x_0 = -\infty$ .

**Teorema 5.2.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $+\infty \in D'$ . Atunci au loc următoarele afirmații.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$  Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel ca  $|f(x) - l| < \varepsilon$  pentru orice  $x \in D$ ,  $x > \delta_\varepsilon$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$  Pentru orice  $M > 0$  există  $\delta_M > 0$  astfel ca  $f(x) > M$  pentru orice  $x \in D$ ,  $x > \delta_M$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$  Pentru orice  $M > 0$  există  $\delta_M > 0$  astfel ca  $f(x) < -M$  pentru orice  $x \in D$ ,  $x > \delta_M$ .

### 5.1.2 Teorema de caracterizare cu șiruri

Teorema următoare, denumită și *teorema de caracterizare cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct* sau *teorema de caracterizare Heine a limitei unei funcții într-un punct*, permite transferul unor proprietăți și reguli de calcul ale limitelor de șiruri la limite de funcții.

**Teorema 5.3.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D'$ . Atunci  $f$  are limita  $l$  în  $x_0$  (finită sau infinită) dacă și numai dacă pentru orice șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu limita  $x_0$  astfel încât  $a_n \in D$ ,  $a_n \neq x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , urmează că șirul valorilor  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  are limita  $l$ .

**Demonstrație.** „ $\Rightarrow$ ” Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  un șir cu limita  $x_0$  astfel încât  $a_n \in D$ ,  $a_n \neq x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ . Fie deasemenea  $V \in \mathcal{V}(l)$  o vecinătate arbitrară a lui  $l$ .

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât pentru orice  $x \in U \cap D$ ,  $x \neq x_0$ , urmează că  $f(x) \in V$ . Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , există un rang  $n_U \in \mathbb{N}$  astfel ca  $a_n \in U$  pentru orice  $n \geq n_U$ , iar deoarece și  $a_n \neq x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , urmează că  $f(a_n) \in V$  pentru orice  $n \geq n_U$ . Cum vecinătatea  $V \in \mathcal{V}(l)$  era arbitrară, urmează că șirul valorilor  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  are limita  $l$ .

„ $\Leftarrow$ ” Dacă pentru orice șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu limita  $x_0$  astfel încât  $a_n \in D$ ,  $a_n \neq x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , șirul valorilor  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  are limita  $l$ , să presupunem prin reducere la absurd că  $l$  nu este limita funcției  $f$  în  $x_0$ . Rezultă atunci că există  $V \in \mathcal{V}(l)$  astfel ca pentru orice  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  există  $x \in U \cap D$ ,  $x \neq x_0$ , astfel ca  $f(x) \notin V$ .

Fie acum un șir de vecinătăți  $(U_n)_{n \geq 0}$  ale lui  $x_0$ ,  $U_n = (x_0 - \frac{1}{n+1}, x_0 + \frac{1}{n+1})$ . Cum  $U_n \in \mathcal{V}(x_0)$  pentru orice  $n \geq 0$ , conform celor de mai sus, există  $a_n \in U_n \cap D$ ,  $a_n \neq x_0$ , astfel ca  $f(a_n) \notin V$  pentru orice  $n \geq 0$ . Deoarece  $a_n \in U_n$ , urmează că  $|a_n - x_0| < \frac{1}{n+1}$  pentru orice  $n \geq 0$ , deci  $(a_n)_{n \geq 0}$  are limita  $x_0$ . Conform ipotezei, șirul valorilor  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  are limita  $l$ , deci vecinătatea  $V$  a lui  $l$  conține toți termenii șirului  $(f(a_n))_{n \geq 0}$ , cu excepția cel mult a unui număr finit, contradicție cu faptul că  $f(a_n) \notin V$  pentru orice  $n \geq 0$ . ■

### Condiții suficiente ca o funcție să nu aibă limită într-un punct

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă este îndeplinită una dintre condițiile următoare, atunci funcția  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nu are limită în  $x_0 \in D'$ .

1. Există două șiruri  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(b_n)_{n \geq 0}$  cu limita  $x_0$  astfel ca  $a_n, b_n \in D$ ,  $a_n, b_n \neq x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , iar șirurile de valori  $(f(a_n))_{n \geq 0}$ ,  $(f(b_n))_{n \geq 0}$  au limite diferite  $l_1$  și  $l_2$ .
2. Există un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu limita  $x_0$  astfel ca  $a_n \in D$ ,  $a_n \neq x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , iar șirul valorilor  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  nu are limită.

### Exemplu

Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  nu are limită la  $+\infty$ . În acest sens, să observăm că pentru șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $a_n = 2n\pi$ , cu limita  $+\infty$ , șirul valorilor  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru șirul  $(b_n)_{n \geq 0}$ ,  $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ , de asemenea cu limita  $+\infty$ , șirul valorilor  $(f(b_n))_{n \geq 0}$  are limita 1, fiind constant egal cu 1.

De fapt, cu un raționament asemănător se poate observa că are loc următoarea proprietate mai generală.

**Teorema 5.4.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodică și neconstantă. Atunci  $f$  nu are limită la  $+\infty$  sau  $-\infty$ .

În particular, teorema de mai sus atestă faptul că funcțiile trigonometrice directe uzuale nu au limită la  $\pm\infty$ .

### 5.1.3 Limite laterale

În situația în care argumentul  $x$  se apropie de punctul  $x_0$  dat doar prin valori mai mici, respectiv mai mari decât  $x_0$ , se obține conceptul de limită laterală.

Pentru o funcție  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și pentru  $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$  (adică pentru  $x_0$  punct de acumulare la stânga al mulțimii  $D$ ), vom spune că funcția  $f$  are limită la stânga  $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$  în  $x_0$  dacă pentru orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(l_s)$  există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât pentru orice  $x \in U \cap D$ ,  $x < x_0$ , urmează că  $f(x) \in V$ . În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s, \text{ sau } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l_s, \text{ sau } f(x_0 - 0) = l_s.$$

Similar, vom spune că funcția  $f$  are limită la dreapta  $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$  în  $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$  (adică pentru  $x_0$  punct de acumulare la dreapta al mulțimii  $D$ ) dacă pentru orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(l_d)$  există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât pentru orice  $x \in U \cap D$ ,  $x > x_0$ , urmează că  $f(x) \in V$ . În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d, \text{ sau } \lim_{x \searrow x_0} f(x) = l_d, \text{ sau } f(x_0 + 0) = l_d.$$

Limitele la stânga și la dreapta ale unei funcții într-un punct  $x_0$  se mai numesc și *limite laterale* în  $x_0$ .

#### Caracterizarea cu șiruri a limitelor laterale într-un punct

În mod analog teoremei de caracterizare cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct se poate demonstra următorul rezultat.

**Teorema 5.5.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Au loc următoarele afirmații.

1. Funcția  $f$  are limită la stânga  $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$  în  $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$  dacă și numai dacă pentru orice șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu limita  $x_0$  astfel încât  $a_n \in D$ ,  $a_n < x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , urmează că șirul valorilor  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  are limită  $l_s$ .
2. Funcția  $f$  are limită la dreapta  $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$  în  $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$  dacă și numai dacă pentru orice șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu limita  $x_0$  astfel încât  $a_n \in D$ ,  $a_n > x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , urmează că șirul valorilor  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  are limită  $l_d$ .

Se poate observa că existența uneia dintre limitele laterale într-un punct nu antrenează automat și existența celeilalte. În anumite situații, se poate întâmpla ca una dintre limitele laterale să existe, în timp ce problema existenței celeilalte nici măcar să nu aibă sens.

**Exemplu** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ . Se observă că, pentru  $x_0 =$

$0$ ,  $l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x = 0$ . Totuși,  $l_d$  nu există, deoarece pentru  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ ,

$a_n \rightarrow 0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ ,  $a_n > 0$  pentru  $n \geq 0$ ,  $f(a_n) = \sin 2n\pi = 0$ , deci  $f(a_n) \rightarrow 0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , în vreme ce pentru  $(b_n)_{n \geq 0}$ ,  $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ,  $b_n \rightarrow 0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ ,  $b_n > 0$  pentru  $n \geq 0$ ,  $f(b_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$ , deci  $f(b_n) \rightarrow 1$  pentru  $n \rightarrow \infty$ .

2. Fie  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ . Se observă că pentru  $x_0 = 0$ ,  $l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$ , în

vreme ce problema existenței lui  $l_s$  nu are sens, deoarece  $0$  nu este punct de acumulare la stânga al lui  $[0, 2]$ .

### Caracterizarea limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul limitelor laterale

Se poate observa că definiția limitei într-un punct conține condiții mai restrictive decât definițiile limitelor laterale, fiind necesar ca  $f(x) \in V$  pentru orice  $x \in U \cap D$ ,  $x \neq x_0$ , nu doar pentru  $x \in U \cap D$ ,  $x < x_0$  (respectiv  $x > x_0$ ). Urmează că dacă  $x_0$  este simultan punct de acumulare la stânga și la dreapta al unei mulțimi  $D$ , iar funcția  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  are limita  $l$  în  $x_0$ , atunci are în mod necesar și limite laterale în  $x_0$  și acestea sunt egale tot cu  $l$ . Reciproca nu este neapărat adevărată, în sensul că o funcție poate avea limite laterale într-un punct fără să aibă neapărat limită în acel punct.

Totuși, se poate demonstra că dacă limitele laterale într-un punct sunt egale, atunci funcția are limită în acel punct, fapt descris de următoarea teoremă.

**Teorema 5.6.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))' \cap (D \cap (x_0, +\infty))'$  (adică  $x_0$  este simultan punct de acumulare la stânga și la dreapta al mulțimii  $D$ ). Atunci  $f$  are limită în  $x_0$  dacă și numai dacă  $f$  are limite laterale în  $x_0$  și

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d.$$

În acest caz,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  este egală cu valoarea comună a limitelor.

**Demonstrație.** „ $\Rightarrow$ ” A fost observat deja că dacă  $f$  are limita  $l$  în  $x_0$ , atunci  $f$  are limite laterale în  $x_0$ , egale tot cu  $l$ .

„ $\Leftarrow$ ” Fie  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  și fie  $V \in \mathcal{V}(l)$  o vecinătate arbitrară a lui

$l$ . Conform definițiilor limitelor laterale, există  $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel că  $f(x) \in V$  pentru orice  $x \in U_1 \cap D, x < x_0$ , respectiv pentru orice  $x \in U_2 \cap D, x > x_0$ . Notând  $U = U_1 \cap U_2$ , urmează că  $f(x) \in V$  pentru  $x \in U \cap D, x \neq x_0$ . Cum  $U \in \mathcal{V}(x_0)$ , iar  $V$  era arbitrară, urmează că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ . ■

**Exercițiu**

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq 2 \\ x + 3, & x > 2 \end{cases}$ . Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel ca  $f$  să aibă limită în  $x_0 = 2$ .

**Soluție**

Cum

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (ax + 1) = 2a + 1; \quad l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5,$$

pentru existența limitei funcției  $f$  în  $x_0 = 2$  este necesar și suficient ca  $2a + 1 = 5$ , deci  $a = 2$ . ■

## 5.1.4 Criterii de existență a limitei unei funcții într-un punct

**Criteriu de existență a unei limite finite**

Ca și în cazul limitelor de șiruri, pentru a arăta că limita unei funcții  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  în  $x_0 \in D'$  este  $l \in \mathbb{R}$ , poate fi studiată diferența dintre valorile  $f(x)$  ale funcției pentru  $x$  apropiat de  $x_0$  și limita  $l$ . În situația în care modulul acestei diferențe este „mic”, în sensul că poate fi majorat cu o funcție cu limita 0 în  $x_0$ , atunci funcția  $f$  are limita  $l$  în  $x_0$ , fapt observat în următorul rezultat, numit și *criteriul majorării*.

**Teorema 5.7.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D'$  și  $l \in \mathbb{R}$ . Dacă există o funcție  $\alpha : D \rightarrow [0, \infty)$  și o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca

$$|f(x) - l| \leq \alpha(x) \quad \text{pentru orice } x \in V \cap D, x \neq x_0,$$

iar  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

**Demonstrație.** Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Cum  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , urmează că există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel ca  $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$  pentru orice  $x \in D$  cu proprietatea că  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ,  $x \neq x_0$ .

Deoarece  $V \in \mathcal{V}(x_0)$ , există  $\delta_1 > 0$  astfel ca  $x_0 \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \subset V$ . De aici, există  $\delta_\varepsilon^1 > 0$ ,  $\delta_\varepsilon^1 = \min(\delta_\varepsilon, \delta_1)$  astfel ca  $|f(x) - l| \leq \alpha(x) < \varepsilon$  pentru orice  $x \in D$ ,  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon^1$ ,  $x \neq x_0$ . Cum  $\varepsilon > 0$  era arbitrar, urmează că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ . ■

### Exercițiu

Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ . Demonstrați că  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

### Soluție

Cum  $|f(x) - l| = |x \sin \frac{1}{x} - 0| \leq |x|$  pentru orice  $x \neq 0$ , iar  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ , urmează conform celor de mai sus că  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . ■

### Criteriu de existență a unei limite infinite

De asemenea, pentru a arăta că o funcție  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  are limita  $+\infty$  în  $x_0 \in D'$ , este suficient să se demonstreze că valorile lui  $f$  sunt minorate pe o vecinătate a lui  $x_0$  de valorile unei funcții  $g$ , cu o expresie posibil mai simplă, iar  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ . Similar, pentru a arăta că o funcție  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  are limita  $-\infty$  în  $x_0 \in D'$  este suficient să se demonstreze că valorile lui  $f$  sunt majorate pe o vecinătate a lui  $x_0$  de valorile unei funcții  $g$ , iar  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ .

**Teorema 5.8.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in D'$ .

1. Dacă există  $g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca  $f(x) \geq g(x)$  pentru orice  $x \in V \cap D$ ,  $x \neq x_0$ , iar  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .
2. Dacă există  $g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca  $f(x) \leq g(x)$  pentru orice  $x \in V \cap D$ ,  $x \neq x_0$ , iar  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

**Demonstrație.** 1. Fie  $g, V$  cu proprietatea din enunț și fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu proprietatea că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ ,  $a_n \in D$ ,  $a_n \neq x_0$  pentru  $n \geq 0$ . Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , există  $n_V \in \mathbb{N}$  astfel ca  $a_n \in V$  pentru orice  $n \geq n_V$ , deci  $f(a_n) \geq g(a_n)$  pentru orice  $n \geq$



$n_V$ . Cum  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = +\infty$ , deci, conform criteriului majorării pentru șiruri,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = +\infty$ . Folosind teorema de caracterizare cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct, urmează că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

Demonstrația celei de-a doua proprietăți este asemănătoare. ■

### Exercițiu

Demonstrați că  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + \sin x) = -\infty$ .

### Soluție

Cum  $-x + \sin x \leq -x + 1$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , iar  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + 1) = -\infty$ , urmează conform celor de mai sus că  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + \sin x) = -\infty$ . ■

A se nota că, în exemplul de mai sus,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + \sin x)$  există, deși funcția sinus, ca funcție de sine stătătoare, nu are limită la  $+\infty$ .

### Criteriul Cauchy-Bolzano

În cazul șirurilor de numere reale, se putea demonstra că un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent fără a-i cunoaște limita, arătând că acesta este șir Cauchy. În cazul funcțiilor, se poate obține un criteriu analog de existență a unei limite finite într-un punct, numit *criteriul Cauchy-Bolzano*.

**Teorema 5.9.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D' \cap \mathbb{R}$ . Atunci  $f$  are limită finită în  $x_0$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel ca  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  pentru orice  $x, y \in D$ ,  $x, y \neq x_0$ , astfel ca  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ,  $|y - x_0| < \delta_\varepsilon$ .

**Demonstrație.** „ $\Rightarrow$ ” Fie  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$  și fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Conform caracterizării cu  $\varepsilon - \delta$  a limitei unei funcții într-un punct, există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel ca  $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  pentru orice  $x \in D$ ,  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ,  $x \neq x_0$ . Atunci

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pentru orice  $x, y \in D$ ,  $x, y \neq x_0$ , astfel ca  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ,  $|y - x_0| < \delta_\varepsilon$ .

„ $\Leftarrow$ ” Fie un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $a_n \in D$ ,  $a_n \neq x_0$  pentru  $n \geq 0$  cu proprietatea că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ . Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Există atunci  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel ca  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  pentru orice  $x, y \in D$ ,  $x, y \neq x_0$ , astfel ca  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ,  $|y - x_0| < \delta_\varepsilon$ . Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , există un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel că  $|a_n - x_0| < \delta_\varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ . Atunci  $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$  pentru orice  $m, n \geq n_\varepsilon$ , deci șirul  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  este șir Cauchy. Fiind șir Cauchy,  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  este convergent; fie  $l \in \mathbb{R}$  limita sa.

Demonstrăm acum că limita  $l$  nu depinde de șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$  ales. În acest sens, fie un alt șir  $(b_n)_{n \geq 0}$ ,  $b_n \in D$ ,  $b_n \neq x_0$  pentru  $n \geq 0$ , cu proprietatea că  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$ . Atunci, ca mai sus,  $(f(b_n))_{n \geq 0}$  este convergent; fie  $l_1 \in \mathbb{R}$  limita sa. Construim cu ajutorul șirurilor  $(a_n)_{n \geq 0}$  și  $(b_n)_{n \geq 0}$  șirul  $(c_n)_{n \geq 0}$ , obținut prin intercalare,

$$c_0 = a_0, c_1 = b_0, c_2 = a_1, c_3 = b_1, \dots, c_{2n} = a_n, c_{2n+1} = b_n, \dots$$

Ca mai sus, se obține că  $(f(c_n))_{n \geq 0}$  este convergent, iar cum subșirurile sale  $(f(c_{2n}))_{n \geq 0} = (f(a_n))_{n \geq 0}$ ,  $(f(c_{2n+1}))_{n \geq 0} = (f(b_n))_{n \geq 0}$  sunt convergente, cu limitele  $l$ , respectiv  $l_1$ , urmează că  $l = l_1$ , iar limita  $l$  nu depinde de șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$  ales. Conform criteriului de caracterizare cu șiruri, urmează atunci că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ . ■

### 5.1.5 Proprietăți ale funcțiilor cu limită

În situația în care o funcție are limită finită într-un punct  $x_0$ , valorile sale  $f(x)$  sunt apropiate de valoarea (finită) a limitei pentru valori  $x$  ale argumentului suficient de apropiate de  $x_0$ , neputând deveni arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici, pentru aceste valori ale argumentului. Acest lucru este exprimat în următoarea teoremă.

#### Mărginirea funcțiilor cu limită

**Teorema 5.10.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D'$  astfel încât  $f$  are limită finită în  $x_0$ . Atunci există o vecinătate a lui  $x_0$  pe care  $f$  este mărginită.

**Demonstrație.** Fie  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$  și fie  $V = (l - 1, l + 1)$  o vecinătate a lui  $l$ . Conform definiției limitei, există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca  $f(x) \in V$  pentru orice  $x \in U \cap D$ ,  $x \neq x_0$ . Atunci  $|f(x)| < |l| + 1$  pentru orice  $x \in U \cap D$ ,  $x \neq x_0$ , deci  $f$  este mărginită pe  $U$ . ■

#### Proprietatea de păstrare a semnului

**Teorema 5.11.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D'$  astfel încât  $f$  are limită nenulă în  $x_0$ . Atunci există o vecinătate a lui  $x_0$  pe care  $f$  păstrează semnul limitei.

**Demonstrație.** Fie  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$  și fie  $V$  o vecinătate a lui  $l$  formată din numere cu același semn ca și  $l$ ,  $V = (\frac{l}{2}, \frac{3l}{2})$  (dacă  $l > 0$ ),  $V = (\frac{3l}{2}, \frac{l}{2})$  (dacă  $l < 0$ ),

$V = (0, \infty]$  (dacă  $l = +\infty$ ),  $V = (-\infty, 0)$  (dacă  $l = -\infty$ ). Conform definiției limitei, există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca  $f(x) \in V$  pentru orice  $x \in U \cap D$ ,  $x \neq x_0$ , de unde  $f(x)$  are același semn cu  $l$  pentru  $x \in U \cap D$ ,  $x \neq x_0$ . ■

### Trecerea la limită în inegalități

Teorema ce urmează, numită și *teorema de trecere la limită în inegalități* exprimă faptul că inegalitățile (nestrict) dintre două funcții se păstrează prin trecere la limită.

**Teorema 5.12.** Fie două funcții  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D'$  cu proprietățile

1. Există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca  $f(x) \leq g(x)$  pentru  $x \in V \cap D$ ,  $x \neq x_0$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Atunci  $l_1 \leq l_2$ .

**Demonstrație.** Presupunem prin reducere la absurd că  $l_1 > l_2$ . Conform proprietății de separație Hausdorff,  $l_1$  și  $l_2$  pot fi separate prin vecinătăți, adică există  $V_1 \in \mathcal{V}(l_1)$  și  $V_2 \in \mathcal{V}(l_2)$  astfel ca  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  (și deci  $z_1 > z_2$  pentru orice  $z_1 \in V_1$  și  $z_2 \in V_2$ ).

Conform definiției limitei, există două vecinătăți  $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca  $f(x) \in V_1$  pentru  $x \in U_1 \cap D$ ,  $x \neq x_0$  și  $g(x) \in V_2$  pentru  $x \in U_2 \cap D$ ,  $x \neq x_0$ , ambele relații fiind satisfăcute pentru  $x \in U \cap D$ ,  $x \neq x_0$ , unde  $U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ . Rezultă de aici că  $f(x) > g(x)$  pentru orice  $x \in U \cap D$ . Cum  $U, V \in \mathcal{V}(x_0)$ , urmează că  $f(x) > g(x)$  pentru orice  $x \in U \cap V \cap D$ , contradicție. ■

Inegalitățile nestrict dintre termenii a două funcții nu se păstrează neapărat prin trecere la limită. Aceasta se poate observa considerând funcțiile  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  și  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{2}{x}$  pentru care  $f(x) < g(x)$  pentru orice  $x > 0$ , dar  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ , inegalitatea strictă dintre valorile lui  $f$  și  $g$  transformându-se în egalitate.

### Teorema cleștelui

Teorema de mai jos, numită și *teorema cleștelui* (pentru funcții), ne permite să calculăm limita într-un punct a unei funcții care, pe o vecinătate a acelui punct, poate fi încadrată între alte două funcții având aceeași limită.

**Teorema 5.13.** Fie trei funcții  $a, f, b : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D'$  cu proprietățile

1. Există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca

$$a(x) \leq f(x) \leq b(x) \quad \text{pentru } x \in V \cap D, x \neq x_0.$$

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} b(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Atunci există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , iar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

**Demonstrație.** Dacă  $l = +\infty$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , folosind faptul că  $a(x) \leq f(x)$  pentru orice  $x \in V \cap D, x \neq x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = +\infty$  și Teorema 5.8. În situația în care  $l = -\infty$  se raționează analog.

Fie acum  $l \in \mathbb{R}$ . Există atunci două vecinătăți  $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca  $|a(x) - l| < \varepsilon$  pentru orice  $x \in U_1 \cap D, x \neq x_0$ , respectiv  $|b(x) - l| < \varepsilon$  pentru orice  $x \in U_2 \cap D, x \neq x_0$ . Urmează atunci că

$$-\varepsilon < a(x) - l \leq f(x) - l \leq b(x) - l < \varepsilon \quad \text{pentru } x \in U_1 \cap U_2 \cap V \cap D,$$

de unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ . ■

### Limita funcției compuse

Următoarea teoremă de calcul a *limitei funcției compuse* stă la baza calculului limitelor cu ajutorul schimbărilor de variabilă.

**Teorema 5.14.** Fie  $u : D \subset \mathbb{R} \rightarrow E, f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D'$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$  și  $u(x) \neq u_0$  pentru  $x \in V \cap D, x \neq x_0$ , unde  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  este o vecinătate a lui  $x_0$ , iar  $\lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = l$ . Atunci funcția compusă  $f \circ u : D \rightarrow \mathbb{R}$  are limită în  $x_0$ , iar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(u(x))) = \lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = l.$$

**Demonstrație.** Fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  un șir astfel ca  $a_n \in D, a_n \neq x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ . Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , există un rang  $n_V \in \mathbb{N}$  astfel ca  $x_n \in V$  pentru orice  $n \geq n_V$  și atunci  $u(a_n) \neq u_0$  pentru orice  $n \geq n_V$ . Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , iar  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$ , urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(a_n) = u_0$ , și atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f \circ u)(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u(a_n)) = l$ , deoarece  $\lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = l$ . Urmează atunci că  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ u)(x) = l$ . ■

**Corolar 5.14.1.** Dacă  $u : D \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ ,  $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D'$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$ , iar  $\lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = f(u_0)$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(u(x))) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)).$$

**Corolar 5.14.2.** Dacă  $u : D \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ ,  $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D'$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0)$ , iar  $\lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = f(u_0)$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(u(x))) = f(u(x_0)).$$

### Limitele funcțiilor monotone

Pentru cazul șirurilor, s-a demonstrat că orice șir monoton are limită, finită sau nu. Acest lucru va rămâne adevărat și în cazul funcțiilor monotone, cu precizarea că de această dată este asigurată doar existența limitelor laterale. În acest sens, teorema următoare precizează faptul că funcțiile monotone au limite laterale în orice punct de acumulare al domeniului lor de definiție.

**Teorema 5.15.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  monotonă, și  $x_0 \in D'$ . Atunci există limitele laterale  $l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  și  $l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ , finite sau nu.

**Demonstrație.** Pentru fixarea ideilor, să presupunem că  $f$  este crescătoare, în cazul în care  $f$  este descrescătoare raționându-se analog.

Demonstrăm mai întâi că dacă  $(a_n)_{n \geq 0}$  este un șir monoton crescător astfel ca  $a_n \in D$ ,  $a_n \neq x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , atunci  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  are limită, independentă de alegerea șirului  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu aceste proprietăți. În acest sens, să observăm mai întâi că, deoarece  $f$  este crescătoare iar  $(a_n)_{n \geq 0}$  este monoton crescător, șirul  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  este de asemenea monoton crescător, deci are o limită  $l$ , finită sau nu. Fie acum  $(b_n)_{n \geq 0}$  un alt șir monoton crescător astfel ca  $b_n \in D$ ,  $b_n \neq x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$ . Se observă în mod analog că șirul  $(f(b_n))_{n \geq 0}$  este monoton crescător, deci are o limită  $l_1$ , finită sau nu.

Fie acum șirul intercalat  $(c_k)_{k \geq 0}$  definit prin  $c_0 = a_0$ ,  $c_{2k+1} = b_n$ , unde  $n$  este primul indice pentru care  $b_n > c_{2k}$ ,  $c_{2k+2} = a_n$ , unde  $n$  este primul indice pentru care  $a_n > c_{2k+1}$ . Datorită modului de construcție,  $(c_k)_{k \geq 0}$  este monoton crescător cu limita  $x_0$ , deci  $(f(c_k))_{k \geq 0}$  este de asemenea monoton crescător, cu limita

$l_2$ . Cum  $(f(c_{2k}))_{k \geq 0}$  și  $(f(c_{2k+1}))_{k \geq 0}$  sunt subșiruri ale șirurilor  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  și respectiv  $(f(b_n))_{n \geq 0}$ , ele au limitele  $l$ , respectiv  $l_1$ , iar deoarece  $(f(c_k))_{k \geq 0}$  are limita  $l_2$ , urmează că  $l = l_1 = l_2$ , deci limita șirului  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  nu depinde de alegerea șirului  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu proprietățile cerute.

Fie acum  $(y_n)_{n \geq 0}$  un șir oarecare, nu neapărat monoton, astfel ca  $y_n \in D$ ,  $y_n < x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ . Fie deasemenea șirurile  $(u_n)_{n \geq 0}$  și  $(v_n)_{n \geq 0}$  definite prin

$$u_n = \inf \{y_n, y_{n+1}, \dots\}; \quad v_n = \max \{y_0, y_1, \dots, y_n\}.$$

Se observă atunci că  $u_n \leq y_n \leq v_n$  pentru  $n \geq 0$ , iar șirurile  $(u_n)_{n \geq 0}$  și  $(v_n)_{n \geq 0}$  sunt monoton crescătoare, cu limita  $x_0$ . Atunci șirurile  $(f(u_n))_{n \geq 0}$  și  $(f(v_n))_{n \geq 0}$  sunt deasemenea monoton crescătoare, cu limita  $l$ , iar cum

$$f(u_n) \leq f(y_n) \leq f(v_n) \quad \text{pentru } n \geq 0,$$

urmează conform criteriului cleștelui pentru șiruri că  $(f(y_n))_{n \geq 0}$  are deasemenea limita  $l$ .

Din cele de mai sus, urmează că există limita la stânga  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ , finită sau infinită, existența limitei la dreapta  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  obținându-se analog. ■

Cum limita într-un punct a unei funcții este influențată doar de valorile funcției pentru argumente dintr-o vecinătate a aceluși punct, se poate observa că în teorema de mai sus este de fapt suficient ca funcția să fie monotonă doar pe o vecinătate a aceluși punct.

### Produsul dintre o funcție cu limita 0 și o funcție mărginită

**Teorema 5.16.** Fie  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D'$ . Dacă  $f$  este mărginită pe o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$ , iar  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ .

**Demonstrație.** Deoarece  $f$  este mărginită pe  $V$ , există  $M \in \mathbb{R}$  astfel ca  $|f(x)| \leq M$  pentru  $x \in V \cap D$ . Fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  un șir astfel ca  $a_n \in D$ ,  $a_n \neq x_0$  pentru orice  $n \geq 0$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ . Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , urmează că există un rang  $n_V \in \mathbb{N}$  astfel ca  $a_n \in V$  pentru orice  $n \geq n_V$ , deci  $|f(a_n)| \leq M$  pentru orice  $n \geq n_V$ . Atunci  $|f(a_n)g(a_n)| = |f(a_n)||g(a_n)| \leq M|g(a_n)|$ , pentru orice  $n \geq n_V$ , deci

$$-M|g(a_n)| \leq f(a_n)g(a_n) \leq M|g(a_n)| \quad \text{pentru orice } n \geq n_V.$$

Cum  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = 0$ , și atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} |g(a_n)| = 0$  de unde, conform criteriului cleștelui,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)g(a_n) = 0$ . Cum  $(a_n)_{n \geq 0}$  era arbitrar, urmează că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ . ■

În teorema de mai sus, trebuie remarcat faptul că nu este necesar ca  $f$  să aibă limită în  $x_0$ .

### Exercițiu

Determinați  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin^2 \frac{1}{x} \right)$ .

### Soluție

Deoarece  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$ , este mărginită pe o vecinătate a lui  $x_0 = 0$  (de fapt,  $f$  este mărginită pe întreg domeniul de definiție, deoarece  $|f(x)| \leq 1$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^*$ ), iar  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x$  are limita 0 în  $x_0 = 0$ , urmează că  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin^2 \frac{1}{x} \right) = 0$ , conform celor de mai sus. ■

## 5.2 Proprietăți de calcul ale limitelor de funcții

### 5.2.1 Operații cu limite de funcții

Cu ajutorul teoremei de caracterizare cu șiruri a limitelor de funcții, se pot deduce următoarele proprietăți ale operațiilor cu limite de funcții cu ajutorul proprietăților corespunzătoare ale operațiilor cu limite de șiruri.

**Teorema 5.17.** Fie  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D'$  astfel încât există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ .

1. Dacă suma  $l_1 + l_2$  a limitelor are sens, atunci funcția sumă  $f + g$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) + \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

(caz exceptat: una dintre limitele  $l_1, l_2$  este  $+\infty$  iar cealaltă  $-\infty$ ).

2. Dacă produsul  $l_1 l_2$  al limitelor are sens, atunci funcția produs  $fg$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

(caz exceptat: una dintre limitele  $l_1, l_2$  este 0 iar cealaltă este  $+\infty$  sau  $-\infty$ ).

3.  $\alpha f$  are limită în  $x_0$  pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ , iar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = \alpha \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right), \text{ pentru } \alpha \neq 0,$$

$$\text{iar } \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = 0, \text{ pentru } \alpha = 0.$$

4. Dacă raportul  $\frac{l_1}{l_2}$  al limitelor are sens, iar  $\frac{f}{g}$  este bine definită pe o vecinătate a lui  $x_0$ , atunci  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)}{\left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)}$$

(cazuri exceptate:  $l_2$  este 0, sau ambele limite  $l_1, l_2$  sunt infinite).

5. Dacă  $l_1^{l_2}$  are sens, iar  $f^g$  este bine definită pe o vecinătate a lui  $x_0$  atunci  $f^g$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)}) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)}$$

(cazuri exceptate:  $(l_1, l_2) = (0, 0)$ ,  $(l_1, l_2) = (+\infty, 0)$ ,  $(l_1, l_2) = (1, +\infty)$ ).

Pentru studiul limitei raportului a două funcții, se poate observa că are loc și următorul rezultat care completează (parțial) teorema de mai sus pentru cazul în care  $l_2 = 0$ .

**Teorema 5.18.** Fie  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D'$  astfel încât există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \neq 0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .

1. Dacă  $\frac{f}{g}$  este bine definită pe o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$ , iar  $g(x) > 0$  pentru orice  $x \in V \cap D$ ,  $x \neq x_0$ , atunci  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = +\infty \cdot \text{sgn}(l_1)$$

2. Dacă  $\frac{f}{g}$  este bine definită pe o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$ , iar  $g(x) < 0$  pentru orice  $x \in V \cap D$ ,  $x \neq x_0$ , atunci  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = -\infty \cdot \text{sgn}(l_1)$$



Cazurile exceptate din teoremele de mai sus, numite, pe scurt, și *cazuri de nedeterminare*, pot fi exprimate pe scurt sub forma  $\infty - \infty$  (pentru sumă),  $0 \cdot \infty$  (pentru produs),  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$  (pentru raport),  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$  (pentru exponențiere).

Se poate de asemenea demonstra prin inducție matematică faptul că proprietățile 1 și 3 din Teorema 5.17 rămân valabile și pentru mai mult de două funcții. În speță, are loc următorul rezultat.

**Teorema 5.19.** Fie  $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D'$  astfel încât există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = l_1, \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l_2, \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n$ .

1. Dacă suma  $l_1 + l_2 + \dots + l_n$  a limitelor are sens, atunci funcția sumă  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

2. Dacă produsul  $l_1 l_2 \dots l_n$  al limitelor are sens, atunci funcția produs  $f_1 f_2 \dots f_n$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \right) \cdot \dots \cdot \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

În particular,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x)^n) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \right)^n.$$

## 5.2.2 Limitele funcțiilor elementare

### Limitele funcțiilor polinomiale

Fie  $P$  o funcție polinomială de grad  $k \geq 1$ ,

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Pentru calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , se observă că, pentru orice  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a_l x^l) = a_l \left( \lim_{x \rightarrow x_0} x^l \right) = a_l \left( \lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^l = a_l x_0^l.$$

Se obține că

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_k x^k) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{k-1} x^{k-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 x) + a_0 \\ &= a_k x_0^k + a_{k-1} x_0^{k-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 \\ &= P(x_0).\end{aligned}$$

De aici, valoarea limitei funcției polinomiale într-un punct  $x_0 \in \mathbb{R}$  se obține calculând valoarea funcției polinomiale în acel punct.

**Exemple** 1.  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 4x + 5) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 25.$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^3 - 2x^2 + 6) = 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 = 8.$

La fel ca și în cazul șirurilor, pentru calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)$  se va scoate factor comun forțat  $x^k$  ( $k = \text{grad } P$ ). Se obține că

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^k \left( a_k + a_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{k-1}} + a_0 \frac{1}{x^k} \right) \\ &= \infty \cdot a_k = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui  $P$  este de asemenea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_k x^k = \infty \cdot a_k = \lim_{x \rightarrow \infty} P(x),$$

de unde se poate remarca faptul că limita la  $+\infty$  a lui  $P(x)$  este egală cu limita termenului de grad maxim al lui  $P$ .

Cu un raționament similar, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = (-\infty)^k \cdot a_k$$

deci și limita la  $-\infty$  a lui  $P(x)$  este egală cu limita termenului de grad maxim al lui  $P$ .

**Exemple** 1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + 3x^2 - 2x + 1) = (+\infty)^5 = +\infty.$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}x + \sqrt{3}) = -2(-\infty)^3 = +\infty.$

**Limitele funcțiilor raționale**

Fie  $P, Q$  două funcții polinomiale de grad  $k$ , respectiv  $l$ , unde  $k, l \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0, \\ Q : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, Q(x) = b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0. \end{aligned}$$

Pentru calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{P(x)}{Q(x)} \right)$  într-un punct  $x_0 \in \mathbb{R}$  în care numitorul nu se anulează ( $Q(x_0) \neq 0$ ), se observă că, datorită proprietăților operațiilor cu limite de funcții și celor demonstrate mai sus privitoare la limita unui polinom într-un punct  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

De aici, *valoarea limitei funcției raționale într-un punct  $x_0 \in \mathbb{R}$  în care nu se anulează numitorul se obține calculând valoarea funcției polinomiale în acel punct.*

Dacă  $x_0$  este rădăcină a lui  $Q$  ( $Q(x_0) = 0$ ), atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^p P_1(x)}{(x - x_0)^q Q_1(x)},$$

unde  $p, q$  sunt ordinele de multiplicitate ale rădăcinii  $x_0$  pentru funcțiile polinomiale  $P$ , respectiv  $Q$ , iar  $P_1(x_0) \neq 0, Q_1(x_0) \neq 0$ . Se obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \begin{cases} 0, & p > q \\ \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & p = q \\ +\infty \cdot \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & q > p, q - p \text{ par} \\ \text{nu există,} & q > p, q - p \text{ impar} \end{cases}.$$

**Exemple** 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x + 1}{2x^4 - 5x + 9} = \frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2 + 9} = \frac{13}{31}.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x-3)}{(x-1)^2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{2}{3}.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)(x+2)}.$$

Atunci  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2}$  nu există, deoarece  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0+)} \cdot 3 = -\infty$ , iar  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0-)} \cdot 3 = +\infty$ .

Considerăm limita  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{P(x)}{Q(x)} \right)$ . La fel ca și în cazul șirurilor, pentru calculul acesteia se va scoate factor comun forțat  $x^k$  de la numărător ( $k = \text{grad } P$ ), respectiv  $x^l$  de la numitor ( $l = \text{grad } Q$ ). Se obține că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{P(x)}{Q(x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k \left( a_k + a_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{k-1}} + a_0 \frac{1}{x^k} \right)}{x^l \left( b_l + b_{l-1} \frac{1}{x} + \dots + b_1 \frac{1}{x^{l-1}} + b_0 \frac{1}{x^l} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{k-l} \frac{a_k}{b_l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k = l \\ +\infty \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k > l \end{cases} \end{aligned}$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k}{b_l x^l} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{k-l} \frac{a_k}{b_l},$$

de unde se poate remarca faptul că *limita lui  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui  $P$  și  $Q$ , pentru  $x \rightarrow +\infty$ . Cu un raționament similar, se poate obține că același lucru se întâmplă și pentru  $x \rightarrow -\infty$ .*

**Exemple** 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 2}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(3 + 4\frac{1}{x} + 2\frac{2}{x^2})}{x^2(2 - 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{3}{2}.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 3x^2 + x - 1}{3x^2 + 4x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(-2 + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^2(3 + 4\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2})} = (-\infty) \cdot \frac{-2}{3} = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 2}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(3 + 4\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}{x^3(4 + 3\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})} = 0 \cdot \frac{3}{4} = 0.$$

**Limitele radicalilor**

Se poate observa că, dacă  $x_0 \in \mathbb{R}$  și  $n$  este un număr natural impar, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\frac{1}{n}}) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^{\frac{1}{n}} = x_0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_0},$$

iar, cu același raționament,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty.$$

În mod similar, dacă  $x_0 \geq 0$  și  $n$  este un număr natural par,  $n \geq 2$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

**Exercițiu**

Determinați valoarea limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x).$$

**Soluție**

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x^2 + 1) = +\infty$ , urmează, conform teoremei limitei funcției compuse și celor de mai sus, că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} = +\infty$ , ceea ce înseamnă că limita de mai sus prezintă o nedeterminare de forma  $\infty - \infty$ . Pentru înlăturarea acesteia se amplifică cu expresia conjugată celei din enunț. Urmează că

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x)(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2)}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 1 - x^3}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}{x^2(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

■

### Limitele funcțiilor exponențiale

Fie  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , și fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x$ . Se poate observa că, dacă  $x_0 \in \mathbb{R}$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} a \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} x} = a^{x_0}.$$

Pentru  $a > 1$ , se observă că  $f$  este strict crescătoare, iar

$$a^x \geq a^{[x]} = (1 + (a - 1))^{[x]} \geq 1 + (a - 1)[x],$$

conform inegalității lui Bernoulli, de unde urmează conform criteriului majorării că  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = +\infty$ . De asemenea,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{a^u} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu notația  $u = -x$ , conform teoremei limitei funcției compuse.

Dacă  $a \in (0, 1)$ , atunci  $f$  este strict descrescătoare, iar  $a = \frac{1}{b}$ ,  $b > 1$ . Urmează că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu un raționament asemănător obținându-se că  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ .

Adăugând și cazul  $a = 1$ , în cazul în care  $f$  este identic egală cu 1, discuția de mai sus se poate sistematiza sub următoarea formă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a \in (0, 1) \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a \in (0, 1) \end{cases}.$$

### Limitele funcțiilor logaritmice

Fie  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , și fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_a x$ . Mai întâi, se observă că  $f$  este strict crescătoare pentru  $a > 1$ , respectiv strict descrescătoare pentru  $a \in (0, 1)$ .

Dacă  $x_0 \in \mathbb{R}$ , atunci, cum  $f$  este strict monotonă, ea are limite laterale în  $x_0$ . Mai mult, deoarece  $a^{\log_a x} = x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^{\log_a x}) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (a^{\log_a x}) = \left( \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} a \right)^{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x)} = a^{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x)},$$

urmează că  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} a^{\log_a x} = x_0$ , deci  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x) = \log_a x_0$ . În mod similar se demonstrează că  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} (\log_a x) = \log_a x_0$ , deci există  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_a x) = \log_a x_0$ , deoarece limitele laterale sunt ambele egale cu această valoare.

Cu un raționament analog celui realizat pentru  $x_0 \in \mathbb{R}$ , obținem că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & a \in (0, 1) \end{cases}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ \infty, & a \in (0, 1) \end{cases}.$$

### Limitele unor funcții trigonometrice

Mai întâi, reamintim inegalitatea

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \text{pentru } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Ținând seama că  $\sin(-x) = -\sin x$  și  $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$  pentru  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , urmează că

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|, \quad \text{pentru } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

De asemenea,

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|, \quad \text{pentru } x \in (-\infty, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, +\infty)$$

deci

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R}.$$

**Funcția sinus**

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  și fie  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Se observă că

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|,$$

de unde, conform criteriului majorării,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R}.$$

S-a observat deja că funcția sinus nu are limită nici la  $+\infty$  nici la  $-\infty$ . Într-adevăr, pentru șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $a_n = 2n\pi$ , cu limita  $+\infty$ , șirul valorilor  $(\sin(a_n))_{n \geq 0}$  are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru șirul  $(b_n)_{n \geq 0}$ ,  $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ , de asemenea cu limita  $+\infty$ , șirul valorilor  $(\sin(b_n))_{n \geq 0}$  are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcția sinus nu are limită la  $+\infty$ , în mod analog demonstrându-se că funcția sinus nu are limită nici la  $-\infty$ .

**Funcția cosinus**

În mod similar celor de mai sus se demonstrează că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R},$$

în vreme ce nici funcția cosinus nu are limită nici la  $+\infty$  nici la  $-\infty$ .

**Funcția tangentă**

Fie funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ . Conform inegalităților

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0| \leq \left| \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x_0}{\cos x_0} \right| = \left| \frac{\sin(x - x_0)}{\cos x \cos x_0} \right|,$$

valabile pentru  $x, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \right\}$ , urmează că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x < \frac{\pi}{2} + n\pi}} \operatorname{tg} x = \lim_{\substack{u \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ u < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg}(u + n\pi) = \lim_{\substack{u \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} u = +\infty$$



ținând seama de teorema limitei funcției compuse și de faptul că funcția tangentă este periodică de perioadă  $\pi$ . În mod similar se demonstrează că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x > \frac{\pi}{2} + n\pi}} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Se poate observa că funcția tangentă nu are limită nici la  $+\infty$  nici la  $-\infty$ . Într-adevăr, pentru șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $a_n = n\pi$ , cu limita  $+\infty$ , șirul valorilor  $(\operatorname{tg}(a_n))_{n \geq 0}$  are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru șirul  $(b_n)_{n \geq 0}$ ,  $b_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$ , de asemenea cu limita  $+\infty$ , șirul valorilor  $(\operatorname{tg}(b_n))_{n \geq 0}$  are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcția tangentă nu are limită la  $+\infty$ , în mod analog raționându-se pentru  $x \rightarrow -\infty$ .

### Funcția cotangentă

Fie funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ . Ca mai sus, se obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n\pi \\ x > n\pi}} \operatorname{ctg} x = \infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow n\pi \\ x < n\pi}} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

Se poate observa că nici funcția cotangentă nu are limită nici la  $+\infty$  nici la  $-\infty$ .

### Funcția arcsinus

Fie funcția  $f : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $f(x) = \operatorname{arcsin} x$ . Folosind un raționament analog celui utilizat pentru a stabili limitele funcției logaritmice, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arcsin} x = \operatorname{arcsin} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1, 1].$$

### Funcția arccosinus

Fie funcția  $f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ ,  $f(x) = \operatorname{arccos} x$ . Ca mai sus, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arccos} x = \operatorname{arccos} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1, 1].$$

### Funcția arctangentă

Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ . Ca mai sus, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

### Funcția arccotangentă

Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ . Ca mai sus, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0 \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \pi.$$

### 5.2.3 Limite fundamentale

Au loc relațiile:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$6) \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e,$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e,$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e,$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p, p \in \mathbb{R}^*.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Deoarece  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$  pentru  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , urmează că

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{pentru } x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

de unde, conform criteriului cleștelui, urmează că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Cu un rațion-

ament asemănător,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$ , de unde  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , limitele laterale fiind ambele egale cu 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

Cu schimbarea de variabilă  $\arcsin x = u$ , urmează că  $x = \sin u$ , iar  $u \rightarrow 0$  pentru  $x \rightarrow 0$ . Conform teoremei limitei funcției compuse, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Deoarece  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$  pentru  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , urmează că

$$1 < \frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{pentru } x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

de unde, conform criteriului cleștelui, urmează că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ . Cu un raționament asemănător,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ , de unde  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ , limitele laterale fiind ambele egale cu 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Cu schimbarea de variabilă  $\operatorname{arctg} x = u$ , urmează că  $x = \operatorname{tg} u$ , iar  $u \rightarrow 0$  pentru  $x \rightarrow 0$ . Conform teoremei limitei funcției compuse, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} u}{u}} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

A fost demonstrat în capitolul anterior că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ . Fie  $x > 0$ . Să notăm  $n = \left[ \frac{1}{x} \right]$ . Cum  $\left[ \frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} < \left[ \frac{1}{x} \right] + 1$ , urmează că  $n \leq \frac{1}{x} < n + 1$ , deci  $\frac{1}{n} \geq x > \frac{1}{n+1}$ . În concluzie,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

adică

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Cum  $n \rightarrow \infty$  pentru  $x \rightarrow 0$ ,  $x > 0$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , urmează conform criteriului cleștelui că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ . În mod asemănător se demonstrează că

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ , deci  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ , ambele limite laterale fiind egale cu  $e$ .

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

Deoarece  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ , cu notația  $\frac{1}{x} = y$  urmează că  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$ .

Deoarece și  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ , tot cu notația  $\frac{1}{x} = y$ , urmează că și  $\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Conform proprietăților operațiilor cu limite de funcții, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \log_a \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) \right) = \log_a e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Punând  $a = e$  în formula de mai sus, obținem că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \log_e e = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Cu schimbarea de variabilă  $a^x - 1 = u$ , urmează că  $x = \log_a(1+u)$ , iar  $u \rightarrow 0$  pentru  $x \rightarrow 0$ . Conform teoremei limitei funcției compuse, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\log_a(1+u)} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+u)}{u}} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Punând  $a = e$  în formula de mai sus, obținem că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$$

Cu schimbarea de variabilă  $x = e^u - 1$ , urmează că  $u = \ln(1+x)$ , iar  $u \rightarrow 0$  pentru  $x \rightarrow 0$ . Conform teoremei limitei funcției compuse, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(e^u)^p - 1}{e^u - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{pu} - 1}{e^u - 1} = \frac{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{pu} - 1}{pu} \cdot p}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u}} = \frac{\ln e \cdot p}{\ln e} = p.$$

### Compararea creșterii funcțiilor $\ln x$ , $x^p$ ( $p > 0$ ) și $e^x$

În cele ce urmează vom studia diferențele între vitezele de creștere spre  $+\infty$  ale funcției exponențiale, funcției putere și funcției logaritmice, observând că funcția exponențială are cea mai mare viteză de creștere spre  $+\infty$ , urmată de funcția putere și funcția logaritmice.

Vom demonstra mai întâi că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$ . În acest sens, s-a demonstrat deja că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0$  pentru orice  $p > 0$ . Notând  $[x] = n$ , observăm că  $n \leq x < n+1$  și atunci

$$\frac{\ln n}{(n+1)^p} < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\ln(n+1)}{n^p},$$

adică

$$\frac{\ln n}{n^p} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^p} \left( \frac{n+1}{n} \right)^p,$$

de unde, ținând seama de cele de mai sus,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$ .

Arătăm acum că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$ . Cu schimbarea de variabilă  $x = \ln u$ , urmează că  $u = e^x$  și  $u \rightarrow \infty$  pentru  $x \rightarrow \infty$ . Ținând seama de teorema funcției compuse, se obține că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\ln u)^p}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln u}{u^{\frac{1}{p}}} \right)^p = \left( \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln u}{u^{\frac{1}{p}}} \right)^p = 0^p = 0.$$

Pentru o altă demonstrație a acestor relații, să arătăm mai întâi că

$$\ln x < x < e^x, \quad \text{pentru } x > 0,$$

inegalitate care prezintă un interes de sine stătător.

În acest sens, să observăm că

$$e^x \geq e^{[x]} = (1 + (e - 1))^{[x]} \geq 1 + (e - 1)[x],$$

conform inegalității lui Bernoulli. În plus,

$$1 + (e - 1)[x] > \{x\} + [x] = x,$$

de unde  $e^x > x$ , pentru orice  $x > 0$ . Prin logaritmarea acestei inegalități, se obține că  $x > \ln x$ , pentru orice  $x > 0$ , de unde concluzia.

De aici,  $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$ , pentru orice  $x > 0$ , iar cum  $\ln \sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln x$ , urmează că  $\frac{\frac{1}{2} \ln x}{\sqrt{x}} < 1$ , deci  $\frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$ , pentru  $x > 0$ . Atunci

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad \text{pentru } x > 1,$$

de unde urmează conform criteriului cleștelui că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ . Arătăm acum că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$ , pentru  $p > 0$ . Într-adevăr, cu schimbarea de variabilă  $u = x^p$  și ținând seama că  $u \rightarrow \infty$  când  $x \rightarrow \infty$ , obținem cu ajutorul teoremei limitei funcției compuse că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln(u^{\frac{1}{p}})}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{p} \ln u}{u} = \frac{1}{p} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

Faptul că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$  se obține ca mai sus.

În fine, să precizăm câteva considerații asupra tratării cazurilor de nedeterminare. Cazurile  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  se tratează cu ajutorul limitelor fundamentale menționate mai sus, pentru cazul de nedeterminare  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  putându-se da și factor comun forțat. Cazul  $0 \cdot \infty$  se tratează transformând produsul în raport cu ajutorul formulei  $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ . Cazul  $\infty - \infty$  se tratează prin reducere la o nedeterminare de tip  $0 \cdot \infty$  dând factor comun forțat, sau, în unele situații în care apar radicali, prin amplificarea cu expresii conjugate. Cazurile  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$  se tratează prin reducerea nedeterminării la una de tip produs, cu ajutorul formulei  $f^g = e^{g \ln f}$ , pentru cazul de nedeterminare  $1^\infty$  putându-se utiliza și limita  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ , numită în continuare și *limita standard ce definește numărul e*.

**Exemple** 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare  $\frac{0}{0}$ , vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \sin x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot x}{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4x} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - 1}{\sqrt[3]{1 + 2x} - 1}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare  $\frac{0}{0}$ , vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - 1}{\sqrt[3]{1 + 2x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3x)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1 + 2x)^{\frac{1}{3}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1 + 3x)^{\frac{1}{2}} - 1}{3x} \cdot 3x}{\frac{(1 + 2x)^{\frac{1}{3}} - 1}{2x} \cdot 2x} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3x)^{\frac{1}{2}} - 1}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x)^{\frac{1}{3}} - 1}{2x}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

3.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare  $0 \cdot \infty$ , vom transforma mai întâi nedeterminarea într-una de tip raport. Observăm că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Cu notația  $u = \frac{1}{x}$ , ținând seama că  $u \rightarrow \infty$  pentru  $x \rightarrow 0, x > 0$ , se obține că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u}}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-\ln u}{u} = 0,$$

de unde limita căutată este 0.

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x$$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare  $0^0$ , transformăm mai întâi nedeterminarea într-una de tip produs. Atunci

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x},$$

de unde

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{x \ln x} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x} = e^0 = 1,$$

conform exemplului precedent.

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{n} + \sin^2 \frac{2}{n} \right)^n$$

Vom determina valoarea limitei  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} \right)^x$ , valoarea limitei din enunț obținându-se ca un caz particular. Fiind vorba despre cazul de nedeterminare  $1^\infty$ , se va folosi limita standard ce definește numărul  $e$ . Au loc egalitățile

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1 \right)^{\frac{1}{\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1}} \right]^{x(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1 \right)^{\frac{1}{\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} x(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1}{\frac{1}{x}}}. \end{aligned}$$

Cu notația  $u = \frac{1}{x}$ , ținând seama că  $u \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow \infty$ , urmează că

$$\begin{aligned} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1}{\frac{1}{x}}} &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u + \sin^2 2u - 1}{u}} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{u}{2} + \sin^2 2u}{u}} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{u}{2}}{u} + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2u}{u}} \\ &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{u}{2}}{u} + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2u}{u}} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{u}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2u}{(2u)^2} \cdot (2u)^2} \\ &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} -\left(\frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2 \cdot \frac{u}{2} + \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2 \cdot 4u} \end{aligned}$$



$$= e^{-\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{2} + \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} 4u = e^0 = 1.$$

Atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} \right)^x = 1,$$

de unde limita din enunț este 1.

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x - 1}$$

O limită calculată pentru  $x$  tinzând la un număr nenul poate transformată într-o limită în care variabila tinde la zero alegând ca nouă variabilă diferența dintre  $x$  și acel număr. Cu notația  $u = x - 1$ , ținând seama că  $u \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow 1$ , urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x - 1} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+u} + \sqrt[3]{1+u} - 2}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^{\frac{1}{2}} - 1}{u} + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^{\frac{1}{3}} - 1}{u} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

## Aplicații

### 5.1. Determinați valorile următoarelor limite

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{x}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)(3^x - 1)}{x^2}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)^3}{x^3}$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x^2 + x - 1}{x}$ ;
- 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \dots + \operatorname{tg} nx}$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg}(\operatorname{arcsin} x)}$ ; 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[(1 + 3x)^2]}{x}$ ;
- 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x \operatorname{arcsin} x}$ ; 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{4x}$ ; 10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 5^x - 2}{3^x + 4^x - 2}$ ; 11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \sin 2x}$ ;
- 12)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \sin x}{x^2}$ ; 13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{4x}$ ; 14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x)}{x}$ ;
- 15)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sin(2 \operatorname{arccos} x)}{\sqrt{1-x^2}}$ ; 16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m, n \geq 2$ ;
- 17)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - 1}{x}$ ; 18)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ ; 19)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$ .

### 5.2. Fie $p, q > 0$ . Determinați valorile următoarelor limite

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p - 2^x}{q - 3^x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{px})}{\ln(1 + e^{qx})}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^p + e^x)}{\ln(x^q + e^x)}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + p \operatorname{arctg} x}{x + q \operatorname{arctg} x};$$

$$5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln \sin px}{\ln \sin qx}.$$

**5.3. Determinați valorile următoarelor limite**

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{4}{\sin^2 x}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln(1 + x) + \ln(1 + 2x) + \dots + \ln(1 + nx))^{\frac{1}{x}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, a, b > 0; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{\operatorname{arcsin} x} + b^{\operatorname{arctg} x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, a, b > 0; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \right)^x;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}} \right)^x; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos nx} \right)^{\frac{1}{x^2}}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x}},$$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

**5.4. Determinați valorile următoarelor limite**

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left( \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 - n(x-1)}{(x-1)^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{3^{\operatorname{tg} x} - 3}{x - \frac{\pi}{4}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+24} - 3}{x-3}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt[3]{x}-1}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[p]{x}-1}{\sqrt[q]{x}-1}, p, q \in \mathbb{N}^*, p, q \geq 2;$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x - \cos^n x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x-1};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \dots + \sqrt[n]{x} - (n-1)}{x-1}.$$

**5.5. Determinați valorile următoarelor limite**

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+2) - \ln x]; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(x+1) \right); \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{x+2} - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \right).$$

**5.6. Determinați valorile următoarelor limite**

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\sin \frac{1}{x}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\sin x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}; \quad 4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-\ln x)^{2x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

**5.7. Determinați valorile următoarelor limite**

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x); \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \frac{1}{x^2} + \ln x \right); \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(e^x + e^{-x}) - x);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - \sqrt[n]{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \right), n \in \mathbb{N}^*; \quad 5) \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x).$$

5.8. Determinați valorile următoarelor limite

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsin} x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arctg} |x|)^{|\operatorname{arctg} x|};$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sin x + x \cos x)^x; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sin \left( \frac{\ln x}{x} \right) \right]^{\frac{\ln x}{x}}.$$

5.9. Fie  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$ . Arătați că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0$ .

5.10. Fie  $a > 0$ . Demonstrați că

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a(1 + \ln a); \quad 2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x \ln a - a \ln x}{x - a} = \ln a - 1.$$

5.11. Fie  $p \in (0, 1)$ . Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel ca  $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x+1)^p - x^p + a) = p$ .

5.12. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ . Determinați punctele  $x_0 \in \mathbb{R}$  pentru care  $f$  are limită în  $x_0$ .

5.13. 1. Demonstrați că  $\sin(\arccos u) = \sqrt{1 - u^2}$  pentru  $u \in [-1, 1]$ .

2. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{\arccos \frac{2x}{1+x^2}}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ . Demonstrați că  $f$  nu are limită în  $x = 1$ .

5.14. Fie  $L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x \cos 2x \dots \cos nx}{x^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Determinați  $L_0, L_1$ .

2. Demonstrați că  $L_{n+1} = L_n + \frac{(n+1)^2}{2}$  pentru  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Demonstrați că  $L_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$  pentru  $n \in \mathbb{N}$ .

5.15. Fie  $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\ln(e+x) \ln(e+2x) \dots \ln(e+nx)}}{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Determinați  $L_1$ .

2. Demonstrați că  $L_{n+1} = L_n - \frac{n+1}{e}$  pentru  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Demonstrați că  $L_n = -\frac{n(n+1)}{2}$  pentru  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5.16. Fie  $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)\dots(1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
1. Determinați  $L_1$ .
  2. Demonstrați că  $L_{n+1} = \frac{n+1}{2}L_n$  pentru  $n \in \mathbb{N}$ .
  3. Demonstrați că  $L_n = \frac{n!}{2^n}$  pentru  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5.17. Determinați valoarea limitei  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 2})$  în funcție de valorile parametrului real  $a$ ,  $a > 0$ .

5.18. Determinați valorile parametrilor reali  $a, b$  astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 1.$$

5.19. Determinați valorile parametrilor reali  $a, b$  astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - ax - b}{x^2} \in \mathbb{R}.$$

5.20. Determinați valorile parametrilor reali  $a, b$ ,  $a > 0$ , astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a \cos x + b \sin x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

5.21. Fie  $f, g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  astfel ca  $f(x) > \frac{1}{x^2+x} > g(x)$  pentru  $x > 0$ . Demonstrați că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ , iar  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ .

5.22. Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ .

1. Arătați că există  $\delta_1 > 0$  astfel ca  $a \sin x + \cos(bx) > 0$  pentru  $x \in (-\delta_1, \delta_1)$ .
2. Arătați că există  $\delta_2 > 0$  astfel ca  $e^{ax} - bx > 0$  pentru  $x \in (\delta_2, +\infty)$ .
3. Arătați că există  $\delta_3 > 0$  astfel ca  $\frac{1}{2} < \frac{\sin x}{x} < \frac{3}{2}$  pentru  $x \in (-\delta_3, \delta_3)$ .

5.23. Demonstrați că

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left[ \frac{1}{x} \right] = 1; \quad 3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left( \left[ \frac{1}{x} \right] + \left[ \frac{2}{x} \right] + \dots + \left[ \frac{n}{x} \right] \right) = 1.$$

5.24. Demonstrați că

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-1} \cos x = 0; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+1} \cos \frac{1}{x} = 0; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

5.25. Fie  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow (0, \infty)$  astfel ca  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$ . Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

5.26. Demonstrați că  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ . Cu ajutorul acestei limite, justificați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

5.27. Calculați următoarele limite de șiruri

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n} \ln \left( 1 + \frac{n}{n^2+2} \right); \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( e^{\sin \frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} \right); \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( e^{\frac{n+1}{n}} - e \right).$$

# Capitolul 6

## FUNCTȚII CONTINUE

### 6.1 Continuitatea unei funcții într-un punct

Fie o funcție  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . În capitolul precedent s-a studiat comportarea lui  $f$  în vecinătatea unui punct dat  $x_0 \in D'$ , observându-se dacă pentru valori  $x$  ale argumentului apropiate de  $x_0$  valorile  $f(x)$  ale funcției se apropie și ele (sau nu) de o valoare fixă, numită limita funcției în  $x_0$ .

În acest capitol vom pune problema particulară a apropierii acestor valori de valoarea  $f(x_0)$  a funcției în  $x_0$ ; desigur, pentru a putea vorbi despre  $f(x_0)$  va fi necesar ca  $x_0$  să aparțină domeniului de definiție  $D$ . În plus, față de studiul limitei funcției în  $x_0$ , se va avea în vedere și cazul în care  $x_0$  este punct izolat al lui  $D$ .

Pentru o funcție  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și pentru  $x_0 \in D$ , vom spune că funcția  $f$  este *continuă* în  $x_0$  dacă pentru orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$  există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât pentru orice  $x \in U \cap D$  urmează că  $f(x) \in V$ .

Întrucât se pune în fapt o problemă înrudită cu existența limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , definiția de mai sus se obține din definiția limitei unei funcții în  $x_0$  înlocuind  $l$  cu  $f(x_0)$ , fiind totuși necesară înlocuirea condiției  $x_0 \in D'$  cu condiția  $x_0 \in D$ .

#### Continuitatea într-un punct de acumulare

Se observă atunci că dacă  $x_0$  este punct de acumulare al lui  $D$ , atunci  $f$  este continuă în  $x_0$  dacă și numai dacă există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , iar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right),$$

adică operația de aplicare a funcției  $f$  comută cu operația de calculare a limitei în  $x_0$ .

Intuitiv, cum valorile  $f(x)$  ale funcției sunt apropiate de valoarea limitei (egală acum cu  $f(x_0)$ ) pentru  $x$  apropiat de  $x_0$ , funcțiile continue într-un punct  $x_0$  sunt acele funcții pentru care o schimbare minoră a argumentului de la  $x_0$  la  $x$  va produce o schimbare minoră a valorii funcției de la  $f(x_0)$  la  $f(x)$ .

Dacă  $x_0 \in D$  este punct de acumulare atât la dreapta cât și la stânga pentru  $D$ , atunci  $f$  este continuă în  $x_0$  dacă și numai dacă există ambele limite laterale

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x), \text{ iar}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

### Continuitatea într-un punct izolat

Presupunem acum că  $x_0$  este punct izolat al lui  $D$  și fie  $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$  o vecinătate a lui  $f(x_0)$ . Cum  $x_0$  este punct izolat al lui  $D$ , există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât  $U \cap D = \{x_0\}$ , și cum  $f(x_0) \in V$ , urmează că definiția funcției continue în  $x_0$  este satisfăcută pentru acest  $U$ . Rezultă de aici că o funcție este continuă în orice punct izolat al domeniului său de definiție.

Studiul continuității unei funcții  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  în  $x_0 \in D$  ne conduce deci la una dintre următoarele situații

1.  $x_0 \in D'$

(a)  $f$  are limită în  $x_0$ , cu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Atunci  $f$  este continuă în  $x_0$ .

(b)  $f$  are limită în  $x_0$ , cu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ . Atunci  $f$  nu este continuă în  $x_0$ .

(c)  $f$  nu are limită în  $x_0$ . Atunci  $f$  nu este continuă în  $x_0$ .

2.  $x_0 \notin D'$ . Atunci  $f$  este continuă în  $x_0$ .

### Aspecte grafice ale noțiunii de continuitate

În fapt, conceptul de continuitate își are originea în considerații privind reprezentarea grafică a funcțiilor. Astfel, din punct de vedere intuitiv, o funcție este continuă în  $x_0$  dacă graficul său „nu se întrerupe” în  $x_0$ . În acest sens, să

considerăm exemplele funcțiilor  $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ x - 1, & x < 1 \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

Se observă că  $f_1$  are limită în  $x_0 = 1$  și  $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = 1$ , iar cum  $f_1(1) = 1$ , urmează că  $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = f_1(1)$ , deci  $f_1$  este continuă în  $x_0 = 1$ . Geometric, egalitatea  $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = f_1(1)$  revine la faptul că graficul lui  $f_1$  „nu se întrerupe” în  $x_0 = 1$ .

De asemenea,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_2(x) = 1 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_2(x) = 3$ , deci  $f_2$  nu este continuă în  $x_0 = 1$ , întrucât  $f_2$  nu are limită în acest punct. Geometric, graficul lui  $f_2$  „se întrerupe” la stânga lui  $x_0 = 1$  (dar nu și la dreapta lui  $x_0 = 1$ ).

În plus,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_3(x) = 2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_3(x)$ , deci  $f_3$  are limită în  $x_0 = 1$ . Totuși, deoarece  $f_3(1) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 1} f_3(x)$ , urmează că  $f_3$  nu este continuă în  $x_0 = 1$ . Geometric, graficul lui  $f_3$  „se întrerupe” atât la stânga cât și la dreapta lui  $x_0 = 1$ .

### 6.1.1 Continuitate laterală

Exemplul funcției  $f_2$  de mai sus, pentru care graficul „se întrerupe” doar de o parte a lui  $x_0 = 1$ , cât și existența noțiunii de limită laterală sugerează introducerea conceptului de *continuitate laterală*.

Pentru o funcție  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și pentru  $x_0 \in D$ , vom spune că funcția  $f$  este *continuă la stânga* în  $x_0$  dacă pentru orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$  există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât pentru orice  $x \in U \cap D$ ,  $x \leq x_0$ , urmează că  $f(x) \in V$ .

Se observă atunci că dacă  $x_0$  este punct de acumulare la stânga al lui  $D$ , atunci  $f$  este continuă la stânga în  $x_0$  dacă și numai dacă există  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ , iar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0),$$

adică limita la stânga a lui  $f$  în  $x_0$  este egală cu  $f(x_0)$ .

În mod similar se definește noțiunea de continuitate la dreapta într-un punct  $x_0$ , obținându-se că dacă  $x_0$  este punct de acumulare la dreapta al lui  $D$ , atunci



$f$  este continuă la dreapta în  $x_0$  dacă și numai dacă există  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ , iar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Conform celor de mai sus, are loc următoarea proprietate.

**Teorema 6.1.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$ . Dacă  $x_0$  este punct de acumulare atât la dreapta cât și la stânga al lui  $D$ , atunci  $f$  este continuă în  $x_0$  dacă și numai dacă este continuă atât la dreapta cât și la stânga lui  $x_0$ .

### 6.1.2 Funcții continue pe o mulțime

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f$  este continuă în fiecare punct al unei mulțimi  $A \subset D$ , spunem că  $f$  este continuă pe  $A$ . Dacă  $f$  este continuă în orice punct al domeniului său de definiție, atunci se spune simplu că  $f$  este continuă. Din ceea ce s-a observat în capitolul anterior, funcțiile elementare sunt continue.

#### Exemplu

Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$  este continuă. Într-adevăr, pentru  $x_0 < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = \lim_{x \rightarrow x_0} (-x) = -x_0 = |x_0|$ , deci  $f$  este continuă în  $x_0$ . Similar, pentru  $x_0 > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = |x_0|$ . În fine, pentru  $x_0 = 0$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$ , iar  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , deci  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0|$ , iar  $f$  este continuă în  $x_0 = 0$ .

### 6.1.3 Puncte de discontinuitate

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$ . Dacă  $f$  nu este continuă în  $x_0$ , se spune că  $f$  este discontinuă în  $D$ , sau că  $x_0$  este punct de discontinuitate pentru  $f$ .

#### Clasificarea punctelor de discontinuitate

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$  un punct de discontinuitate pentru  $f$ . Dacă ambele limite laterale  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  ale lui  $f$  în  $x_0$  există și sunt finite, atunci  $x_0$  se numește punct de discontinuitate de specie (speța) întâi. În orice altă situație (adică dacă măcar una din limitele laterale nu există, sau există, dar nu este finită),

$x_0$  se numește *punct de discontinuitate de speța (speța) a doua*. Dacă există limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , diferită de  $f(x_0)$ , atunci  $x_0$  (care este punct de discontinuitate de speța întâi) se mai numește și *discontinuitate înlăturabilă*, întrucât redefinind  $f(x_0)$  ca fiind egală cu valoarea limitei în  $x_0$ ,  $x_0$  se transformă într-un punct de continuitate.

**Exemple** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ . Cum  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$ ,

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$ , ambele fiind finite (dar diferite, 0 nefiind deci punct de continuitate), urmează că 0 este punct de discontinuitate de speța întâi.

2. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ . Cum  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , iar  $f(0) = 0 \neq 1$ , urmează că 0 este punct de discontinuitate de speța întâi, fiind în fapt o discontinuitate înlăturabilă.

3. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ . Cum  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ , urmează că 0 este punct de discontinuitate de speța a doua.

4. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ . Cum  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  nu există (deoarece  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ , iar funcția sinus nu are limită la  $+\infty$ ), urmează că 0 este punct de discontinuitate de speța a doua.

5. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  și fie  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Există atunci două șiruri  $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{Q}$ ,  $(b_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , cu  $a_n < x_0$ ,  $b_n < x_0$  pentru  $n \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$ . Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 0$ , deci nu există  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ , iar  $x_0$  este punct de discontinuitate de speța a doua.

Ținând cont de faptul că funcțiile monotone au limite laterale în fiecare punct al domeniului de definiție, ele nu pot avea decât puncte de discontinuitate de o

anumită natură. Mai mult, aceste puncte de discontinuitate nu pot fi arbitrar de multe.

**Corolar 6.1.1.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție monotonă pe intervalul  $I$ . Atunci  $f$  nu poate avea decât puncte de discontinuitate de specia întâi pe  $I$ , mulțimea tuturor acestor puncte fiind cel mult numărabilă.

**Demonstrație.** Pentru fixarea ideilor, să presupunem că  $f$  este crescătoare, dacă  $f$  este descrescătoare raționându-se analog.

Fie  $x_0 \in I$ . Dacă  $x_0$  este punct interior lui  $I$ , există atunci  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ , datorită monotoniei funcției  $f$ , iar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

În plus, deoarece  $x_0$  este punct interior lui  $I$ , există  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_0 < x_2$ , iar conform monotoniei funcției  $f$ ,

$$f(x_1) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \leq f(x_2).$$

Urmează de aici că ambele limite laterale  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  sunt finite, deci  $x_0$  este fie punct de continuitate, fie punct de discontinuitate de specia întâi. Dacă  $x_0$  nu este punct interior lui  $I$ , se poate raționa asemănător, obținându-se un rezultat similar.

Fie acum  $\mathcal{D}$  mulțimea tuturor punctelor de discontinuitate ale lui  $f$ . Atunci fiecărui  $x \in \mathcal{D}$  îi corespunde un interval  $(a_x, b_x) = (\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x))$ ; dacă  $x_0 < y_0$ , atunci  $(a_{x_0}, b_{x_0}) \cap (a_{y_0}, b_{y_0}) = \emptyset$ , deoarece  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) < \lim_{\substack{x \rightarrow y_0 \\ x < y_0}} f(x)$ .

Pentru  $x \in \mathcal{D}$ , fie  $r_x \in (a_x, b_x)$  un număr rațional oarecare. Atunci funcția  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $F(x) = r_x$  este injectivă, datorită faptului că intervalele de tipul  $(a_x, b_x)$  sunt disjuncte, iar  $\mathcal{D}$  este în concluzie cel mult numărabilă. ■

### 6.1.4 Prelungirea prin continuitate a unei funcții într-un punct

Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f$  nu este definită în  $x_0$  (deci  $x_0 \notin D$ ), dar  $x_0$  este punct de acumulare al domeniului  $D$ , iar  $f$  are limita finită  $l$  în  $x_0$ , atunci funcția

$$\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ l, & x = x_0 \end{cases},$$

obținută prin definirea valorii în  $x_0$  ca fiind egală cu valoarea limitei în același punct, celelalte valori rămânând neschimbate, se numește *prelungirea prin continuitate a lui  $f$  în  $x_0$* . Desigur, deoarece

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = \tilde{f}(x_0),$$

$\tilde{f}$  este continuă în  $x_0$ , ceea ce justifică denumirea de prelungire prin continuitate.

#### Exemplu

Fie  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , prelungirea prin continuitate a lui  $f$  în 0 este

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

### 6.1.5 Caracterizarea cu șiruri a continuității unei funcții într-un punct

Teorema următoare, denumită și *teorema de caracterizare cu șiruri a continuității unei funcții într-un punct* permite studiul continuității unei funcții cu ajutorul limitelor de șiruri.

**Teorema 6.2.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$ . Atunci  $f$  este continuă în  $x_0$  dacă și numai dacă pentru orice șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu limita  $x_0$  astfel încât  $a_n \in D$  pentru orice  $n \geq 0$ , urmează că șirul valorilor  $(f(a_n))_{n \geq 0}$  are limita  $f(x_0)$ .

Demonstrația este imediată, cu ajutorul rezultatului corespunzător pentru limite de funcții, Teorema 5.3. Să observăm și că teorema de mai sus (ca și definiția continuității, de fapt) nu mai exclude valori ale argumentului diferite de  $x_0$ ; dacă  $a_n = x_0$ , atunci  $f(a_n) = f(x_0)$ , valoare egală cu valoarea limitei.

Teorema de mai sus se poate exprima prin faptul că *funcțiile continue se pot aplica relațiilor de convergență* (adică dacă  $f$  este continuă în  $x_0$ , iar  $a_n \rightarrow x_0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , în condițiile de mai sus, atunci  $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$  pentru  $n \rightarrow \infty$ .)

### 6.1.6 Caracterizarea cu $\varepsilon - \delta$ a continuității unei funcții într-un punct

Următoarea teoremă de caracterizare cu  $\varepsilon - \delta$  se poate obține în mod imediat din rezultatul similar pentru limite de funcții, Teorema 5.1.

**Teorema 6.3.** *Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$ . Atunci  $f$  este continuă în  $x_0$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_{\varepsilon, x_0} > 0$  astfel ca  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  pentru orice  $x \in D$  cu proprietatea că  $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon, x_0}$ .*

În teorema de mai sus,  $\delta_{\varepsilon, x_0} > 0$  depinde (implicit) și de punctul  $x_0$  în care se studiază continuitatea funcției, pe lângă dependența de  $\varepsilon$ .

### 6.1.7 Operații cu funcții continue

Se poate observa că operațiile uzuale cu funcții continue au ca rezultat funcții continue, în măsura în care ele sunt bine definite, fapt observat în teorema de mai jos.

**Teorema 6.4.** *Fie  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ ,  $f, g$  continue în  $x_0$ . Atunci*

1.  $f + g, f - g$  sunt continue în  $x_0$ .
2.  $\alpha f$  este continuă în  $x_0$  pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3.  $fg$  este continuă în  $x_0$ .
4.  $\frac{f}{g}$  este continuă în  $x_0$  dacă  $g(x_0) \neq 0$ .
5.  $f^g$  este continuă în  $x_0$  dacă  $f(x_0)^{g(x_0)}$  este bine definită.

Demonstrația este imediată, obținându-se cu ajutorul proprietăților operațiilor cu limite de funcții. O proprietate asemănătoare se poate formula în mod similar pentru funcții continue pe întreg domeniul de definiție.

**Exemple** 1.  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + \log_2 x$  este continuă, fiind suma a două funcții elementare.

2.  $f : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x + 2)^x$  este continuă, întrucât  $f_1 : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = x + 2$ ,  $f_2 : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2(x) = x$  sunt continue, iar  $f_1^{f_2}$  este bine definită.

### Continuitatea funcției compuse

S-a observat anterior că operațiile uzuale cu funcții continue au ca rezultat tot funcții continue. Teorema de mai jos exprimă faptul că prin compunerea a două funcții continue se obține tot o funcție continuă.

**Teorema 6.5.** Fie  $u : D \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ ,  $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$  astfel încât  $u$  este continuă în  $x_0$ , iar  $f$  este continuă în  $u(x_0)$ . Atunci funcția compusă  $f \circ u : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă în  $x_0$ .

**Demonstrație.** Fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  un șir astfel ca  $a_n \in D$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ . Deoarece funcția  $u$  este continuă în  $x_0$ , urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(a_n) = u(x_0)$ , conform teoremei de caracterizare cu șiruri. Deoarece și funcția  $f$  este continuă,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u(a_n)) = f(u(x_0))$ , de unde concluzia. Cum  $(a_n)_{n \geq 0}$  era arbitrar, urmează conform teoremei de caracterizare cu șiruri că  $f \circ u$  este continuă în  $x_0$ . ■

### Exemplu

Funcția  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$  este continuă, deoarece  $f = f_1 \circ f_2$ , unde  $f_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = \sqrt{x}$ ,  $f_2 : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f_2(x) = x^3 - 1$ , sunt continue.

Cum funcția modul este continuă, se poate demonstra că modulul unei funcții continue este tot o funcție continuă, iar maximul, respectiv minimul, a două funcții sunt de asemenea funcții continue.

**Teorema 6.6.** Fie  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ ,  $f, g$  continue în  $x_0$ . Atunci

1.  $|f|$  este continuă în  $x_0$ .
2.  $\min(f, g)$  și  $\max(f, g)$  sunt continue în  $x_0$ .

**Demonstrație.** 1. Cum  $|f|$  reprezintă compunerea funcțiilor continue  $|\cdot|$  și  $f$ ,  $|f| = |\cdot| \circ f$ , ea este continuă în  $x_0$ .

2. Este cunoscut că

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

Cum  $f + g$ ,  $f - g$  sunt continue, reprezentând operații uzuale cu funcții continue, iar  $|f - g|$  este de asemenea continuă, conform celor de mai sus, urmează că  $\max(f, g)$  și  $\min(f, g)$  sunt continue, fiind obținute prin operații uzuale cu funcții continue. ■

### 6.1.8 Proprietăți locale ale funcțiilor continue

Conform unei proprietăți anterioare, continuitatea unei funcții într-un punct presupune egalitatea între valoarea limitei și valoarea funcției în punct, funcțiile continue moștenind pe această cale proprietățile funcțiilor cu limită.

#### Mărginirea funcțiilor continue

**Teorema 6.7.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$  astfel încât  $f$  este continuă în  $x_0$ . Atunci există o vecinătate a lui  $x_0$  pe care  $f$  este mărginită.

#### Proprietatea de păstrare a semnului

**Teorema 6.8.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$  astfel încât  $f$  este continuă în  $x_0$ , iar  $f(x_0) \neq 0$ . Atunci există o vecinătate a lui  $x_0$  pe care  $f$  păstrează semnul lui  $f(x_0)$ .

## 6.2 Proprietăți ale funcțiilor continue pe o mulțime

### 6.2.1 Proprietatea lui Darboux

În cele ce urmează vom demonstra că o proprietate caracteristică a funcțiilor continue este aceea de a nu omite valori. Începem mai întâi prin a demonstra următoarea proprietate, numită *lema lui Bolzano*, ce exprimă faptul că dacă o funcție continuă are valori de semne opuse la capetele unui interval, atunci ea are o rădăcină în interiorul acestui interval.

**Teorema 6.9.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continuă pe  $[a, b]$ , cu proprietatea că  $f(a)f(b) < 0$ . Atunci există  $c \in (a, b)$  astfel ca  $f(c) = 0$ .

**Demonstrație.** Fără a restrânge generalitatea, să presupunem că  $f(a) < 0, f(b) > 0$ . Notăm

$$A = \{x \in [a, b]; f(x) < 0\}, \quad c = \sup A.$$

Deoarece  $f$  este continuă, ea păstrează semn negativ pe o vecinătate a lui  $a$  și semn pozitiv pe o vecinătate a lui  $b$ , de unde  $c \in (a, b)$ . Conform Teoremei 2.37,  $c$  este limita unui șir cu elemente din  $A$ , deci există  $(x_n)_{n \geq 0} \subset A$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ . Cum  $(x_n)_{n \geq 0} \subset A, f(x_n) < 0$  și deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq 0$ , conform teoremei de trecere la limită în inegalități. Deoarece  $f$  este continuă, iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ , urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$ , și deci  $f(c) \leq 0$ .

Presupunem acum prin reducere la absurd că  $f(c) < 0$ . Atunci  $f$  păstrează semn constant pe o vecinătate a lui  $c$ , fiind continuă, iar  $c \in (a, b)$ , și deci există  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset [a, b]$ , iar  $f(x) < 0$  pentru  $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ . De aici,  $f(c + \frac{\varepsilon}{2}) < 0$ , deci  $c + \frac{\varepsilon}{2} \in A$  ceea ce contrazice caracterul de margine superioară a lui  $c$ . Urmează că presupunerea făcută este falsă, deci  $f(c) = 0$ . ■

Lema lui Bolzano, demonstrată mai sus, este instrumentală în determinarea aproximativă a rădăcinilor unor ecuații care nu pot fi rezolvate explicit, un exemplu fiind indicat mai jos.

### Exercițiu

Demonstrați că ecuația  $e^x = 2 \cos x$  are cel puțin o rădăcină în intervalul  $(0, \frac{\pi}{3})$ .

### Soluție

Ecuația  $e^x = 2 \cos x$  poate fi pusă sub forma  $e^x - 2 \cos x = 0$ . Fie atunci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - 2 \cos x$ . Atunci  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(\frac{\pi}{3}) = e^{\frac{\pi}{3}} - 1 > 0$ . Cum  $f$  ia valori de semne opuse în capetele intervalului  $[0, \frac{\pi}{3}]$ , există cel puțin o rădăcină a ecuației  $f(x) = 0$  în interiorul acestui interval, ceea ce trebuia demonstrat. ■

### Exercițiu

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0$  o funcție polinomială de grad impar. Atunci ecuația  $f(x) = 0$  are cel puțin o rădăcină reală.

### Soluție

Deoarece  $f$  este o funcție polinomială de grad impar,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , de unde, conform definiției limitei, există  $x_1 < 0$  astfel ca  $f(x_1) < 0$ , deoarece într-o vecinătate a lui  $-\infty$  valorile funcției  $f$  păstrează semnul limitei. Similar,



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , de unde există  $x_2 > 0$  astfel ca  $f(x_2) > 0$ . Cum  $f$  este continuă, fiind funcție elementară, iar valorile lui  $f$  în capetele intervalului  $[x_1, x_2]$  au semne opuse, există măcar o rădăcină a ecuației  $f(x) = 0$  în interiorul acestui interval. ■

### Existența rădăcinilor unor ecuații

Din cele de mai sus se desprinde următorul procedeu general de localizare a rădăcinilor unei ecuații.

Fie o ecuație de forma  $f(x) = 0$ , unde  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe un interval  $I$ . Se determină mai întâi două puncte  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$ , astfel încât  $f(x_1)$  și  $f(x_2)$  au semne opuse, adică  $f(x_1)f(x_2) < 0$ . Deoarece  $f$  este continuă pe  $I$ , rezultă atunci conform lemei lui Bolzano că există  $c \in (x_1, x_2)$  astfel ca  $f(c) = 0$ , adică ecuația  $f(x) = 0$  are măcar rădăcina  $c$  în intervalul  $(x_1, x_2)$ . Dacă  $f(x_1)f(x_2) \leq 0$ , ecuația  $f(x) = 0$  are măcar rădăcina  $c$  în intervalul  $[x_1, x_2]$ . În plus, dacă  $f$  este strict monotonă pe intervalul  $[x_1, x_2]$  (fiind deci și injectivă pe acest interval), atunci această rădăcină este unică.

Dacă ecuația de rezolvat este prezentată sub forma  $f(x) = g(x)$ , unde  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții continuă pe  $I$ , atunci această ecuație se pune mai întâi sub forma  $f(x) - g(x) = 0$ , aplicându-se apoi considerațiile de mai sus.

Dat un interval  $I \subset \mathbb{R}$ , vom spune că  $f$  are proprietatea lui Darboux pe  $I$ , sau a valorii intermediare pe  $D$  dacă pentru orice  $x_1, x_2 \in I$  astfel ca  $x_1 < x_2$  și  $f(x_1) \neq f(x_2)$  și orice număr real  $\lambda$  cuprins între  $f(x_1)$  și  $f(x_2)$  există  $c \in (x_1, x_2)$  astfel ca  $f(x) = \lambda$ .

Altfel spus, o funcție  $f$  are proprietatea lui Darboux dacă odată cu două valori arbitrare  $f(x_1)$  și  $f(x_2)$  aceasta ia pe intervalul  $(x_1, x_2)$  și orice valori intermediare situate între  $f(x_1)$  și  $f(x_2)$  (adică toate valorile din intervalul deschis determinat de  $f(x_1)$  și  $f(x_2)$ ). Conform acestei observații, rezultă imediat că funcțiile cu proprietatea lui Darboux transformă intervalele în intervale.

**Teorema 6.10.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea lui Darboux pe intervalul  $I \subset D$ . Atunci  $f(I)$  este un interval.

### Exemplu

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = [x]$ . Atunci  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , dar  $f$  nu ia pe intervalul  $(0, 1)$  și valoarea intermediară  $\frac{1}{2}$ , deci  $f$  nu are proprietatea lui Darboux pe  $\mathbb{R}$ .

Alternativ,  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ , deci  $f$  nu transformă intervalul deschis  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$  tot într-un interval, neavând în concluzie proprietatea lui Darboux.

### Exemplu

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ . Atunci  $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$ , deci  $f$  nu transformă  $\mathbb{R}$  tot într-un interval, neavând în concluzie proprietatea lui Darboux.

Restrângând în mod potrivit intervalul  $I$  de mai sus în jurul unui punct  $x_0$  în care o funcție cu proprietatea lui Darboux are o limită laterală, se obține imediat următorul rezultat.

**Teorema 6.11.** Fie  $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I_1$  fiind un interval pe care  $f$  are proprietatea lui Darboux, și fie  $x_0 \in I_1$  astfel încât există o limită laterală a lui  $f$  în  $x_0$ . Atunci această limită este egală cu  $f(x_0)$ .

Conform acestei proprietăți, funcțiile cu proprietatea Darboux sunt „aproape continue”, în sensul că nu pot avea decât puncte de discontinuitate de o anumită natură.

**Corolar 6.11.1.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea lui Darboux pe intervalul  $I$ . Atunci  $f$  nu poate avea decât puncte de discontinuitate de specia a doua pe  $I$ .

Vom demonstra în cele ce urmează că funcțiile continue pe un interval au proprietatea lui Darboux pe acel interval.

**Teorema 6.12.** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval și  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Atunci  $f$  are proprietatea lui Darboux pe  $I$ .

**Demonstrație.** Fie  $x_1, x_2 \in I$  astfel ca  $x_1 < x_2$  și  $f(x_1) \neq f(x_2)$  și fie  $\lambda$  cuprins între  $f(x_1)$  și  $f(x_2)$ . Fie deasemenea  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) - \lambda$ .

Atunci  $g$  este continuă pe  $I$ , iar  $g(x_1)g(x_2) = (f(x_1) - \lambda)(f(x_2) - \lambda) < 0$ . Conform teoremei Cauchy-Bolzano, există  $c \in (x_1, x_2)$  astfel ca  $g(c) = 0$ , de unde  $f(c) = \lambda$ , iar  $f$  are proprietatea lui Darboux pe  $I$ . ■

**Corolar 6.12.1.** Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe intervalul  $I \subset D$ . Atunci  $f(I)$  este un interval.

### 6.2.2 Funcții uniform continue

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$ . Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$  atunci, conform teoremei de caracterizare cu  $\varepsilon - \delta$ , pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_{\varepsilon, x_0} > 0$  astfel ca  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  pentru orice  $x \in D$  cu proprietatea că  $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon, x_0}$ . Așa cum s-a afirmat,  $\delta_{\varepsilon, x_0}$  depinde atât de  $\varepsilon$ , cât și de  $x_0$ , valoarea sa putând să se schimbe după substituirea lui  $x_0$  cu un alt argument  $x_1$ . Când această valoare nu se schimbă indiferent de valoarea argumentului considerat,  $f$  se numește *uniform continuă*.

În acest sens, vom spune că  $f$  este *uniform continuă* dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel ca  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  pentru orice  $x, y \in D$  cu proprietatea că  $|x - y| < \delta_\varepsilon$ .

Definiția de mai sus exprimă faptul că, pentru o funcție uniform continuă, dacă diferența între două argumente  $x$  și  $y$  este suficient de mică, atunci diferența dintre valorile  $f(x)$  și  $f(y)$  este de asemenea mică indiferent de locul argumentelor  $x$  și  $y$  în domeniul de definiție. Din punct de vedere geometric, imaginea oricărui interval cu o lungime mai mică decât  $\delta_\varepsilon$  este tot un interval, cu lungime mai mică decât  $\varepsilon$ . Desigur, orice funcție uniform continuă pe o mulțime este și continuă pe acea mulțime, definiția uniforme continuități fiind mai restrictivă.

**Exemplu** 1.  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  este uniform continuă pe  $[0, 2]$ . Într-adevăr,

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq 4|x - y|,$$

de unde  $f$  este uniform continuă, cu  $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$ .

2.  $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$  nu este uniform continuă pe  $(0, 1]$ . Să presupunem prin reducere la absurd că  $g$  este uniform continuă pe  $(0, 1]$ . Fie atunci  $\varepsilon = 1$  și fie  $\delta_1$ ,  $0 < \delta_1 < 1$ , astfel ca  $|g(x) - g(y)| < 1$  pentru orice  $x, y \in (0, 1]$ ,  $|x - y| < \delta_1$ . Pentru  $x = \delta_1$ ,  $y = \frac{\delta_1}{2}$ , urmează că

$$|x - y| = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1, \quad |g(x) - g(y)| = \frac{1}{\delta_1} > 1,$$

contradicție. Urmează că  $g$  nu este uniform continuă pe  $(0, 1]$

### 6.2.3 Funcții Lipschitz. Contractii

Vom preciza în cele ce urmează o categorie specială de funcții uniform continue.

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă există  $L > 0$  astfel încât  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$  pentru orice  $x, y \in D$ , atunci  $f$  se numește *funcție Lipschitz* (sau *funcție lipschitziană*) pe  $D$ ,  $L$  numindu-se *constantă Lipschitz* a funcției  $f$ .

**Teorema 6.13.** Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  lipschitziană pe  $D$ . Atunci  $f$  este uniform continuă pe  $D$ .

**Demonstrație.** Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar și fie  $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$ , unde  $L$  este o constantă Lipschitz a funcției  $f$ . Atunci

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

pentru orice  $x, y \in D$  cu  $|x - y| < \delta_\varepsilon$ , deci  $f$  este uniform continuă pe  $D$ . ■

### Teorema de punct fix a lui Banach

Fie  $T : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Vom spune că  $x_0 \in D$  este un *punct fix* al lui  $T$  dacă  $T(x_0) = x_0$ . De asemenea, vom numi *contractie* o funcție Lipschitz care admite o constantă Lipschitz  $L < 1$ . În cele ce urmează vom folosi notația simplificată  $T(x) = Tx$ , iar  $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ ori } T}$ .

Următoarea teoremă, numită *teorema de punct fix a lui Banach* precizează existența și unicitatea punctului fix al unei contractii a unei mulțimi închise  $D$  în ea însăși, precizând și o metodă de obținere a acestui punct fix, lucru care o face utilă în determinarea aproximativă a soluțiilor unor clase largi de ecuații.

**Teorema 6.14.** Fie  $D \subset \mathbb{R}$  închisă, iar  $T : D \rightarrow D$  o contractie a lui  $D$  în ea însăși. Există atunci un unic punct fix al lui  $T$ , iar șirul  $(T^n x_0)_{n \geq 0}$  este convergent la acest punct fix pentru orice punct inițial  $x_0 \in D$ .

**Demonstrație.** Fie  $0 < L < 1$  o constantă Lipschitz a lui  $T$  și fie  $x_0 \in D$ . Atunci

$$|T^{n+1}x - T^n x| = |T(T^n x) - T(T^{n-1}x)| \leq L|T^n x - T^{n-1}x| \leq \dots \leq L^n |Tx_0 - x_0|,$$

pentru orice  $n \geq 0$ . Fie acum  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m > n$  și fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Urmează că

$$\begin{aligned} |T^m x_0 - T^n x_0| &\leq |T^m x_0 - T^{m-1} x_0| + |T^{m-1} x_0 - T^{m-2} x_0| + \dots + |T^{n+1} x_0 - T^n x_0| \\ &\leq (L^{m-1} + L^{m-2} + \dots + L^n) |Tx_0 - x_0| = L^n \frac{1 - L^{m-n}}{1 - L} |Tx_0 - x_0| \\ &< \frac{L^n}{1 - L} |Tx_0 - x_0|. \end{aligned}$$

Cum  $0 < L < 1$ , urmează că  $\frac{L^n}{1-L}|Tx_0 - x_0| < \varepsilon$  pentru  $n$  suficient de mare, deci  $(T^n x_0)_{n \geq 0}$  este șir Cauchy. Atunci  $(T^n x_0)_{n \geq 0}$  este convergent; fie  $l$  limita sa. Cum  $D$  este închisă, iar  $(T^n x_0)_{n \geq 0} \subset D$ , urmează că  $l \in D$ . Deoarece  $T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0)$ , iar  $T$  este continuă, urmează prin trecere la limită că  $l = Tl$ , deci  $l$  este un punct fix al lui  $T$ .

Fie acum  $l_1$  un alt punct fix al lui  $T$ . Atunci

$$|l_1 - l| = |Tl_1 - Tl| \leq L|l_1 - l|,$$

iar cum  $0 < L < 1$ , urmează că  $l = l_1$ , deci punctul fix  $l$  este unic. ■

### 6.2.4 Funcții continue definite pe intervale închise și mărginite

A fost demonstrat deja că funcțiile continue transformă intervalele în intervale. O precizare ce se poate aduce este că funcțiile continue transformă intervalele închise și mărginite tot în intervale închise și mărginite. Acest lucru este exprimat în următorul rezultat, numit *teorema lui Weierstrass*.

**Teorema 6.15.** *Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Atunci  $f$  este mărginită și își atinge marginile pe  $[a, b]$ .*

**Demonstrație.** Să presupunem că  $f$  nu este mărginită superior. Atunci există un șir  $(a_n)_{n \geq 0} \subset [a, b]$  astfel ca  $f(a_n) > n$ . Cum  $(a_n)_{n \geq 0} \subset [a, b]$  este mărginit, el are un subșir convergent, deci există  $(a_{k_n})_{n \geq 0}$  astfel ca  $a_{k_n} \rightarrow l$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , iar  $l \in [a, b]$ .

Deoarece  $f$  este continuă pe  $[a, b]$ , urmează că  $f(a_{k_n}) \rightarrow f(l)$ , însă cum  $f(a_{k_n}) > k_n \geq n$ , urmează că  $f(a_{k_n}) \rightarrow \infty$ , contradicție. Atunci presupunerea făcută este falsă, iar  $f$  este mărginită superior, printr-un raționament analog demonstrându-se și că  $f$  este mărginită inferior. În concluzie,  $f$  este mărginită.

Să notăm cu  $m$  și  $M$  marginea inferioară, respectiv superioară, a mulțimii valorilor funcției și să presupunem că  $f$  nu ia valoarea  $M$  în niciun punct din  $[a, b]$ . Atunci  $f(x) < M$  pentru orice  $x \in [a, b]$ , iar funcția  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$  este bine definită, pozitivă și continuă pe  $[a, b]$ . Conform celor de mai sus, ea este mărginită inferior pe  $[a, b]$ ; fie  $m_1$  marginea inferioară a mulțimii valorilor sale. Urmează că

$$g(x) = \frac{1}{M-f(x)} \geq m_1 \text{ pentru orice } x \in [a, b],$$

deci  $f(x) \leq M - \frac{1}{m_1}$  pentru orice  $x \in [a, b]$ , iar  $M$  nu este marginea superioară a mulțimii valorilor funcției, contradicție. Urmează că  $f$  ia valoarea  $M$  în cel puțin un punct din  $[a, b]$ , similar demonstrându-se existența unui punct în care  $f$  ia valoarea  $m$ . ■

Deși s-a observat mai sus că funcțiile continue nu sunt necesar uniform continue, acestea devin totuși uniform continue atunci când domeniul lor este un interval închis și mărginit.

**Teorema 6.16.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continuă pe  $[a, b]$ . Atunci  $f$  este uniform continuă pe  $[a, b]$ .

**Demonstrație.** Presupunem prin reducere la absurd că  $f$  nu este uniform continuă pe  $[a, b]$ . Există atunci  $\varepsilon > 0$  astfel încât pentru orice  $\delta > 0$  există  $x_\delta$  și  $y_\delta \in [a, b]$  astfel ca  $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ , iar  $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$ .

Punând succesiv  $\delta = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , obținem că există  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  astfel încât  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ , iar  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ . Cum  $(x_n)_{n \geq 0} \subset [a, b]$ , există  $(x_{k_n})_{n \geq 0} \rightarrow l_x$ . Cum  $(y_{k_n})_{n \geq 0} \subset [a, b]$ , există  $(y_{k_n})_{n \geq 0} \rightarrow l_y$ , iar deoarece  $|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n} \rightarrow 0$  pentru  $k_n \rightarrow \infty$ , urmează că  $l_x = l_y$ .

Întrucât  $x_{k_n} \rightarrow l_x$ ,  $y_{k_n} \rightarrow l_y = l_x$ , iar  $f$  este continuă, urmează că  $f(x_{k_n}) \rightarrow f(l_x)$ ,  $f(y_{k_n}) \rightarrow f(l_x)$ , deci  $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \rightarrow 0$ , ceea ce contrazice faptul că  $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon$ . Urmează că presupunerea făcută este falsă, iar  $f$  este uniform continuă. ■

## Aplicații

**6.1.** Precizați un exemplu de funcție  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care  $|f|$  este continuă fără ca  $f$  să fie continuă.

**6.2.** Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x^2} - a}{x^2}, & x > 0 \\ 2x^3 - 4x + b, & x \geq 0 \end{cases}$

să fie continuă în  $x_0 = 0$ .

**6.3.** Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}, & x \neq 2 \\ ax, & x = 2 \end{cases}$ , să

fie continuă în  $x_0 = 2$ .

**6.4.** Demonstrați că funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  este continuă în  $x_0 = 0$ .

**6.5.** Determinați  $p \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^p \arctg \frac{1}{x}, & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , să fie continuă în  $x_0 = 0$ .

**6.6.** Determinați  $p \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^p \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , să fie continuă în  $x_0 = 0$ .

**6.7.** Precizați punctele de discontinuitate ale funcției  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = [x^2]$  și natura acestora.

**6.8.** 1. Precizați punctele de discontinuitate ale funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \{x\}$  și natura acestora.

2. Demonstrați că funcția  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \{x\}(1 - \{x\})$ , este continuă pe  $\mathbb{R}$ .

**6.9.** Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$ . Prelunghiți  $f$  prin continuitate în  $x_0 = 0$ .

**6.10.** Fie  $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x + 2)^2 \sin \frac{1}{x+2}$ . Prelunghiți  $f$  prin continuitate în  $x_0 = -2$ .

**6.11.** Fie  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{3^x - 3}{x - 1}, & x < 1 \\ \ln(x - 1), & x > 1 \end{cases}$ . Demonstrați că  $f$  nu poate fi prelungită prin continuitate în  $x_0 = 1$ .

**6.12.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $|f(x) - x| \leq x^2$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Determinați  $f(0)$ .

2. Demonstrați că  $f$  este continuă în 0.

**6.13.** 1. Determinați funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue în  $x = 0$  pentru care  $f(x) = f(2x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Determinați funcțiile  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continue în  $x = 1$  pentru care  $f(x) = f(x^2)$  pentru orice  $x \in [0, \infty)$ .

**6.14.** Fie  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

1. Dacă  $f(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{Q}$ , atunci  $f(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Dacă  $f(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , atunci  $f(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Dacă  $f(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{Z}$ , rezultă că  $f(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ?

**6.15.** Fie  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1, f_2$  continue și fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ .  
Atunci  $f$  este continuă în  $x_0 \in \mathbb{R}$  dacă și numai dacă  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ .

**6.16.** Fie  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$ .

1. Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$ , iar  $g$  este discontinuă în  $x_0$ , atunci  $f + g$  este discontinuă în  $x_0$ .
2. Dacă  $f, g$  discontinue în  $x_0$ , rezultă că  $f + g$  este discontinuă în  $x_0$ ?

**6.17.** 1. Fie  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$ ,  $f, g$  continue în  $x_0$ . Dacă  $f(x_0) < g(x_0)$ , arătați că există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  cu proprietatea că  $f(x) < g(x)$  pentru orice  $x \in U \cap D$ .

2. Fie  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$ ,  $f$  continuă în  $x_0$ . Dacă  $m, M \in \mathbb{R}$  sunt astfel încât  $m < f(x_0) < M$ , arătați că există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  cu proprietatea că  $m < f(x) < M$  pentru orice  $x \in U \cap D$ .

**6.18.** Demonstrați că ecuația  $3^x(x^3 + 1) - 2 = 0$  are o unică rădăcină în intervalul  $(0, 1)$ .

**6.19.** Demonstrați că ecuația  $x^5 - 3x^4 - 2x + 1 = 0$  admite cel puțin o rădăcină reală.

**6.20.** Demonstrați că dacă  $n \in \mathbb{N}^*$ , atunci ecuația  $x \cos \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{x}$  are măcar o rădăcină în intervalul  $(\frac{1}{(2n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi})$ .

**6.21.** 1. Demonstrați că ecuația  $x^3 + 2x = 3 + \frac{1}{n}$  are o unică soluție reală  $x_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2. Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .



- 6.22.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ ,  $f$  continuă. Demonstrați că există  $c \in [a, b]$  astfel încât  $f(c) = c$ .
- 6.23.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continuă. Demonstrați că există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$ .
- 6.24.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continuă și fie  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ . Demonstrați că există  $c \in [a, b]$  astfel ca  $f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$ .
- 6.25.** Fie  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + 2, & x \in [-2, -1) \\ x + a, & x \in [-1, 2] \end{cases}$ . Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f$  să aibă proprietatea lui Darboux pe  $[-2, 2]$ .
- 6.26.** Demonstrați că  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$ , este bijectivă.
- 6.27.** Fie  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \cup [2, 3]$ ,  $f$  continuă. Demonstrați că  $f$  nu este surjectivă.
- 6.28.** Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continuă, iar  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  este finită. Atunci  $f$  este mărginită.
- 6.29.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  crescătoare. Demonstrați că  $\text{Im } f = [f(a), f(b)]$ .
- 6.30.** 1. Folosind eventual inegalitatea  $\sin x < x$  pentru  $x > 0$ , demonstrați că  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin^2 x$  este uniform continuă pe  $[0, \infty)$ .
2. Folosind eventual inegalitatea  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$  pentru  $x, y \geq 0$ , demonstrați că  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ , este uniform continuă pe  $[0, \infty)$ .
- 6.31.** 1. Dacă  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  este uniform continuă pe  $D$ ,  $D_1 \subset D$ , iar  $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  este o restricție a lui  $f$  la  $D_1$ , atunci  $f_1$  este uniform continuă pe  $D_1$ .
2. Demonstrați că  $f_1 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ , este uniform continuă pe  $(0, 1]$ .
- 6.32.** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continuă. Dacă există limitele  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  și sunt finite, atunci  $f$  este uniform continuă pe  $\mathbb{R}$ .
2. Demonstrați că  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \text{arctg } x$ , este uniform continuă pe  $\mathbb{R}$ .
3. Demonstrați că  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ , este uniform continuă pe  $\mathbb{R}$ .
- 6.33.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuă și periodică. Atunci  $f$  este uniform continuă.

- 6.34.** 1. Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continuă. Dacă există  $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0} \subset D$  astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ , dar  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$ , atunci  $f$  nu este uniform continuă pe  $D$ .
2. Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continuă. Dacă există  $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0} \subset (a, b)$  astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$  sau  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , dar  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$ , atunci  $f$  nu este uniform continuă pe  $(a, b)$ .
3. Demonstrați că  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , nu este uniform continuă pe  $(0, \infty)$ .
4. Demonstrați că  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$ , nu este uniform continuă pe  $(0, \infty)$ .
5. Demonstrați că  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \sin x$ , nu este uniform continuă pe  $[0, \infty)$ .
- 6.35.** 1. Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  uniform continuă. Folosind eventual criteriul Cauchy-Bolzano, arătați că există limitele  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)$  și sunt finite.
2. Demonstrați că  $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , nu este uniform continuă pe  $(0, \frac{\pi}{2})$ .
3. Demonstrați că  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ , nu este uniform continuă pe  $(0, \infty)$ .

# Capitolul 7

## DERIVATE. DIFERENȚIALE

Noțiunea de *derivată*, elementul fundamental al calculului diferențial, are o deosebită importanță în studiul matematic al mărimilor variabile. Problemele principale care au condus la introducerea noțiunii de derivată sunt problema tangentei, respectiv determinarea tangentei la o curbă într-un punct dat, fiind cunoscută ecuația curbei, și problema vitezei, respectiv determinarea vitezei unui punct mobil, fiind cunoscută legea de mișcare a acestuia. În cele ce urmează, vom formula aceste probleme în termeni matematici, cu ajutorul noțiunii de limită.

### Problema tangentei

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe intervalul  $I$ , fie  $G_f$  graficul funcției  $f$  și fie  $A(a, f(a))$  un punct pe  $G_f$ . Dorim să determinăm ecuația tangentei în  $A$  la  $G_f$ .

Se poate observa că această tangentă poate intersecta  $G_f$  și într-un alt punct decât  $A$ , iar dreptele care intersectează  $G_f$  doar în  $A$  nu sunt neapărat tangente la  $G_f$ . Nu putem deci defini această tangentă ca dreapta care are în comun cu  $G_f$  doar pe  $A$ , așa cum s-a întâmplat pentru tangenta într-un punct la un cerc.

Fie  $M(x, f(x))$  un alt punct pe  $G_f$ . Dreapta  $AM$  care intersectează  $G_f$  cel puțin în  $A$  și  $M$ , se va numi dreaptă *secantă*; intuitiv, vom defini tangenta în  $A$  la  $G_f$  ca poziția limită a secantei  $AM$  atunci când  $M$  tinde la  $A$ .

Cum panta dreptei  $AM$  este  $m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  (presupunem că  $AM$  nu este verticală, deci  $x \neq a$ ), urmează că panta tangentei în  $A$  la  $G_f$  este  $m_{\text{tg}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ . În aceste condiții, ecuația tangentei în  $A$  la  $G_f$  este

$$y - f(a) = m_{\text{tg}}(x - a), \quad \text{sau} \quad y = f(a) + m_{\text{tg}}(x - a),$$

rămânând a fi interpretate ulterior situațiile în care  $m_{tg}$  (definită ca o limită) nu există, sau există, dar este infinită.

### Problema vitezei

Considerăm un punct mobil  $M$  în mișcare rectilinie de-a lungul axei  $Ox$ , a cărui lege de mișcare este  $x = x(t)$ , unde  $t$  este timpul scurs de la momentul inițial, iar  $x$  este abscisa punctului  $M$ .

Fie  $[t_0, t]$  un interval de timp,  $t > t_0$ . În acest interval,  $M$  parcurge distanța  $x(t) - x(t_0)$ , deci viteza sa medie (viteza pe care ar trebui s-o aibă  $M$  pentru a parcurge distanța  $x(t) - x(t_0)$  în timpul  $t - t_0$ , dacă s-ar mișca uniform) este  $v_{[t_0, t]} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ . Totuși, cu cât intervalul de timp  $[t_0, t]$  este mai mare, cu atât această viteză oferă mai puține informații despre viteza lui  $M$  la momentul  $t_0$ . Intuitiv, intervalul  $[t_0, t]$  trebuie să fie cât mai mic, iar viteza instantanee a lui  $M$  la momentul  $t_0$  este atunci  $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ .

## 7.1 Funcții derivabile. Funcții diferențiabile

### Derivata unei funcții într-un punct

Fie o funcție  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in D \cap D'$ . Vom spune că  $f$  are derivată în  $x_0$  dacă există limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , numită *derivata funcției  $f$  în punctul  $x_0$*  și notată  $f'(x_0)$ , în vreme ce dacă această limită există și este finită vom spune că funcția  $f$  este *derivabilă în  $x_0$* .

Raportul  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  se numește *raport incremental* și măsoară viteza de variație a funcției pe intervalul  $[x_0, x]$ ; prin analogie cu problema vitezei indicată mai sus, putem spune că  $f'(x_0)$  reprezintă *viteza de variație instantanee a funcției  $f$  în punctul  $x_0$* .

De asemenea, cu notația  $x = x_0 + h$ , obținem că

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Exemple** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Să studiem derivabilitatea funcției  $f$  în

$x_0 = 2$ . Observăm că

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4, \end{aligned}$$

deci  $f$  este derivabilă în  $x_0 = 2$ , iar  $f'(2) = 4$ .

2. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Să studiem derivabilitatea funcției  $f$  în  $x_0 = 0$ . Observăm că

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

deci  $f$  nu este derivabilă în  $x_0 = 0$ , dar are derivată în acest punct, iar  $f'(0) = +\infty$ .

Cu ajutorul noțiunii de derivată într-un punct, putem studia rezolvarea problemelor menționate anterior.

### Ecuția tangentei într-un punct la graficul unei funcții

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $a \in D \cap D'$ . Conform considerațiilor de mai sus, obținem următoarele

1. Dacă  $f$  este derivabilă în  $a$ , atunci ecuația tangentei în  $A(a, f(a))$  la  $G_f$  este

$$y - f(a) = f'(a)(x - a), \quad \text{sau} \quad y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

observându-se că panta tangentei în  $A(a, f(a))$  este valoarea derivatei  $f'(a)$ .

2. Dacă  $f'(a) = +\infty$ , sau  $f'(a) = -\infty$ , atunci tangenta în  $A(a, f(a))$  la  $G_f$  este verticală, având ecuația  $x = a$ .

### Viteza unui punct material în mișcare

Fie un punct mobil  $M$  în mișcare rectilinie de-a lungul axei  $Ox$ , a cărei abscisă  $x$  este dată prin  $x = x(t)$ , unde  $t$  este timpul scurs de la momentul inițial. Atunci viteza instantanee a lui  $M$  la momentul  $t$  este  $v(t) = x'(t)$ .

### Derivate laterale

Substituind în definiția derivatei noțiunea de limită cu noțiunea de limită laterală, obținem noțiunea de *derivată laterală*.

Astfel, dacă  $x_0 \in D$  este punct de acumulare la stânga pentru  $D$ , vom spune că  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  are derivată la stânga în  $x_0$  dacă există limita  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , numită

*derivata la stânga a funcției  $f$  în punctul  $x_0$*  și notată  $f'_s(x_0)$ , în vreme ce dacă această limită există și este finită vom spune că funcția  $f$  este *derivabilă la stânga în  $x_0$* . Analog definim noțiunile de *derivată la dreapta*, respectiv *derivabilitate la dreapta*.

Cu notația  $x = x_0 + h$ , obținem că

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$$

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Dacă  $x_0 \in D$  este punct de acumulare atât la dreapta cât și la stânga pentru  $D$ , atunci  $f$  are derivată în  $x_0$  dacă și numai dacă există ambele derivate laterale  $f'_s(x_0)$  și  $f'_d(x_0)$ , iar  $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ . În aceste condiții,

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0).$$

### Exemplu

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ . Să studiem derivabilitatea funcției  $f$  în  $x_0 = 0$ . Observăm că

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1.$$

Cum  $f'_s(0) \neq f'_d(0)$ ,  $f$  nu are derivată în  $x_0 = 0$ , neputând fi deci derivabilă în acest punct.

### Semitangente

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și  $a \in D$  punct de acumulare la stânga al lui  $D$ . Dacă există  $f'_s(a)$ , spunem că  $G_f$  admite *semitangentă la stânga* în  $A(a, f(a))$ , înțelegând că

există o dreaptă tangentă în  $A$  la partea din grafic aflată în stânga lui  $A$ . Ca mai sus, ecuația acestei semitangente este  $y - f(a) = f'_s(a)(x - a)$ , dacă  $f'_s(a)$  este finită, respectiv  $x = a$  dacă  $f'_s(a) = +\infty$  sau  $f'_s(a) = -\infty$ . În mod analog se definește noțiunea de semitangentă la dreapta.

### Puncte unghiulare, puncte de întoarcere

Fie acum  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval deschis, și fie  $a \in I$  un punct în care  $f$  este continuă.

Dacă  $f'_s(a)$ ,  $f'_d(a)$  există și sunt infinite, dar diferite, semitangentele în  $A$  la  $G_f$  sunt în prelungire, spunându-se că  $A(a, f(a))$  este un *punct de întoarcere*.

Dacă  $f'_s(a)$ ,  $f'_d(a)$  există, sunt diferite, și măcar una dintre ele este finită, semitangentele în  $A$  la  $G_f$  nu sunt în prelungire, formând un unghi  $\alpha \in (0, \pi)$ . Se spune atunci că  $A(a, f(a))$  este un *punct unghiular*.

Din cele de mai sus, se observă că dacă  $A(a, f(a))$  este un punct de întoarcere sau un punct unghiular, atunci  $f$  nu este derivabilă în  $a$ .

### Funcții derivabile pe o mulțime

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f$  este derivabilă în fiecare punct al unei mulțimi  $A \subset D$ , spunem că  $f$  este *derivabilă pe  $A$* . Dacă  $f$  este derivabilă în orice punct al domeniului său de definiție, atunci se spune simplu că  $f$  este *derivabilă*.

### Legătura între derivabilitate și continuitate

În cele ce urmează, vom demonstra că o funcție derivabilă într-un punct este neapărat continuă în acel punct.

**Teorema 7.1.** Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $a \in D \cap D'$  astfel încât  $f$  este derivabilă în  $a$ . Atunci  $f$  este continuă în  $a$ .

**Demonstrație.** Deoarece

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a), \quad \text{pentru } x \neq a,$$

urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left( f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \right) \\ &= f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f(a) + f'(a) \cdot 0 \\
 &= f(a),
 \end{aligned}$$

deci  $f$  este continuă în  $a$ . ■

În mod similar, se poate arăta că derivabilitatea la stânga (dreapta) a funcției  $f$  în  $a$  antrenează continuitatea la stânga (dreapta) a funcției în  $a$ .

### 7.1.1 Operații cu funcții derivabile

Se poate observa că operațiile uzuale cu funcții derivabile au ca rezultat funcții derivabile, în măsura în care ele sunt bine definite, fapt observat în teorema de mai jos.

**Teorema 7.2.** Fie  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D \cap D'$ ,  $f, g$  derivabile în  $x_0$ . Atunci

1.  $f + g, f - g$  sunt derivabile în  $x_0$ , iar

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(derivata sumei este egală cu suma derivatelor), respectiv

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

(derivata diferenței este egală cu diferența derivatelor).

2.  $\alpha f$  este derivabilă în  $x_0$  pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ , iar

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

(constanta cu care se înmulțește trece înaintea derivatei).

3.  $fg$  este derivabilă în  $x_0$ , iar

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

4.  $\frac{f}{g}$  este derivabilă în  $x_0$  dacă  $g(x_0) \neq 0$ , iar

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$



**Demonstrație.** Vom demonstra doar 4), celelalte formule obținându-se asemănător. Se observă că

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\
 &= \frac{1}{g(x_0)^2} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
 &= \frac{1}{g(x_0)^2} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) \\
 &= \frac{1}{g(x_0)^2} (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)),
 \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Se poate de asemenea demonstra prin inducție matematică faptul că proprietățile 1 și 3 din Teorema 7.3 rămân valabile și pentru mai mult de două funcții. În speță, are loc următorul rezultat.

**Teorema 7.3.** Fie  $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D' \cap D$  astfel încât  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sunt derivabile în  $x_0$ . Atunci

1. Funcția sumă  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \dots + f_n'(x_0).$$

2. Funcția produs  $f_1 f_2 \dots f_n$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$\begin{aligned}
 (f_1 f_2 \dots f_n)'(x_0) &= f_1'(x_0) f_2(x_0) \dots f_n(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0) \dots f_n(x_0) \\
 &\quad + \dots + f_1(x_0) f_2(x_0) \dots f_n'(x_0).
 \end{aligned}$$

## 7.1.2 Derivatele funcțiilor elementare

Vom calcula în cele ce urmează derivatele unor funcții uzuale.

**Funcția constantă**

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$ , unde  $c \in \mathbb{R}$ . Atunci

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0,$$

deci

$$c' = 0.$$

**Funcția putere**

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$ . Atunci

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + x^{n-1})}{h} = nx^{n-1}, \end{aligned}$$

deci

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Caz particular

$$(x)' = 1.$$

Cu ajutorul unor raționamente asemănătoare, se pot deduce formulele corespunzătoare de derivarea unor alte funcții elementare, după cum urmează.

**Funcția radical**

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Atunci

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x \neq 0, \text{ dacă } n \text{ este impar,} \\ (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x > 0, \text{ dacă } n \text{ este par.} \end{aligned}$$

Caz particular

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

**Funcția exponențială cu bază  $e$** 

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Funcția exponențială cu bază oarecare**

Fie  $a > 0, a \neq 1$ . Atunci

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Funcția sinus**

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Funcția cosinus**

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Funcția logaritmică cu bază  $e$** 

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

**Funcția logaritmică cu bază oarecare**

Fie  $a > 0, a \neq 1$ . Atunci

$$(\log_a x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0$$

deci

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0.$$

**Funcția tangentă**

Fie  $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$ . Atunci

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

deci

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

### Funcția cotangentă

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

### 7.1.3 Derivata funcției compuse

**Teorema 7.4.** Fie  $I_1, I_2$  două intervale din  $\mathbb{R}$ ,  $u : I_1 \rightarrow I_2$ ,  $f : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in I_1$  astfel încât  $u$  este derivabilă în  $x_0$ , iar  $f$  este derivabilă în  $u(x_0)$ . Atunci  $f \circ u$  este derivabilă în  $x_0$ , iar

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0))u'(x_0)$$

**Demonstrație.** Putem începe în mod eronat astfel

$$\frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \cdot \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}, \quad (7.1)$$

urmând să trecem mai apoi la limită în ambii membri pentru  $x \rightarrow x_0$ . Deși acest artificiu este motivat de definiția derivatei unei funcții într-un punct și de faptul că egalitatea de demonstrat conține derivata lui  $u$  în  $x_0$ , membrul drept al egalității nu este bine definit pentru  $u(x) = u(x_0)$ , deoarece diferența  $u(x) - u(x_0)$  apare (și) la numitorul unei fracții. Încercăm să modificăm egalitatea de mai sus în așa fel încât să luăm în calcul și acest lucru. În acest scop, definim funcția auxiliară

$$h : I_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(u(x_0))}{y - u(x_0)}, & y \neq u(x_0) \\ f'(u(x_0)), & y = u(x_0) \end{cases}.$$

Deoarece

$$\lim_{y \rightarrow u(x_0)} h(y) = \lim_{y \rightarrow u(x_0)} \frac{f(y) - f(u(x_0))}{y - u(x_0)} = f'(u(x_0)) = h(u(x_0)),$$

$h$  este continuă în  $u(x_0)$ . În plus,

$$\frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{x - x_0} = h(u(x)) \cdot \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{pentru } x \in I_1, x \neq x_0.$$

Într-adevăr, dacă  $u(x) = u(x_0)$  atunci ambii membri ai egalității sunt 0, iar dacă  $u(x) \neq u(x_0)$ , egalitatea coincide cu (7.1), care este în acest caz validă, niciun numitor nemaifiind 0. Trecând la limită pentru  $x \rightarrow x_0$  și ținând seama de continuitatea lui  $f$  și  $u$ , se obține concluzia. ■

Egalitatea menționată în enunțul teoremei de mai sus se mai poate pune și sub forma prescurtată

$$(\mathbf{f}(\mathbf{u}))' = \mathbf{f}'(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}',$$

fiind deosebit de utilă pentru calculul derivatelor unor funcții care, fără a fi elementare, se pot obține prin compunerea unor funcții elementare. În aceste situații,  $u$  se definește adesea cu ajutorul **tuturor** termenilor dintr-o paranteză, de la exponent, de sub radical, de la numitor, ș.a.m.d.. După această înlocuire se identifică apoi  $f$ , ținând cont că funcția de plecare se scrie ca  $f(u)$ .

**Exemple** 1.  $(\sin(x^2 + x + 2))'$ .

Putem defini  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x) = x^2 + x + 2$  (folosim toți termenii din paranteză), iar în acest caz  $f$  este dată de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ , deoarece după înlocuire  $f(u) = \sin u$ . Atunci

$$\begin{aligned} (\sin(x^2 + x + 2))' &= \sin'(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 2)' \\ &= \cos(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1). \end{aligned}$$

Echivalent,

$$\begin{aligned} (\sin(x^2 + x + 2))' &= (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 2)' \\ &= \cos(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1). \end{aligned}$$

2.  $((3x + 2)^5)'$

Putem defini  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x) = 3x + 2$  (folosim toți termenii din paranteză), iar în acest caz  $f$  este dată de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5$ , deoarece după înlocuire  $f(u) = u^5$ . Atunci

$$((3x + 2)^5)' = (u^5)' = 5u^4 \cdot u' = 5(3x + 2)^4(3x + 2)' = 15(3x + 2)^4.$$

3.  $(\sqrt{x^2 + 1})'$

Putem defini  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x) = x^2 + 1$  (folosim toți termenii de sub radical), iar în acest caz  $f$  este dată de  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ , deoarece după înlocuire  $f(u) = \sqrt{u}$ . Atunci

$$(\sqrt{x^2 + 1})' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(x^2 + 1)' = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

### 7.1.4 $(f^g)'$

Formula de derivare a funcției compuse se poate aplica cu succes și pentru derivarea funcțiilor exponențiale în care atât baza cât și exponentul conțin variabila. În acest sens, fie  $I$  un interval și fie  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $f(x) > 0$  pentru orice  $x \in D$ . Putem defini atunci funcția  $f^g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^g(x) = (f(x))^{g(x)}$ .

Deoarece  $f(x)^{g(x)} > 0$  pentru orice  $x \in D$ , au loc relațiile

$$f^g = e^{\ln(f^g)} = e^{g \ln f},$$

de unde, ținând seama că  $(e^u)' = e^u \cdot u'$ , obținem că

$$\begin{aligned} (f^g)' &= (e^{g \ln f})' = e^{g \ln f} \cdot (g \ln f)' = e^{g \ln f} (g' \ln f + g (\ln f)') \\ &= f^g \left( g' \ln f + g \frac{f'}{f} \right), \end{aligned}$$

formulă care se poate scrie și sub forma

$$(f^g)' = f^g \ln f \cdot g' + g f^{g-1} \cdot f'.$$

Se poate observa că  $(f^g)'$  este suma a doi termeni, primul reprezentând valoarea derivatei atunci când  $f$  este privită ca o constantă (iar  $f^g$  reprezintă în consecință o funcție exponențială), iar al doilea reprezentând valoarea derivatei atunci când  $g$  este privită ca o constantă (iar  $f^g$  reprezintă în consecință o funcție putere).

### 7.1.5 Derivata unui determinant funcțional

Fie  $f_{ij} : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , funcții derivabile pe  $D$ . Atunci determinantul funcțional definit cu ajutorul acestor funcții,

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad F = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

este la rândul său o funcție derivabilă pe  $D$  și

$$\begin{aligned} F' &= \begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} & \cdots & f'_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & \cdots & f'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{n1} & f'_{n2} & \cdots & f'_{nn} \end{vmatrix}, \\ &= \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n, \end{aligned}$$

în determinantul  $\Delta_i$  din membrul drept,  $1 \leq i \leq n$ , fiind derivate doar funcțiile de pe linia  $i$ . Demonstrația se poate realiza cu ajutorul formulei de dezvoltare a unui determinant.

### Exercițiu

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Demonstrați că  $f'(x) = 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

### Soluție

Conform formulei de mai sus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} \right)' \\ &= \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ -\sin(x+a) & -\sin(x+b) & -\sin(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

deoarece atât determinanții în care două linii sunt proporționale cât și determinanții în care toate elementele de pe o linie sunt egale cu 0 sunt nuli. ■

## 7.1.6 Derivata funcției inverse

Fie  $I, J$  intervale din  $\mathbb{R}$  și fie  $f : I \rightarrow J$  o funcție continuă și bijectivă. Atunci  $f$  este inversabilă, având loc relațiile

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

respectiv

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{pentru orice } y \in J,$$

iar  $f^{-1}$  este de asemenea continuă.

Ne propunem să determinăm transmiterea derivabilității de la  $f$  la  $f^{-1}$ . Derivând (formal, pentru moment) relația  $f^{-1}(f(x)) = x$  cu ajutorul formulei de derivare a funcției compuse, obținem că  $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$ , deci

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Rămâne acum să dăm acestei formule un sens mai riguros.

**Teorema 7.5.** Fie  $I, J$  intervale din  $\mathbb{R}$  și fie  $f : I \rightarrow J$  o funcție continuă și bijectivă. Dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , iar  $f'(x_0) \neq 0$ , atunci  $f^{-1} : J \rightarrow I$  este derivabilă în  $y_0 = f(x_0)$ , iar

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**Demonstrație.** Fie  $y \in J$ ,  $y \neq y_0$ . Deoarece  $f$  este bijectivă, există un unic  $x \in I$  astfel ca  $y = f(x)$ , iar cum  $y \neq y_0 = f(x_0)$ , urmează că  $x \neq x_0$ . Se observă atunci că

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Dacă  $y \rightarrow f(x_0)$ , atunci, conform continuității lui  $f^{-1}$ , urmează că  $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(f(x_0))$ , deci  $x \rightarrow x_0$ . De aici,

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

■

### Exercițiu

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 2x$ . Demonstrați că  $f$  este bijectivă și calculați  $(f^{-1})'(3)$ .

### Soluție

Mai întâi, să observăm faptul că  $f$  este continuă și strict crescătoare, fiind suma a două funcții continue și strict crescătoare. Fiind strict monotonă,  $f$  este injectivă. Cum  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , iar  $f$  transformă un interval într-un interval, fiind continuă, urmează că  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , deci  $f$  este surjectivă. Cum  $f$  este atât injectivă cât și surjectivă, urmează că ea este bijectivă, deci și inversabilă.



Deoarece  $f'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , urmează că  $f^{-1}$  este derivabilă în orice  $y = f(x) \in \mathbb{R}$ , iar  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ .

Pentru  $y = 3$ , urmează că  $x^3 + 2x = 3$ , deci  $x = 1$  (cum  $f$  este injectivă, soluția ecuației  $f(x) = 3$  este unică). Urmează că  $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$ . ■

### 7.1.7 Diferențiala unei funcții

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $I$  este un interval, și fie  $x \in I$ . Să presupunem că  $f$  este derivabilă în  $x_0$ . În acest caz, conform definiției derivatei unei funcții într-un punct, se obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

Să considerăm atunci funcția  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

și să observăm că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0,$$

deci  $\alpha$  este continuă în  $x_0$ . În plus, pentru  $x \neq x_0$ , avem că

$$\begin{aligned} & f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \alpha(x)(x - x_0) \\ &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) (x - x_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

această egalitate fiind valabilă și pentru  $x = x_0$ . Aceste considerații motivează introducerea definiției următoare.

#### Funcții diferențiabile într-un punct

Vom spune că funcția  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este *diferențiabilă* în  $x_0 \in I$  dacă există numărul  $A \in \mathbb{R}$  și funcția  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continuă și nulă în  $x_0$ , astfel ca

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0).$$

Conform celor de mai sus, dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , atunci  $f$  este diferențiabilă în  $x_0$ , iar  $A = f'(x_0)$ . Reciproc, să presupunem că  $f$  este diferențiabilă în  $x_0$ . Atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} A + \alpha(x) = A,$$

deci  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , iar  $f'(x_0) = A$ . Se obține de aici următorul rezultat.

**Teorema 7.6.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Atunci  $f$  este derivabilă în  $x_0 \in I$  dacă și numai dacă este diferențiabilă în  $x_0 \in I$ .

Conform celor de mai sus, o funcție derivabilă într-un punct  $x_0$  admite în acel punct următoarea dezvoltare de ordinul întâi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \quad \text{cu } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

(de fapt, vom vedea ulterior că această dezvoltare reprezintă formula lui Taylor de ordinul întâi asociată funcției  $f$  în punctul  $x_0$ ). Cum  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , termenul  $\alpha(x)(x - x_0)$  este de ordin mai mic decât  $f'(x_0)(x - x_0)$  pentru  $x$  apropiat de  $x_0$ . Ignorând acest termen, obținem următoarea formulă de aproximare

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x \approx x_0,$$

exprimabilă și sub forma

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x - x_0 \approx 0,$$

sau, cu notația  $x - x_0 = h$ ,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h, \quad \text{pentru } h \approx 0,$$

în care diferența  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  reprezintă variația funcției atunci când argumentul variază de la  $x_0$  la  $x_0 + h$ . Suntem atunci conduși de considerentele de aproximare de mai sus la a defini următorul concept de diferențială a unei funcții.

### Diferențiala unei funcții într-un punct

Fiind dată o funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă în  $x_0 \in I$ , vom numi *diferențială a funcției  $f$  în  $x_0$*  funcția liniară  $df(x_0)$  definită prin

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)(h), \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Urmează atunci că

$$f(x) - f(x_0) \approx df(x_0)(h), \quad \text{pentru } h \approx 0,$$

în loc de  $df(x_0)(h)$  folosindu-se și notația  $df(x_0; h)$ .

Pentru funcția identică  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x$ , urmează că

$$dx(x_0)(h) = h, \quad \text{pentru orice } x_0 \in \mathbb{R},$$

iar întrucât  $dx(x_0)$  este independent de  $x_0$ , se va folosi în cele ce urmează notația simplificată  $dx$ . Cu notațiile de mai sus,

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)dx(h), \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R},$$

de unde obținem următoarea egalitate de funcții liniare

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei unei funcții într-un punct

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Pentru un punct arbitrar  $x$ , obținem deci

$$df(x) = f'(x)dx, \quad \text{respectiv} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}. \quad (7.2)$$

### 7.1.8 Operații cu funcții diferențiabile

Datorită relației (7.2), regulile de calcul ale derivatelor unor funcții se transmit și la diferențiale.

**Teorema 7.7.** *Fie  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in I$ ,  $f, g$  derivabile în  $x$ . Atunci*

1.  $f + g, f - g$  sunt diferențiabile în  $x$ , iar

$$d(f + g)(x) = (f + g)'(x)dx = df(x) + dg(x),$$

respectiv

$$d(f - g)(x) = (f - g)'(x)dx = df(x) - dg(x).$$

2.  $\alpha f$  este diferențabilă în  $x$  pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ , iar

$$d(\alpha f)'(x) = (\alpha f)'(x) = \alpha df(x).$$

3.  $fg$  este diferențabilă în  $x_0$ , iar

$$d(fg)(x) = (fg)'(x)dx = df(x)g(x) + f(x)dg(x).$$

4.  $\frac{f}{g}$  este diferențabilă în  $x$  dacă  $g(x) \neq 0$ , iar

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x)dx = \frac{df(x)g(x) - f(x)dg(x)}{g(x)^2}$$

Regulile de calcul de mai sus se mai pot scrie și sub următoarele forme prescurtate, prin omiterea punctului curent

$$\begin{aligned} d(\mathbf{f} + \mathbf{g}) &= d\mathbf{f} + d\mathbf{g}, & d(\mathbf{f} - \mathbf{g}) &= d\mathbf{f} - d\mathbf{g}, & d(\alpha\mathbf{f}) &= \alpha d\mathbf{f}, \\ d(\mathbf{fg}) &= d\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}, & d\left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right) &= \frac{d\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}}{\mathbf{g}^2}. \end{aligned}$$

**Exemple** 1.  $d(\sin x) = (\sin x)'dx = \cos x dx$ .

$$2. d(\cos^3 x) = (\cos^3 x)'dx = 3 \cos^2 x (\cos x)'dx = -3 \cos^2 x \sin x dx$$

$$3. d(x^2 e^x) = (x^2 e^x)'dx = (2x e^x + x^2 e^x)dx.$$

$$4. d(x^2 e^x) = d(x^2) \cdot e^x + x^2 \cdot d(e^x) = 2x e^x dx + x^2 e^x dx = (2x + x^2) e^x dx.$$

### 7.1.9 Diferențiala funcției compuse

Are de asemenea loc și o formulă de diferențiere a funcției compuse similară celei de derivare.

**Teorema 7.8.** Fie  $I_1, I_2$  două intervale din  $\mathbb{R}$ ,  $u : I_1 \rightarrow I_2$ ,  $f : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x \in I_1$  astfel încât  $u$  este diferențabilă în  $x$ , iar  $f$  este diferențabilă în  $u(x)$ . Atunci  $f \circ u$  este diferențabilă în  $x$ , iar

$$d(f \circ u)(x) = (f \circ u)'(x)dx = f'(u(x))du(x).$$

Prin omiterea punctului curent, regula de mai sus se poate scrie sub următoarea formă prescurtată

$$d(f \circ u) = f'(u) du.$$

De remarcat faptul că diferențiala funcției compuse se calculează ca și cum  $u$  ar fi variabilă independentă.

**Exemple** 1.  $d(\cos^3 x) = d(u^3) = 3u^2 du = 3 \cos^2 x d(\cos x) = -3 \cos^2 x \sin x dx$ .

2.  $d(e^{\sin x}) = d(e^u) = e^u du = e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} \cos x dx$ .

## 7.2 Derivate și diferențiale de ordin superior

### 7.2.1 Derivate de ordin superior

Fie  $I$  un interval și fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă pe o vecinătate a lui  $x_0 \in I$ . Dacă  $f'$  este la rândul său derivabilă în  $x_0$ , vom spune că  $f$  este *de două ori derivabilă în  $x_0$*  iar derivata lui  $f'$  în  $x_0$  se va numi *derivata a doua a lui  $f$*  sau *derivata de ordinul al doilea a lui  $f$* , fiind notată  $f''(x_0)$  sau  $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$ . Conform definiției,

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă  $f$  este de două ori derivabilă în orice  $x \in I$ , atunci  $f$  se numește *de două ori derivabilă pe  $I$* .

În mod inductiv, dacă  $f$  este derivabilă de  $n - 1$  ori pe o vecinătate a lui  $x_0$ , iar derivata de ordinul  $n - 1$  este la rândul său derivabilă în  $x_0$ , vom spune că  $f$  este de  $n$  ori derivabilă în  $x_0$ . Derivata de ordinul  $n$  a lui  $f$  în  $x_0$ , notată prin  $f^{(n)}(x_0)$  sau  $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$ , este definită ca derivată a derivatei de ordinul  $n - 1$ , în sensul că

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Similar, dacă  $f$  este de  $n$  ori derivabilă în orice  $x \in I$ , atunci  $f$  se numește *de  $n$  ori derivabilă pe  $I$* .

**Exemplu**

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2+3x}$ . Atunci

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 3)e^{x^2+3x}, \\ f''(x) &= \left( (2x + 3)e^{x^2+3x} \right)' = (4x^2 + 12x + 11)e^{x^2+3x} \\ f'''(x) &= \left( (4x^2 + 12x + 11)e^{x^2+3x} \right)' = (8x^3 + 36x^2 + 66x + 45)e^{x^2+3x}. \end{aligned}$$

### Funcții de clasă $C^k$ . Difeomorfisme

Vom nota

$$\begin{aligned} C^n(I) &= \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ de } n \text{ ori derivabilă pe } I, f^{(n)} \text{ continuă pe } I \right\} \\ C^\infty(I) &= \{ f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ derivabilă de orice ordin pe } I \}. \end{aligned}$$

Dacă  $f \in C^n(I)$  (respectiv  $f \in C^\infty(I)$ ), atunci  $f$  se va numi *de clasă  $C^n$  pe  $I$*  (respectiv *de clasă  $C^\infty$  pe  $I$* , sau *indefinit derivabilă pe  $I$* ). Dacă  $f : I \rightarrow J$ ,  $f$  inversabilă este în așa fel încât atât  $f$  cât și  $f^{-1}$  sunt derivabile pe domeniile lor (respectiv sunt de clasă  $C^n$  pe domeniile lor),  $f$  se va numi *difeomorfism* (respectiv  *$C^n$ -difeomorfism*) pe  $I$ .

**Exemple** 1. Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$  (funcția polinomială de gradul al doilea) este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f'(x) = 2ax + b$ ,  $f''(x) = 2a$ ,  $f^{(m)}(x) = 0$  pentru  $m \geq 3$ .

2. Funcția  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $a_n \in \mathbb{R}^*$  (funcția polinomială de gradul  $n$ ) este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f^{(n)}(x) = n! a_n$ ,  $f^{(m)}(x) = 0$  pentru  $m > n$ .

3. Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f'(x) = e^x$ ,  $f''(x) = e^x$ , putându-se demonstra prin inducție că  $f^{(n)}(x) = e^x$  pentru  $x \in \mathbb{R}$  și  $n \geq 1$ .

4. Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ,  $f''(x) = -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$ , putându-se demonstra prin inducție că

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\begin{aligned}\sin^{(4k)}(x) &= \sin x, & \sin^{(4k+1)}(x) &= \cos x \\ \sin^{(4k+2)}(x) &= -\sin x, & \sin^{(4k+3)}(x) &= -\cos x\end{aligned}$$

pentru  $x \in \mathbb{R}$  și  $k \geq 0$ .

5. Funcția  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$  este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f'(x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ ,  $f''(x) = -\cos x = \cos(x + \frac{2\pi}{2})$ , putându-se demonstra prin inducție că

$$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\begin{aligned}\cos^{(4k)}(x) &= \cos x, & \cos^{(4k+1)}(x) &= -\sin x \\ \cos^{(4k+2)}(x) &= -\cos x, & \cos^{(4k+3)}(x) &= \sin x\end{aligned}$$

pentru  $x \in \mathbb{R}$  și  $k \geq 0$ .

6. Funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{-a\}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+a}$  este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ , iar  $f'(x) = -\frac{1}{(x+a)^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2}{(x+a)^3}$ , putându-se demonstra prin inducție că

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}} \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\} \text{ și } n \geq 1.$$

## 7.2.2 Formula lui Leibniz

Fiind date  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^n$  pe  $I$ , ne propunem să determinăm o formulă pentru derivata de ordinul  $n$  a produsului  $fg$  al acestora.

**Teorema 7.9.** Fie  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^n$  pe  $I$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Atunci  $fg$  este de clasă  $C^n$  pe  $I$ , iar

$$(fg)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + \dots + C_n^n f g^{(n)}.$$

**Demonstrație.** Vom demonstra prin inducție după  $n$ . Pentru  $n = 1$ , formula este adevărată, deoarece se reduce la

$$(fg)' = f'g + fg',$$

care nu este altceva decât formula de derivare a produsului.

Să presupunem că formula este adevărată pentru  $n = k$ , adică

$$(fg)^{(k)} = C_k^0 f^{(k)} g + C_k^1 f^{(k-1)} g' + C_k^2 f^{(k-2)} g'' + \dots + C_k^k f g^{(k)}$$

și să demonstrăm că ea este valabilă pentru  $n = k + 1$ .

Se observă că

$$\begin{aligned} (fg)^{(k+1)} &= ((fg)^{(k)})' = (C_k^0 f^{(k)} g + C_k^1 f^{(k-1)} g' + C_k^2 f^{(k-2)} g'' + \dots + C_k^k f g^{(k)})' \\ &= (C_k^0 f^{(k)} g)' + (C_k^1 f^{(k-1)} g')' + (C_k^2 f^{(k-2)} g'')' + \dots + (C_k^k f g^{(k)})' \\ &= (C_k^0 f^{(k+1)} g + C_k^0 f^{(k)} g') + (C_k^1 f^{(k)} g' + C_k^1 f^{(k-1)} g'') \\ &\quad + (C_k^2 f^{(k-1)} g'' + C_k^2 f^{(k-2)} g''') + \dots + (C_k^k f' g^{(k)} + C_k^k f g^{(k+1)}) \\ &= C_k^0 f^{(k+1)} g + (C_k^0 + C_k^1) f^{(k)} g' + (C_k^1 + C_k^2) f^{(k-1)} g'' + \dots \\ &\quad + C_k^k f g^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Cum  $C_k^0 = C_{k+1}^0 = 1$ ,  $C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$ , iar  $C_k^l + C_k^{l+1} = C_{k+1}^{l+1}$  pentru  $1 \leq l \leq k-1$ , urmează că

$$(fg)^{(k+1)} = C_{k+1}^0 f^{(k+1)} g + C_{k+1}^1 f^{(k)} g' + C_{k+1}^2 f^{(k-1)} g'' + \dots + C_{k+1}^{k+1} f g^{(k+1)},$$

deci propoziția este valabilă și pentru  $n = k + 1$ . În concluzie, conform principiului inducției matematice, ea este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . ■

Formula de calcul a derivatei de ordinul  $n$  a unui produs demonstrată mai sus poartă numele de *formula lui Leibniz*. Remarcăm asemănarea între această formulă și formula binomială

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n.$$

În aplicații, formula se utilizează în special pentru funcții produs în care unul dintre factori este o funcție polinomială (și deci pentru care derivatele de la un anumit ordin încolo sunt nule, micșorând numărul termenilor nenuli din sumă), iar celălalt factor are derivatele de ordin superior ușor de determinat.

### Exercițiu

Determinați  $(x^2 e^{2x})^{(50)}$ .



**Soluție**

Considerând  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = e^{2x}$ , observăm că  $f^{(k)}(x) = 0$  pentru orice  $k \geq 3$ , iar  $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$  pentru orice  $k \geq 0$ . Atunci

$$\begin{aligned} (x^2 e^{2x})^{(50)} &= C_{50}^{48} (x^2)'' (e^{2x})^{(48)} + C_{50}^{49} (x^2)' (e^{2x})^{(49)} + C_{50}^{50} x^2 (e^{2x})^{(50)} \\ &= C_{50}^{48} 2 \cdot 2^{48} e^{2x} + C_{50}^{49} 2x \cdot 2^{49} e^{2x} + C_{50}^{50} x^2 \cdot 2^{50} e^{2x} \\ &= 2^{49} e^{2x} (1225 + 100x + 2x^2). \end{aligned}$$

■

**7.2.3 Diferențiale de ordin superior**

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in I$ . Vom spune că  $f$  este *de două ori diferențiabilă în  $x_0$*  dacă  $f$  este derivabilă într-o vecinătate a lui  $x_0$ , iar  $f'$  este diferențiabilă în  $x_0$ . În aceste condiții, vom numi *diferențiala de ordinul al doilea a funcției  $f$  în  $x_0$* , notată  $d^2 f(x_0)$ , funcția de gradul al doilea definită prin

$$d^2 f(x_0)(h) = f''(x_0)h^2, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obținem atunci următoarea egalitate de funcții de gradul al doilea

$$d^2 f(x_0) = f''(x_0)dx^2,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei de ordinul al doilea a unei funcții într-un punct

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

Aici, prin  $dx^2$  se va înțelege  $dx \cdot dx$ . Inductiv, vom spune că  $f$  este *de  $n$  ori diferențiabilă în  $x_0$*  dacă  $f$  este derivabilă de  $n - 1$  ori într-o vecinătate a lui  $x_0$ , iar  $f^{(n-1)}$  este diferențiabilă în  $x_0$ . În aceste condiții, vom numi *diferențiala de ordinul  $n$  a funcției  $f$  în  $x_0$* , notată  $d^n f(x_0)$ , funcția de gradul  $n$  definită prin

$$d^n f(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0)h^n, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obținem atunci următoarea egalitate de funcții de gradul  $n$

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei de ordinul  $n$  a unei funcții într-un punct

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}.$$

Pentru un punct arbitrar  $x$ , obținem deci

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n, \quad \text{respectiv} \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

**Exemple** 1.  $d^n(e^{ax}) = (e^{ax})^{(n)}dx^n = a^n e^{ax} dx^n$ , pentru  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

2.  $d^n(\ln(ax+b)) = (\ln(ax+b))^{(n)}dx^n = \frac{(-1)^{n-1} a^n (n-1)!}{(ax+b)^n} dx^n$ , pentru  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $ax+b > 0$ .

### 7.3 Teoremele fundamentale ale calculului diferențial

În această secțiune vom prezenta câteva proprietăți importante ale funcțiilor derivabile și unele aplicații ale acestora în studiul monotoniei și aproximării funcțiilor. Începem prin a defini noțiunea de punct de extrem.

#### Puncte de minim local. Valori minime locale

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval. Vom spune că  $x_0 \in I$  este un *punct de minim local* dacă există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca  $f(x_0) \leq f(x)$  pentru orice  $x \in V \cap I$ , adică valoarea  $f(x_0)$  a lui  $f$  în  $x_0$  este cea mai mică valoare a acestei funcții pe o vecinătate a lui  $x_0$ . În aceste condiții  $f(x_0)$  se numește *valoare minimă locală*.

#### Puncte de maxim local. Valori maxime locale

Similar, vom spune că  $x_0 \in I$  este un *punct de maxim local* dacă există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca  $f(x_0) \geq f(x)$  pentru orice  $x \in V \cap I$ , adică valoarea  $f(x_0)$  a lui  $f$  în  $x_0$  este cea mai mare valoare a acestei funcții pe o vecinătate a lui  $x_0$ . În aceste condiții  $f(x_0)$  se numește *valoare maximă locală*.

#### Puncte de extrem local. Valori extreme locale

Dacă  $x_0$  este un punct de minim sau maxim local al funcției  $f$ , se spune atunci că  $x_0$  este un *punct de extrem local* al funcției  $f$ , valorile funcției  $f$  în punctele de extrem local numindu-se *valori extreme locale* ale funcției  $f$ . De asemenea, dacă

$x_0$  este un punct de minim (maxim) local al funcției  $f$ , punctul corespunzător  $(x_0, f(x_0))$  de pe graficul funcției  $f$  se numește *punct de minim (maxim) local al graficului*.

### Puncte de extrem global. Valori extreme globale

Dacă  $x_0$  este în așa fel încât  $f(x_0) \leq f(x)$  pentru orice  $x \in I$ , vom spune că  $x_0$  este *punct de minim global* al lui  $f$ , iar dacă  $f(x_0) \geq f(x)$  pentru orice  $x \in I$ , vom spune că  $x_0$  este *punct de maxim global* al lui  $f$ . Dacă  $x_0$  este un punct de minim sau maxim global al funcției  $f$ , se spune atunci că  $x_0$  este un *punct de extrem global* al funcției  $f$ , valorile funcției  $f$  în punctele de extrem local numindu-se *extreme globale* ale funcției  $f$ . De asemenea, dacă  $x_0$  este un punct de minim (maxim) global al funcției  $f$ , punctul corespunzător  $(x_0, f(x_0))$  de pe graficul funcției  $f$  se numește *punct de minim (maxim) global al graficului*.

Se observă că orice punct de extrem global este și punct de extrem local, nu însă și reciproc. De exemplu 2 este punct de minim local al funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$ , deoarece  $f(2) = 0$ , iar pe o vecinătate suficient de mică a sa  $f$  ia doar valori pozitive, dar nu este punct de minim global, deoarece  $f$  ia și valori negative (de exemplu,  $f(0) = -4$ ).

Se poate observa că o funcție  $f$  poate admite mai multe puncte de minim sau maxim local, putând exista deasemenea valori minime locale mai mari decât valori maxime locale.

**Exemple** 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  are 0 ca punct de minim global, deoarece  $f(0) = 0$ , iar  $f(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . În concluzie, 0 este și punct de minim local. Se observă de asemenea că  $f'(0) = 0$ .

2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x - 3)^2$  are 1 ca punct de maxim local, deoarece  $f(1) = 0$ , iar  $f(x) \leq 0$  pentru  $x$  apropiat de 1 și pe 3 ca punct de minim local, deoarece  $f(3) = 0$ , iar  $f(x) \geq 0$  pentru  $x$  apropiat de 3. Totuși, acestea nu sunt puncte de extrem global, deoarece  $f$  ia atât valori strict negative (de exemplu  $f(0) = -18$ ), cât și valori strict pozitive (de exemplu  $f(4) = 18$ ).

### 7.3.1 Teorema lui Fermat

Vom preciza în cele ce urmează un principiu de localizare a punctelor de extrem ale unei funcții date, cunoscut sub numele de *teorema lui Fermat*

**Teorema 7.10.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, și fie  $x_0$  un punct de extrem interior lui  $I$  în care  $f$  este derivabilă. Atunci  $f'(x_0) = 0$ .

**Demonstrație.** Pentru fixarea ideilor, să presupunem că  $x_0$  este punct de maxim local, în caz contrar raționându-se analog.

Deoarece  $x_0$  este punct interior lui  $I$ , există atunci  $\varepsilon_1 > 0$  astfel ca  $(x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1) \subset I$ , iar deoarece  $x_0$  este punct de maxim local, există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca  $f(x_0) \geq f(x)$  pentru orice  $x \in V \cap I$ . Cum  $V \in \mathcal{V}(x_0)$ , există  $\varepsilon_2 > 0$  astfel ca  $(x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2) \subset V$ . Fie acum  $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . Atunci  $f(x_0) \geq f(x)$  pentru orice  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ .

Pentru  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ , urmează că  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ , de unde, prin trecere la limită pentru  $x \rightarrow x_0$ ,

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Similar, pentru  $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ , urmează că  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ , de unde, prin trecere la limită pentru  $x \rightarrow x_0$ ,

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Cum  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , urmează că  $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ , de unde  $f'(x_0) = 0$ , ceea ce încheie demonstrația. ■

Se poate observa că dacă  $x_0$  este un punct de extrem care nu este interior intervalului  $I$ , atunci  $f'(x_0)$  poate să nu fie 0. În acest sens, fie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ . Atunci 0 și 1 sunt puncte de minim global, respectiv de maxim global, deoarece  $f$  este strict crescătoare pe  $[0, 1]$ , deci sunt și puncte de extrem local. Totuși,  $f'(x) = 1 \neq 0$  pentru orice  $x \in [0, 1]$ .

De asemenea, reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată, în sensul că dacă  $f'(x_0) = 0$ , atunci  $x_0$  nu este neapărat punct de extrem, chiar dacă este interior intervalului  $I$ . În acest sens, fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ . Atunci  $f$  este

derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $f'(x) = 3x^2$ , pentru  $x \in \mathbb{R}$ , deci  $f'(0) = 0$ . Totuși, 0 nu este punct de extrem, deoarece  $f(0) = 0$ , iar  $f$  ia în orice vecinătate a lui 0 atât valori strict negative (pentru  $x < 0$ ), cât și valori strict pozitive (pentru  $x > 0$ ).

În fine, să observăm și că o funcție poate avea puncte de extrem în care în care nu este derivabilă. În acest sens, fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ . Atunci  $0 = f(0) \leq f(x)$  pentru  $x \in \mathbb{R}$ , deci 0 este punct de minim global, dar  $f'_s(0) = -1 \neq f'_d(0) = 1$ , deci  $f$  nu este derivabilă în 0.

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Fermat.

### Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat

Dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0$  este un punct de extrem interior lui  $I$  în care  $f$  este derivabilă, atunci tangenta la grafic în punctul de extrem corespunzător  $A(x_0, f(x_0))$  al graficului, de pantă  $f'(x_0) = 0$ , este paralelă cu  $Ox$ .

### Puncte critice

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Vom spune că  $x_0$  este un *punct critic* al lui  $f$  dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , iar  $f'(x_0) = 0$ .

Altfel spus, punctele critice ale lui  $f$  sunt rădăcinile lui  $f'$ . Cu această precizare, teorema lui Fermat arată că punctele de extrem ale unei funcții situate în interiorul domeniului de definiție și în care acea funcție este derivabilă se găsesc printre punctele critice. Totuși, s-a observat anterior că nu orice punct critic este punct de extrem.

Cu ajutorul teoremei lui Fermat, se poate demonstra și următorul rezultat.

**Teorema 7.11.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval,  $f$  derivabilă pe  $I$ . Atunci  $f'$  are proprietatea lui Darboux pe  $I$ .

## 7.3.2 Teorema lui Rolle

### Funcție Rolle pe un interval

Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Vom spune că  $f$  este *funcție Rolle* pe  $[a, b]$  dacă  $f$  este continuă pe  $[a, b]$  și derivabilă pe  $(a, b)$ . Următorul rezultat poartă numele de *teorema lui Rolle*.

**Teorema 7.12.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  funcție Rolle pe  $[a, b]$ , pentru care  $f(a) = f(b)$ . Atunci există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f'(c) = 0$ .

**Demonstrație.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietățile din enunț. Deoarece  $f$  este continuă pe  $[a, b]$ ,  $f$  este mărginită și își atinge marginile pe  $[a, b]$ , adică există  $m, M \in \mathbb{R}$  și  $x_m, x_M \in [a, b]$  astfel ca  $m \leq f(x) \leq M$  pentru  $x \in [a, b]$ , iar  $f(x_m) = m$ ,  $f(x_M) = M$ . Cum  $x_m, x_M \in [a, b]$ , ele pot fi fie extremități ale intervalului  $[a, b]$ , fie puncte interioare acestuia.

Dacă atât  $x_m$  cât și  $x_M$  sunt extremități ale intervalului  $[a, b]$ , atunci fie  $x_m = x_M$ , și atunci  $f$  este constantă, valoarea sa minimă fiind egală cu valoarea sa maximă, fie  $x_m$  și  $x_M$  sunt distincte și atunci ținând seama de faptul că  $f(a) = f(b)$ , obținem din nou că  $f$  este constantă. În ambele cazuri, deoarece  $f$  este constantă pe  $[a, b]$ , atunci  $f'(x) = 0$  pentru orice  $x \in (a, b)$ .

Presupunem acum că unul dintre  $x_m$  și  $x_M$  este interior intervalului  $[a, b]$ . Atunci, conform teoremei lui Fermat, valoarea derivatei lui  $f$  în acest punct este 0, ceea ce încheie demonstrația. ■

### Interpretarea geometrică a teoremei lui Rolle

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Rolle.

Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție Rolle pe  $[a, b]$  pentru care  $f(a) = f(b)$ , atunci există pe graficul funcției  $f$  un punct  $C(c, f(c))$  în care tangenta la grafic este paralelă cu  $Ox$ .

Teorema lui Rolle admite două consecințe importante privind localizarea unor rădăcini ale derivatei, respectiv ale funcției.

**Corolar 7.12.1.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval,  $f$  derivabilă pe  $I$ . Între două rădăcini ale lui  $f$  se află cel puțin o rădăcină a lui  $f'$ .

**Demonstrație.** Fie  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$ , astfel că  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ . Atunci  $f$  este funcție Rolle pe  $[x_1, x_2]$  și aplicând teorema lui Rolle pe acest interval obținem că există  $c \in (x_1, x_2)$  astfel încât  $f'(c) = 0$ , ceea ce trebuia demonstrat. ■

**Corolar 7.12.2.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval,  $f$  derivabilă pe  $I$ . Între două rădăcini consecutive ale lui  $f'$  se află cel mult o rădăcină a lui  $f$ .

**Demonstrație.** Fie  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$  rădăcini consecutive ale lui  $f'$ . Presupunem prin reducere la absurd că există două rădăcini  $a, b$  ale lui  $f$ ,  $a < b$ , situate între  $x_1$  și  $x_2$ , deci  $x_1 < a < b < x_2$ . Conform Corolarului 7.12.1, există cel puțin încă o rădăcină  $x_3$  a lui  $f'$  situată între  $a$  și  $b$ , ceea ce înseamnă că  $x_1, x_2$  nu sunt rădăcini consecutive, contradicție. ■

Cu ajutorul acestor corolarii se va preciza un algoritm de determinare a numărului rădăcinilor unei ecuații situate într-un interval dat.

### Șirul lui Rolle

Fiind dată funcția derivabilă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, dorim să determinăm numărul rădăcinilor ecuației  $f(x) = 0$ . În acest scop, procedăm în următoarele etape.

1. Rezolvăm ecuația  $f'(x) = 0$  și determinăm rădăcinile  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ale lui  $f'$ .
2. Determinăm  $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)$  și limitele  $l_1$  și  $l_2$  în capătul inferior, respectiv superior al lui  $I$ .
3. Construim șirul  $R_0 = \operatorname{sgn}(l_1)$ ,  $R_1 = \operatorname{sgn} f(c_1)$ ,  $R_2 = \operatorname{sgn} f(c_2)$ ,  $\dots$ ,  $R_n = \operatorname{sgn} f(c_n)$ ,  $R_{n+1} = \operatorname{sgn} f(l_2)$ , numit *șirul lui Rolle*, cu convenția că  $\operatorname{sgn}(+\infty) = 1$ ,  $\operatorname{sgn}(-\infty) = -1$ , întrucât limitele  $l_1$  și  $l_2$  pot fi și infinite. De asemenea, în acest șir se pot trece  $+$  și  $-$  în loc de  $+1$  și respectiv  $-1$ . Dacă doi termeni consecutivi  $R_i$  și  $R_{i+1}$  sunt identici, atunci între abscisele care le corespund nu se află nicio rădăcină a lui  $f$ . Dacă  $R_i$  și  $R_{i+1}$  sunt diferiți, dar nenuli, atunci între abscisele care le corespund se află exact o rădăcină a lui  $f$ . În fine, dacă un termen  $R_i$  este nul, aceasta înseamnă că abscisa care-i corespunde este rădăcină de ordinul cel puțin 2 a lui  $f$ , pentru determinarea exactă a ordinului de multiplicitate fiind necesară determinarea valorilor derivatelor de ordin superior în acest punct.

### Exercițiu

Determinați numărul de rădăcini reale ale ecuației  $2x^3 - 12x^2 + 18x + 3 = 0$ .

### Soluție

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 2$ . Atunci  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 24x + 18 = 0$ , de unde  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ , iar  $f(x_1) = 11$ ,  $f(x_2) = 3$ . Cum  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , urmează că șirul lui Rolle este  $- + + +$ , schimbarea de semn petrecându-se între  $R_0$  (corespunzător lui  $x = -\infty$ ) și  $R_1$  (corespunzător lui  $x_1 = 1$ ). Atunci ecuația dată are o singură rădăcină reală, situată în intervalul  $(-\infty, 1)$ . ■

### Exercițiu

Determinați numărul de rădăcini reale ale ecuației  $x^2 - 2 \ln x + m = 0$  în funcție

de valorile parametrului real  $m$ .

### Soluție

Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2 \ln x + m$ . Atunci  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{2}{x} = 0$ , de unde  $x_1 = 1$  (rădăcina  $x_2 = -1$  nu convine, întrucât nu aparține domeniului de definiție al logaritmului natural), iar  $f(x_1) = 1 + m$ . De asemenea,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

Dacă  $m < -1$ , șirul lui Rolle este  $+ - +$ , schimbările de semn petrecându-se între  $R_0$  (corespunzător lui  $x = 0$ ) și  $R_1$  (corespunzător lui  $x_1 = 1$ ), respectiv între  $R_1$  (corespunzător lui  $x_1 = 1$ ) și  $R_2$  (corespunzător lui  $x = +\infty$ ). Atunci ecuația dată are două rădăcini reale, situată în intervalele  $(0, 1)$  și respectiv  $(1, \infty)$ .

Dacă  $m = 1$ , șirul lui Rolle este  $+ 0 +$ ,  $x_1 = 1$  fiind rădăcină de ordinul cel puțin 2. Cum  $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2}$ , urmează că  $f''(1) \neq 0$ , iar  $x_1 = 1$  este rădăcină dublă a ecuației date, aceasta neavând alte rădăcini reale.

Dacă  $m > -1$ , șirul lui Rolle este  $+ + +$ , fără schimbări de semn. Urmează că ecuația dată nu are rădăcini reale. ■

### 7.3.3 Teorema lui Lagrange

Teorema lui Rolle este un caz particular al următorului rezultat, numit *teorema lui Lagrange* sau *teorema creșterilor finite*.

**Teorema 7.13.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  funcție Rolle pe  $[a, b]$ . Atunci există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Demonstrație.** Fie  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) - kx$ , unde  $k \in \mathbb{R}$  este pentru moment arbitrar. Atunci  $g$  este funcție Rolle pe  $[a, b]$ .

Determinăm  $k$  astfel încât  $g(a) = g(b)$ , cu scopul de a putea aplica lui  $g$  teorema lui Rolle. Atunci  $f(b) - kb = f(a) - ka$ , de unde  $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . În aceste condiții, există  $c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $g'(c) = 0$ . Dar

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - k = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

de unde concluzia. ■

### Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Lagrange.



Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție Rolle pe  $[a, b]$ , atunci există pe graficul funcției  $f$  un punct  $C(c, f(c))$  în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda  $AB$ , unde  $A(a, f(a))$  și  $B(b, f(b))$  sunt capetele graficului lui  $f$ .

Teorema lui Lagrange are consecințe importante în studiul monotoniei funcțiilor, enunțate în următorul rezultat.

**Corolar 7.13.1.** 1. Dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, este derivabilă pe  $I$ , iar derivata sa este identic nulă pe  $I$ , atunci  $f$  este constantă pe  $I$ .

2. Dacă  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, sunt derivabile pe  $I$ , iar derivatele lor sunt egale pe  $I$ , atunci  $f$  și  $g$  diferă printr-o constantă pe  $I$ .

3. Dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, este derivabilă pe  $I$ , iar derivata sa este pozitivă (respectiv strict pozitivă) pe  $I$ , atunci  $f$  este crescătoare (respectiv strict crescătoare) pe  $I$ . Dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, este derivabilă pe  $I$ , iar derivata sa este negativă (respectiv strict negativă) pe  $I$ , atunci  $f$  este descrescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe  $I$ .

**Demonstrație.** 1. Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă pe  $I$  astfel încât  $f'(x) = 0$  pentru  $x \in I$  și fie  $a, b \in I$ ,  $a < b$ . Conform teoremei lui Lagrange, există  $c \in [a, b]$  astfel încât  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . Dar  $f'(c) = 0$ , deci  $f(a) = f(b)$ . Fixând  $a \in I$  și considerând pe  $b$  variabil, obținem că  $f$  este constantă pe  $I$ .

2. Fie  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  derivabile pe  $I$  astfel încât  $f'(x) = g'(x)$  pentru  $x \in I$ . Considerăm  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Atunci  $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$  pentru  $x \in I$  și, conform primei consecințe, urmează că  $h$  este constantă.

3. Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă pe  $I$  astfel încât  $f'(x) \geq 0$  pentru  $x \in I$  și fie  $a, b \in I$ ,  $a < b$ . Conform teoremei lui Lagrange, există  $c \in [a, b]$  astfel încât  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . Dar  $f'(c) \geq 0$ , deci  $f(b) \geq f(a)$ . Urmează că  $f$  este crescătoare pe  $I$ , analog tratându-se celelalte situații. ■

### Exemplu

Corolarul 1 se poate folosi pentru demonstrarea unor identități. În acest scop, să demonstrăm că

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{pentru } x \in (-1, 1).$$

Fie  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ . Atunci  $f$  este derivabilă pe  $(-1, 1)$ , iar

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \end{aligned}$$

de unde  $f$  este constantă pe  $(-1, 1)$ . Pentru a determina valoarea acestei constante, dăm lui  $x$  o valoare din intervalul  $(-1, 1)$ , de exemplu  $x = 0$ . Cum

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

urmează concluzia.

### Exemplu

Corolarul 3 este instrumental în demonstrarea multor inegalități. În acest sens, să demonstrăm că

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad \text{pentru } x > 0.$$

Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ . Urmează că  $f$  este derivabilă pe  $(0, \infty)$ , iar

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0, \quad \text{pentru } x > 0,$$

deci  $f$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ . Cum  $f$  este și continuă în  $x = 0$ , urmează că  $f(x) > f(0) = 0$  pentru  $x > 0$ , de unde rezultă prima parte a inegalității, cea de-a doua parte demonstrându-se analog.

### Exercițiu

Aplicând teorema lui Lagrange funcției  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  pe un interval  $[a, b]$ ,  $0 < a < b$ , demonstrați că

$$\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}.$$

### Soluție

Cum  $f$  este funcție Rolle pe  $[a, b]$ , urmează conform teoremei lui Lagrange că există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ , deci  $\frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$ , sau  $\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b-a)$ . Cum  $c \in (a, b)$ , iar  $a, b > 0$ , urmează că  $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$ , de unde concluzia. ■

**Existența derivatelor laterale într-un punct**

Cu ajutorul teoremei lui Lagrange se poate determina de asemenea existența derivatei laterale a unei funcții într-un punct, obținută ca limită a unor alte derivate laterale.

**Corolar 7.13.2.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, și fie  $x_0 \in I$  cu proprietatea că există  $\varepsilon > 0$  astfel ca  $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subset I$ ,  $f$  este derivabilă pe  $(x_0 - \varepsilon, x_0)$  și continuă la stânga în  $x_0$ . Dacă există  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f'(x) = \lambda$ , atunci  $f$  are derivată la stânga în  $x_0$ , iar  $f'_s(x_0) = \lambda$ .

**Demonstrație.** Fie  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ . Cum  $f$  este derivabilă pe  $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ , ea este funcție Rolle pe  $[x, x_0]$  și deci i se poate aplica teorema lui Lagrange pe acest interval. Există atunci  $c_x \in (x, x_0)$  astfel ca  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x)$ . Deoarece  $x < c_x < x_0$ , urmează că  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} c_x = x_0$ . De aici,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f'(c_x) = \lambda,$$

de unde deducem că  $f$  are derivată la stânga în  $x_0$ , iar  $f'_s(x_0) = \lambda$ . ■

Un rezultat asemănător se poate formula în ceea ce privește existența derivatei la dreapta într-un punct.

**Corolar 7.13.3.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, și fie  $x_0 \in I$  cu proprietatea că există  $\varepsilon > 0$  astfel ca  $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset I$ ,  $f$  este derivabilă pe  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$  și continuă la dreapta în  $x_0$ . Dacă există  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f'(x) = \lambda$ , atunci  $f$  are derivată la dreapta în  $x_0$ , iar  $f'_d(x_0) = \lambda$ .

Prin combinarea acestor corolarii se obține următorul rezultat.

**Corolar 7.13.4.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, și fie  $x_0 \in I$  cu proprietatea că  $f$  este derivabilă pe  $V \setminus \{x_0\}$ , unde  $V \in \mathcal{V}(x_0)$ , continuă în  $x_0$  și există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \lambda$ . Atunci  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , iar  $f'(x_0) = \lambda$ .

**Exemplu**

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x^3 - a|$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Să determinăm  $a$  astfel încât  $f$  să fie derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .

Se observă că  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x(x^3 - a), & x \geq \sqrt[3]{a} \\ x(a - x^3), & x < \sqrt[3]{a} \end{cases}$ , deci  $f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - a, & x > \sqrt[3]{a} \\ a - 4x^3, & x < \sqrt[3]{a} \end{cases}$ . Atunci  $\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt[3]{a} \\ x < \sqrt[3]{a}}} f'(x) = -3a$ , deci, conform Corolarului 7.13.2,  $f'_s(\sqrt[3]{a}) = -3a$ . Similar, conform Corolarului 7.13.3,  $f'_d(\sqrt[3]{a}) = 3a$ . Ca  $f$  să fie derivabilă în  $\sqrt[3]{a}$ , este necesar și suficient ca valorile acestor derivate laterale să fie egale, deci  $-3a = 3a$ , iar  $a = 0$ . Se observă atunci că  $f(x) = \begin{cases} x^4, & x \geq 0 \\ -x^4, & x < 0 \end{cases}$  fiind derivabilă și pentru orice  $x \neq 0$ .

### Funcții Lipschitz. Contractii

Cu ajutorul teoremei lui Lagrange, se poate demonstra că orice funcție derivabilă cu derivata mărginită este o funcție Lipschitz. Mai precis, are loc următorul rezultat.

**Corolar 7.13.5.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  funcție Rolle pe  $[a, b]$ . Dacă există  $L \geq 0$  astfel încât  $|f'(c)| \leq L$  pentru orice  $c \in (a, b)$ , atunci  $f$  este funcție Lipschitz pe  $[a, b]$ . Dacă, în plus,  $L < 1$ , atunci  $f$  este o contracție pe  $[a, b]$ .

**Demonstrație.** Fie  $x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$ . Conform teoremei lui Lagrange, aplicată pe intervalul  $[x, y] \subset [a, b]$ , pe care  $f$  este de asemenea funcție Rolle, urmează că există  $c \in (x, y)$  astfel ca  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ . Atunci

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq L|x - y|,$$

deci  $f$  este funcție Lipschitz pe  $[a, b]$ . Dacă  $L < 1$ , conform definiției,  $f$  este o contracție pe  $[a, b]$ . ■

În particular, acest corolar poate fi utilizat pentru a stabili convergența unor șiruri recurente.

### Exemplu

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{2x_n^2 + 1}{3x_n}$ ,  $x_0 = 2$ . Să demonstrăm că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent și să-i determinăm limita.

Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x}$ . Mai întâi, se observă că  $x_n > 0$  pentru orice  $n \geq 0$ , iar recurența dată se poate scrie sub forma  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Totuși,

$(0, \infty)$  nu este o mulțime închisă, neputându-se aplica direct teorema de punct fix a lui Banach, deși  $f$  transformă mulțimea  $(0, \infty)$  în ea însăși. Conform inegalității mediilor,

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{3x}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \text{pentru } x > 0.$$

Deoarece

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x} \leq \frac{2}{3}x + \frac{1}{3\frac{2\sqrt{2}}{3}} < \frac{2}{3}x + 1, \quad \text{pentru orice } x \geq \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

se poate observa că  $f(x) \leq 3$  pentru orice  $x \in \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 3\right]$ , deci  $f$  transformă intervalul  $D = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 3\right]$  în el însuși. Deoarece  $f'(x) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)$ , urmează că  $\frac{7}{21} \leq f'(x) \leq \frac{17}{27}$  pentru orice  $x \in D$ , deci  $f$  este o contracție pe acest interval. Cum și  $x_0 \in D$ , urmează conform teoremei de punct fix a lui Banach (teorema 6.14) că șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent la punctul fix  $l$  al lui  $f$  pe  $D$ . Din condiția de punct fix,  $l = \frac{2l^2+1}{3l}$ , deci  $l^2 = 1$ , iar  $l = 1$ , deoarece  $l_1 = -1 \notin D$ . Atunci șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent, iar limita sa este 1.

### 7.3.4 Teorema lui Cauchy

Următorul rezultat, atribuit lui Cauchy, constituie o generalizare a teoremei lui Lagrange.

**Teorema 7.14.** Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  funcții Rolle pe  $[a, b]$ . Dacă  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in (a, b)$ , atunci  $g(b) \neq g(a)$  și există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

**Demonstrație.** Să observăm mai întâi că dacă  $g(b) = g(a)$ , atunci aplicând teorema lui Rolle funcției  $g$  pe  $[a, b]$  se obține că există  $c_1 \in (a, b)$  astfel încât  $g'(c_1) = 0$ , contradicție. Urmează atunci că  $g(b) \neq g(a)$ .

Fie  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) - kg(x)$ , unde  $k \in \mathbb{R}$  este pentru moment arbitrar. Atunci  $h$  este funcție Rolle pe  $[a, b]$ .

Determinăm  $k$  astfel încât  $h(a) = h(b)$ , cu scopul de a putea aplica lui  $h$  teorema lui Rolle. Atunci  $f(b) - kg(b) = f(a) - kg(a)$ , de unde  $k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ . În aceste condiții, există  $c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $h'(c) = 0$ . Dar

$$h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - kg'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

de unde concluzia. ■

### 7.3.5 Regulile lui L'Hôpital

În unele dintre situațiile în care calculul limitelor unor funcții conduce la cazuri de nedeterminare de tipul  $\frac{0}{0}$  sau  $\frac{\infty}{\infty}$ , pot fi utilizate cu succes așa-numitele *reguli ale lui L'Hôpital*.

#### Regula lui L'Hôpital pentru cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$

**Teorema 7.15.** Fie  $x_0$  un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval  $I$  și fie  $f, g$  două funcții definite pe  $I$ , cu excepția eventuală a lui  $x_0$ . Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiții

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .
2.  $f, g$  sunt derivabile pe  $I$ , cu excepția eventuală a lui  $x_0$ .
3.  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in I, x \neq x_0$ .
4. Există limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , finită sau infinită.

Atunci  $g(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in I, x \neq x_0$ , funcția  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Demonstrație.** Presupunem mai întâi că  $x_0$  este finit. Să definim funcțiile  $\bar{f}$  și  $\bar{g}$  pe  $I \cup \{x_0\}$  astfel

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}, \quad \bar{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

și să observăm că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \bar{f}(x) = \bar{f}(x_0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \bar{g}(x) = \bar{g}(x_0) = 0,$$

deci  $\bar{f}, \bar{g}$  sunt continue în  $x_0$ . Mai mult,  $\bar{f}, \bar{g}$  sunt derivabile pentru orice  $x \neq x_0$ , iar

$$\bar{f}'(x) = f'(x), \quad \bar{g}'(x) = g'(x), \quad \text{pentru orice } x \neq x_0.$$

Fie acum  $(x_n)_{n \geq 1}$  un șir arbitrar,  $x_n \in I$  pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel ca  $x_n \rightarrow x_0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ . Aplicând teorema lui Cauchy funcțiilor  $\bar{f}$  și  $\bar{g}$  pe intervalul  $[x_n, x_0]$  (sau  $[x_0, x_n]$ ), obținem că există  $c_n$  între  $x_n$  și  $x_0$  astfel ca

$$\frac{\bar{f}(x_n) - \bar{f}(x_0)}{\bar{g}(x_n) - \bar{g}(x_0)} = \frac{\bar{f}'(c_n)}{\bar{g}'(c_n)}$$

Deoarece  $\bar{f}(x_0) = \bar{g}(x_0) = 0$ ,  $\bar{f}(x_n) = f(x_n)$ ,  $\bar{g}(x_n) = g(x_n)$ ,  $\bar{f}'(c_n) = f'(c_n)$ ,  $\bar{g}'(c_n) = g'(c_n)$ , urmează că

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Cum  $c_n$  este între  $x_n$  și  $x_0$ , iar  $x_n \rightarrow x_0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , urmează că  $c_n \rightarrow x_0$  pentru  $n \rightarrow \infty$  și trecând la limită în relația de mai sus obținem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Deoarece  $(x_n)_{n \geq 1}$  era șir arbitrar cu limita  $x_0$ , urmează concluzia.

Să presupunem acum că  $x_0$  este infinit. Fie  $x_0 = \infty$ , pentru fixarea ideilor, și să considerăm că  $I = (a, \infty)$ , pentru un  $a > 0$ . Vom demonstra că funcțiile

$$F : \left(0, \frac{1}{a}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad G : \left(0, \frac{1}{a}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(y) = f\left(\frac{1}{y}\right), \quad G(y) = g\left(\frac{1}{y}\right)$$

verifică ipotezele teoremei pentru  $y_0 = 0$ , situație în care putem aplica rezultatul demonstrat anterior privitor la puncte finite. Mai întâi, să observăm că  $F = f \circ u$ ,  $G = g \circ u$ , unde  $u : \left(0, \frac{1}{a}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(y) = \frac{1}{y}$ .

1) Fie  $(y_n)_{n \geq 0}$ ,  $(y_n)_{n \geq 0} \subset \left(0, \frac{1}{a}\right)$ , astfel încât  $y_n \rightarrow 0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ . Atunci, ținând seama de faptul că  $\frac{1}{y_n} \rightarrow \infty$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\frac{1}{y_n}\right) = 0,$$

iar cum  $(y_n)_{n \geq 0}$  este ales arbitrar, urmează că

$$\lim_{y \rightarrow 0} F(y) = \lim_{y \rightarrow 0} G(y) = 0.$$

2) Funcțiile  $F$  și  $G$  sunt derivabile pe  $(0, \frac{1}{a})$ , conform teoremei de derivare a funcției compuse, iar

$$F'(y) = f'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$G'(y) = g'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

3)  $G'(y) = g'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) \neq 0$  pentru  $y \in (0, \frac{1}{a})$ , deoarece  $g' \neq 0$ , iar  $\frac{1}{y^2} \neq 0$  pentru  $y \in (0, \frac{1}{a})$ .

4) Fie  $(y_n)_{n \geq 0}$ ,  $(y_n)_{n \geq 0} \subset (0, \frac{1}{a})$ , astfel încât  $y_n \rightarrow 0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ . Atunci

$$\frac{F'(y_n)}{G'(y_n)} = \frac{f'\left(\frac{1}{y_n}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y_n^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y_n}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y_n^2}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{y_n}\right)}{g'\left(\frac{1}{y_n}\right)},$$

deci, ținând seama de faptul că  $\frac{1}{y_n} \rightarrow \infty$  pentru  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F'(y_n)}{G'(y_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{y_n}\right)}{g'\left(\frac{1}{y_n}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Deoarece  $(y_n)_{n \geq 0}$  este ales arbitrar, urmează că

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (7.3)$$

Atunci, conform celor demonstrate anterior,  $G(y) \neq 0$  pentru  $y \in (0, \frac{1}{a})$ , iar

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(y)}{G(y)}.$$

Conform (7.3), are loc și egalitatea

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Cum  $G(y) \neq 0$  pentru  $y \in (0, \frac{1}{a})$ , urmează că  $g(x) \neq 0$  pentru  $x \in (a, \infty)$ . Rămâne deci să demonstrăm că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$



Fie atunci  $(x_n)_{n \geq 0} \subset (0, \frac{1}{a})$  astfel ca  $x_n \rightarrow \infty$  pentru  $n \rightarrow \infty$ . Urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F\left(\frac{1}{x_n}\right)}{G\left(\frac{1}{x_n}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Deoarece  $(x_n)_{n \geq 0}$  este ales arbitrar, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

### Exemplu

Să determinăm valoarea limitei  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ . În acest scop, să observăm că funcțiile

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \operatorname{arctg} x, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3,$$

sunt în așa fel încât  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \operatorname{arctg} x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ ,  $f, g$  sunt derivabile pe  $\mathbb{R}$  iar  $g'(x) = 3x^2 \neq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^*$ . În plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{arctg} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3},$$

de unde obținem că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \frac{1}{3}$ .

Uneori, este necesar să se aplice de mai multe ori succesiv regula lui L'Hôpital, întrucât noua limită  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  este tot de tip  $\frac{0}{0}$ .

### Exemplu

Să determinăm valoarea limitei  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ . În acest scop, să observăm că funcțiile

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - e^{-x} - 2x, \quad g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - \sin x,$$

sunt în așa fel încât  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0$ ,  $f, g$  sunt derivabile pe  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  iar  $g'(x) = 1 - \cos x \neq 0$  pentru orice  $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ . În plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Funcțiile

$$f_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = e^x + e^{-x} - 2, \quad g_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, g_1(x) = 1 - \cos x$$

sunt în așa fel încât  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$ ,  $f_1, g_1$  sunt derivabile pe  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  iar  $g_1'(x) = \sin x \neq 0$  pentru orice  $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ . În plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2x}{\frac{\sin x}{x} \cdot x} = 2.$$

Urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = 2.$$

**Regula lui L'Hôpital pentru cazul de nedeterminare  $\frac{\infty}{\infty}$**

**Teorema 7.16.** Fie  $x_0$  un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval  $I$  și fie  $f, g$  două funcții definite pe  $I$ , cu excepția eventuală a lui  $x_0$ . Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiții

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$ .
2.  $f, g$  sunt derivabile pe  $I$ , cu excepția eventuală a lui  $x_0$ .
3.  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in I, x \neq x_0$ .
4. Există limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , finită sau infinită.

Atunci funcția  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Demonstrație.** Considerăm mai întâi cazul în care  $x_0$  nu este extremitatea stângă a intervalului  $I$ . Fie  $(x_n)_{n \geq 1} \subset I$  strict crescător cu limita  $x_0$ . Deoarece  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in I \cap (-\infty, x_0)$ ,  $x \neq x_0$ , urmează că  $g'$  păstrează semn constant pe  $I \cap (-\infty, x_0)$ , având proprietatea lui Darboux pe acest interval. Să presupunem că  $g'(x) > 0$  pentru  $x \in I \cap (-\infty, x_0)$ . Atunci  $g$  este strict crescătoare pe

$I \cap (-\infty, x_0)$ , iar cum  $(x_n)_{n \geq 1}$  strict crescător,  $(g(x_n))_{n \geq 1}$  este de asemenea strict crescător. Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$ , urmează că  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = +\infty$ .

Aplicând teorema lui Cauchy funcțiilor  $f$  și  $g$  pe intervalul  $[x_n, x_{n+1}]$ , obținem că există  $c_n \in (x_n, x_{n+1})$  astfel ca

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)},$$

iar deoarece  $c_n \in (x_n, x_{n+1})$  și  $x_n \rightarrow x_0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , urmează că  $c_n \rightarrow x_0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ . În concluzie, există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)}$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Cum  $(g(x_n))_{n \geq 1}$  este strict crescător și  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = +\infty$ , urmează conform teoremei Stolz-Césaro că există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Cum  $(x_n)_{n \geq 1}$  era arbitrar cu proprietățile date, urmează că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dacă  $x_0$  nu este extremitatea stângă a lui  $I$ , atunci cu un raționament asemănător se obține că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dacă  $x_0$  este un punct interior al intervalului  $I$ , atunci din egalitatea limitelor laterale se obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

În timp ce dacă  $x_0$  este una din extremități, atunci limita în  $x_0$  este egală cu cea limită laterală care are sens, de unde concluzia. ■

### Exemplu

Să calculăm limita  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))}$ ,  $a, b \in (0, \infty)$ . În acest scop, să observăm că funcțiile

$$f : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(\sin(ax)), \quad g : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln(\sin(bx))$$

sunt în așa fel încât  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(\sin(bx)) = -\infty$ ,  $f, g$  sunt derivabile pe  $(0, \varepsilon)$  iar  $g'(x) =$

$\frac{b \cos bx}{\sin bx} \neq 0$  pentru orice  $x \in (0, \varepsilon)$ . În plus,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln(\sin(ax)))'}{(\ln(\sin(bx)))'} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{a \cos ax}{\sin ax}}{\frac{b \cos bx}{\sin bx}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \frac{\sin bx}{\sin ax} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{\sin bx}{bx} \cdot bx}{\frac{\sin ax}{ax} \cdot ax} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1. \end{aligned}$$

Urmează că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))} = 1.$$

### Alte cazuri de nedeterminare

Regulile lui L'Hôpital sunt destinate în mod explicit calculului limitelor unor rapoarte de funcții ce conduc la cazurile de nedeterminare  $\frac{0}{0}$  și  $\frac{\infty}{\infty}$ . Totuși, după rearanjarea unor termeni sau executarea unor operații de logaritmare, și alte cazuri de nedeterminare pot fi tratate prin intermediul acestor reguli.

### Cazul $0 \cdot \infty$

În situația în care calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$  conduce la cazul de nedeterminare  $0 \cdot \infty$  (adică  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$ ), atunci se încearcă scrierea produsului ca un raport. Folosind formula  $\mathbf{fg} = \frac{\mathbf{f}}{\frac{1}{\mathbf{g}}}$  se obține cazul de nedeterminare  $\frac{0}{0}$ , iar folosind formula  $\mathbf{fg} = \frac{\mathbf{g}}{\frac{1}{\mathbf{f}}}$  se obține cazul de nedeterminare  $\frac{\infty}{\infty}$ .

### Exercițiu

Determinați  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 \ln x$ .

### Soluție

Deoarece  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 = 0$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ , limita se încadrează în cazul de nedeterminare  $0 \cdot \infty$ . Atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^3}{-3} = 0.$$



**Cazul  $\infty - \infty$** 

În situația în care calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$  conduce la cazul de nedeterminare  $\infty - \infty$  (adică  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  sau  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ ), atunci se încearcă obținerea unui factor comun. Folosind formulele  $f - g = f \left( \frac{g}{f} - 1 \right)$  sau  $f - g = g \left( \frac{f}{g} - 1 \right)$ , limita dată se transformă într-un produs, iar folosind formula  $f - g = \frac{f-g}{\frac{1}{fg}} = \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}{\frac{1}{fg}}$  se obține cazul de nedeterminare  $\frac{0}{0}$ .

**Exercițiu**

Determinați  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x)$ .

**Soluție**

Se va da factor comun  $e^x$ , deoarece acesta crește mai rapid decât  $x$  pentru  $x \rightarrow \infty$ . Se obține că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left( 1 - \frac{x}{e^x} \right)$$

De asemenea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

de unde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) = \infty(1 - 0) = \infty. \quad \blacksquare$$

**Exercițiu**

Determinați  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$ .

**Soluție**

Mai întâi, se observă că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x \cdot x^2},$$

limita inițială fiind transformată într-o limită în cazul de nedeterminare  $\frac{0}{0}$ . Totuși, în locul aplicării directe a regulii lui L'Hôpital, se recomandă simplificarea

preliminară prin aplicarea limitelor fundamentale. Se obține că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x \cdot x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \operatorname{tg} x)(x - \operatorname{tg} x)}{x \cdot x \operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2} x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} \\ &\stackrel{[0]}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 \cos^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} \\ &\stackrel{[0]}{=} \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \cos x}{2x} = -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

■

### Cazurile $1^\infty, 0^0, \infty^0$

În situația în care calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)})$  conduce la unul dintre aceste cazuri de nedeterminare, iar  $f(x) > 0$  pe o vecinătate a lui  $x_0$ , se folosește formula  $f^g = e^{\ln(f^g)} = e^{g \ln f}$ . Pentru cazul de nedeterminare  $1^\infty$ , se poate ține seama și de faptul că  $\lim_{f \rightarrow 1} \frac{\ln f}{f - 1} = 1$ .

#### Exercițiu

Determinați  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .

#### Soluție

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos 2x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ , limita dată este în cazul de nedeterminare  $1^\infty$ . Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \frac{\cos x}{\cos 2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x - \ln \cos 2x}{x^2}} \stackrel{[0]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x}{2x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( -\frac{\operatorname{tg} x}{x} + 2 \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \cdot 2 \right)} = e^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

■

#### Exercițiu

Determinați  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$ .

#### Soluție

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = \infty$ , limita dată este în cazul de nedeterminare  $1^\infty$ . Atunci

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x + e^x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^x)}{x + e^x - 1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^x - 1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{e^x - 1}{x}\right)} = e^2.$$

■

### Exercițiu

Determinați  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right)^{\sin^2 x}$ .

### Soluție

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right) = \infty$ , iar  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0$ , limita dată este în cazul de nedeterminare  $\infty^0$ . Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right)^{\sin^2 x} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x \ln \left( \frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x^2 (\ln(2 - \cos x) - \ln(1 - \cos x))} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln(2 - \cos x)) - \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln(1 - \cos x))} \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln(1 - \cos x))} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\frac{1}{x^2}}} \\ &\stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{1 - \cos x}}{\frac{-2}{x^3}}} = e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{1 - \cos x} \stackrel{[0]}{=} e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \sin x + x^3 \cos x}{\sin x}} \\ &= e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( 3x^2 + \frac{x}{\sin x} \cdot x^2 \cos x \right)} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

■

### Exercițiu

Determinați  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)^{x - \frac{\pi}{2}}$ .

### Soluție

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = 0$ , limita dată este în cazul de nedeterminare  $0^0$ . Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)^{x - \frac{\pi}{2}} &= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \ln(1 - \sin x)} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} u \ln(1 - \sin(u + \frac{\pi}{2}))} \\ &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} u \ln(1 - \cos u)} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos u)}{\frac{1}{u}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin u}{1 - \cos u}}{-\frac{1}{u^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 \sin u}{1 - \cos u} \stackrel{[0]}{=} } e^{-\lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u \sin u + u^2 \cos u}{\sin u}} \\
&= e^{-\lim_{u \rightarrow 0} \left(2u + \frac{u}{\sin u} \cdot u \cos u\right)} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

■

### 7.3.6 Formula lui Taylor

Conform definiției diferențiabilității, a fost observat anterior că dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă în  $x_0 \in I$ , atunci există  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$ , astfel ca

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

iar în concluzie

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x \approx x_0.$$

#### Polinomul lui Taylor de ordinul $n$

În cele ce urmează, dorim să extindem această formulă de aproximare la una cu acuratețe superioară. Să presupunem că  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă de ordinul  $n$  în  $x_0 \in I$ ,  $n \geq 1$ . Atunci derivatele de ordin până la  $n - 1$  inclusiv există pe o vecinătate a lui  $x_0$ ; pentru simplitatea expunerii, să presupunem că acestea există pe întreg  $I$ . Funcția polinomială  $T_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numește *polinomul lui Taylor de grad  $n$*  atașat funcției  $f$  în punctul  $x_0$ .

#### Restul formulei lui Taylor de ordinul $n$

Fie acum  $R_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in I.$$

Atunci

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$



relație numită *formula lui Taylor de ordinul  $n$*  corespunzătoare funcției  $f$  în punctul  $x_0$ . Funcția  $R_n$  astfel definită poartă numele de *restul formulei lui Taylor de ordinul  $n$*  și măsoară eroarea cu care polinomul  $T_n$  aproximează funcția  $f$ .

În ceea ce urmează, vom încerca să obținem forme ale restului  $R_n$  care să prezinte mai multe informații despre precizia aproximării. Să observăm mai întâi că, în definiția diferențiabilității într-un punct  $x_0$ ,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

funcția polinomială de gradul 1

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

reprezintă de fapt polinomul Taylor  $T_1$ . Cum  $R_1 = \alpha(x)(x - x_0)$ , urmează că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Vom demonstra o proprietate similară pentru restul de ordin  $n$ . În acest scop, să calculăm mai întâi derivatele polinomului Taylor  $T_n$ . Se obține că

$$\begin{aligned} T_n'(x) &= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \\ T_n''(x) &= f''(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} T_n^{(n-1)}(x) &= f^{(n-1)}(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x - x_0), & T_n^{(n)}(x) &= f^{(n)}(x_0) \\ T_n^{(m)}(x) &= 0, & \text{pentru } m &> n. \end{aligned}$$

Putem obține de aici următoarele evaluări ale restului de ordin  $n$  și ale derivatelor sale în  $x_0$

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Să notăm  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x - x_0)^n$ . Analog relațiilor de mai sus, se observă că

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0; \quad g^{(n)}(x_0) = n!.$$

Fie  $x \in I$  arbitrar. Aplicând teorema lui Cauchy funcțiilor  $R_n$  și  $g$  pe intervalul  $[x_0, x]$  (sau  $[x, x_0]$ ), obținem că există  $c_1$  între  $x_0$  și  $x$  astfel ca  $\frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R'_n(c_1)}{g'(c_1)}$ , iar cum  $R_n(x_0) = g(x_0) = 0$ , urmează că

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R'_n(c_1)}{g'(c_1)}.$$

Aplicând încă o dată teorema lui Cauchy funcțiilor  $R'_n$  și  $g'$  pe intervalul  $[x_0, c_1]$  (sau  $[c_1, x_0]$ ), obținem că în mod similar că există  $c_2$  între  $x_0$  și  $c_1$ ) astfel ca

$$\frac{R'_n(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R''_n(c_2)}{g''(c_2)},$$

deci

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R''_n(c_2)}{g''(c_2)}.$$

Aplicând în mod iterativ teorema lui Cauchy, obținem că există  $c_{n-1}$  între  $x_0$  și  $x$  astfel încât

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n-1)}(c_{n-1})}{g^{(n-1)}(c_{n-1})}.$$

Fie acum  $(\bar{x}_k)_{k \geq 0}$  un șir convergent la  $x_0$ ,  $\bar{x}_k \neq x_0$ . Conform celor de mai sus, există  $c_{k,n-1}$  între  $x_0$  și  $\bar{x}_k$  astfel încât

$$\frac{R_n(\bar{x}_k)}{g(\bar{x}_k)} = \frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1})}{g^{(n-1)}(c_{k,n-1})} = \frac{\frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0}}{\frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0}}.$$

Prin trecere la limită, obținem că

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_n(\bar{x}_k)}{g(\bar{x}_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0}}{\frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0}}$$

Cum  $c_{k,n-1}$  se află între  $x_0$  și  $\bar{x}_k$ , urmează că  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{k,n-1} = x_0$ , de unde

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0} &= R_n^{(n)}(x_0) = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0} &= g^{(n)}(x_0) = n!, \end{aligned}$$

iar

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_n(\bar{x}_k)}{g(\bar{x}_k)} = 0.$$

Deoarece  $(\bar{x}_k)_{k \geq 0}$  era un șir arbitrar convergent la  $x_0$ , urmează conform definiției limitei că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Considerațiile de mai sus conduc la următorul rezultat.

**Teorema 7.17.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval. Dacă  $f$  este derivabilă de  $n$  ori în  $x_0 \in I$ , atunci există o funcție  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$  și

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n.$$

**Demonstrație.** Să considerăm atunci funcția  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} n! \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

și să observăm că  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$ , conform celor de mai sus. În plus,  $R_n(x) = \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n$ , pentru orice  $x \in I$  (chiar și pentru  $x = x_0$ , deoarece ambii membri sunt 0), de unde concluzia. ■

Restul de ordin  $n$  din formula de mai sus,

$$R_n(x) = \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numește *restul lui Peano*.

În teorema precedentă s-a presupus că  $f$  este derivabilă de  $n$  ori în punctul  $x_0$ , obținându-se cu acest prilej o estimare a restului formulei lui Taylor. Vom presupune în cele ce urmează că  $f$  este derivabilă de  $n + 1$  ori pe întreg intervalul  $I$ , lucru care ne va ajuta să obținem exprimări mai precise ale restului.

Fie  $x_0, x \in I$ . Fie deasemenea  $p \in \mathbb{N}^*$  și fie  $C \in \mathbb{R}$  definit prin

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + C(x - x_0)^p.$$

Definim  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  prin

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + C(x-t)^p.$$

Atunci

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) = f(x),$$

și aplicând teorema lui Rolle funcției  $\varphi$  pe intervalul  $[x_0, x]$  (sau  $[x, x_0]$ ) obținem existența lui  $c$  situat între  $x_0$  și  $x$  (dependent de  $x_0, x, n$  și  $p$ ) astfel încât  $\varphi'(c) = 0$ .  
Însă

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + \left( \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{1!} \right) + \left( \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) \right) + \dots \\ &\quad + \left( \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right) - pC(x-t)^{p-1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - pC(x-t)^{p-1} \end{aligned}$$

și atunci

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n - pC(x-c)^{p-1} = 0,$$

de unde

$$C = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n-p+1}$$

Se obține atunci că restul  $R_n$  al formulei Taylor de ordinul  $n$  are forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-x_0)^p(x-c)^{n-p+1}.$$

Pus sub această formă generală, restul  $R_n$  al formulei Taylor de ordinul  $n$  se numește *restul lui Schlömilch-Roche*. Prin particularizarea lui  $p$  în expresia de mai sus obținem alte forme importante ale restului de ordin  $n$ . Astfel, pentru  $p = 1$  obținem *restul lui Cauchy*, sub forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)(x-c)^n,$$

în vreme ce pentru  $p = n + 1$  obținem *restul lui Lagrange*, sub forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Deoarece  $c$  se află între  $x_0$  și  $x$ , există  $\theta \in (0, 1)$  (dependent de  $x_0$ ,  $x$  și  $n$ ) astfel încât

$$c = x_0 + \theta(x - x_0),$$

iar cu notația  $h = x - x_0$ , formula lui Taylor se poate scrie astfel

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n,$$

unde  $R_n$  se poate pune sub una dintre următoarele forme

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{n!p} h^{n+1} (1 - \theta)^{n-p+1} && \text{(Schl\"{o}milch-Roche)} \\ R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{n!} h^{n+1} (1 - \theta)^n && \text{(Cauchy)} \\ R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} && \text{(Lagrange)}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

### Formula lui MacLaurin

Dacă în formula lui Taylor punem  $x_0 = 0$ , obținem *formula lui MacLaurin*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n,$$

$R_n$  obținându-se din formulele (7.4) pentru  $x_0 = 0$ . De asemenea, pentru  $n = 0$ , formula lui Taylor cu restul lui Lagrange reprezintă chiar teorema lui Lagrange.

**Exemple** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ . Cum

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că  $f^{(n)}(0) = 1$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , iar

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

2. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ . Cum

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că  $f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$ , deci  $f^{(2k)} = 0$ , iar  $f^{(2k+1)} = (-1)^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . De aici,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

3. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$ . Cum

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că  $f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2}$ , deci  $f^{(2k+1)} = 0$ , iar  $f^{(2k)} = (-1)^{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . De aici,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \cos\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \theta \in (0, 1).$$

4. Fie  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(1+x)$ . Cum

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

avem că  $f^{(n)}(0) = (-1)^{(n-1)} (n-1)!$ . De aici,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^n x^{(n+1)}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^n}, \quad \theta \in (0, 1).$$

5.  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (1+x)^p$ . Cum

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)\dots(p-n+1)(1+x)^{p-n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că  $f^{(n)}(0) = p(p-1)\dots(p-n+1)$ . De aici,

$$(1+x)^p = 1 + \frac{px}{1!} + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)x^n}{n!} + R_n$$

unde

$$R_n = \frac{p(p-1)\dots(p-n)(1+\theta x)^{p-n-1}}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0,1).$$

### 7.3.7 Puncte de extrem ale unei funcții. Condiții necesare și suficiente

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval. S-a observat anterior că punctele de extrem care sunt interioare lui  $I$  și în care  $f$  este derivabilă se găsesc printre punctele critice ale funcției  $f$ , dar nu orice punct critic al unei funcții este neapărat punct de extrem. De exemplu, fie  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = x^3$ . Atunci  $f_1'(x) = 3x^2$ , deci  $x = 0$  este punct critic al lui  $f_1$ . Totuși, acesta nu este punct de extrem, deoarece  $f_1(0) = 0$ , iar în orice vecinătate a lui 0 funcția  $f$  ia atât valori negative cât și valori pozitive. În cele ce urmează, vom obține condiții de extrem cu ajutorul derivatelor de ordin superior.

**Teorema 7.18.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in I$  astfel încât

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1. Dacă  $n = 2k$ , atunci  $x_0$  este punct de extrem local.

(a) Dacă  $n = 2k$ , iar  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , atunci  $x_0$  este punct de minim local.

(b) Dacă  $n = 2k$ , iar  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , atunci  $x_0$  este punct de maxim local.

2. Dacă  $n = 2k + 1$ , iar  $x_0$  este punct interior lui  $I$ , atunci  $x_0$  nu este punct de extrem local.

**Demonstrație.** Conform formulei lui Taylor cu restul lui Peano, în care primele  $n - 1$  derivate în  $x_0$  se anulează conform ipotezei, obținem că

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n,$$

cu  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$ . Atunci

$$f(x) - f(x_0) = \left( f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) \right) \frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

cu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) \right) = f^{(n)}(x_0).$$

Dacă  $n = 2k$ , iar  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , există  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca

$$f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) > 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar deoarece  $(x - x_0)^{2k} \geq 0$  pentru orice  $x \in V$ , urmează că

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

deci

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar  $x_0$  este punct de minim local.

Similar, dacă  $n = 2k$ , iar  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , există  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar  $x_0$  este punct de maxim local.

Fie acum  $n = 2k + 1$  și fie  $x$  interior lui  $I$ . Dacă  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , există  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  o vecinătate a lui  $x_0$  astfel ca

$$f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) > 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar deoarece  $(x - x_0)^{2k+1} < 0$  pentru orice  $x \in V, x < x_0$ , respectiv  $(x - x_0)^{2k+1} > 0$  pentru orice  $x \in V, x > x_0$ , urmează că

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x < x_0$$

deci

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x < x_0,$$

iar

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x > x_0,$$

deci

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x > x_0,$$

iar  $x_0$  nu este punct de extrem local. Cazul în care  $f^{(n)}(x_0) < 0$  se tratează analog. ■



Pentru  $n = 2$ , se obține următorul corolar foarte util în studiul variației funcțiilor.

**Corolar 7.18.1.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă de două ori în  $x_0 \in I$  astfel încât  $f'(x_0) = 0$  și  $f''(x_0) \neq 0$ .

1. Dacă  $f''(x_0) > 0$ , atunci  $x_0$  este punct de minim local.
2. Dacă  $f''(x_0) < 0$ , atunci  $x_0$  este punct de maxim local.

### Exercițiu

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x$ . Determinați punctele de extrem ale lui  $f$ .

### Soluție

Cum  $f$  este derivabilă pe întreg  $\mathbb{R}$ , iar toate punctele domeniului sunt puncte interioare acestuia, urmează conform teoremei lui Fermat că punctele de extrem sunt printre punctele critice. Deoarece  $f'(x) = 3x^2 - 3$ ,  $f'$  se anulează pentru  $x_1 = -1$  și  $x_2 = 1$ . Cum  $f''(x) = 6x$ , urmează că  $f''(-1) = -6 < 0$ , iar  $f''(1) = 6 > 0$ , deci  $-1$  este un punct de maxim local, iar  $1$  este un punct de minim local.



## 7.4 Aspecte grafice în studiul variației funcțiilor

### 7.4.1 Asimptote

În situația în care este necesar să se studieze aspectul graficului unei funcții sau viteza ei de creștere, devine adesea important să se determine dacă acest grafic are o formă apropiată de cea a unei linii drepte, respectiv dacă funcția are o creștere de un anumit tip precizat, de exemplu echivalentă cu cea a unei funcții de gradul întâi. Dreapta de care se „apropie” graficul funcției se va numi *asimptotă*, iar în funcție de poziția acesteia se vor obține, respectiv, noțiunile de asimptotă orizontală, verticală sau oblică.

#### Asimptote orizontale

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $+\infty$  (respectiv  $-\infty$ ) fiind punct de acumulare al mulțimii  $D$ . Vom spune că dreapta  $y = l$ ,  $l \in \mathbb{R}$ , este *asimptotă orizontală* la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$  (respectiv spre  $-\infty$ ) la graficul funcției  $f$  dacă  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  (respectiv  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ).

Altfel spus, graficul unei funcții  $f$  are asimptotă orizontală spre  $+\infty$  (respectiv spre  $-\infty$ ) dacă  $f$  are o limită finită  $l$  la  $+\infty$  (respectiv la  $-\infty$ ). În această situație, graficul funcției se apropie foarte mult de dreapta orizontală  $y = l$  spre  $+\infty$  (respectiv spre  $-\infty$ ), această dreaptă fiind asimptotă orizontală la graficul funcției spre  $+\infty$  (respectiv spre  $-\infty$ ).

Desigur, dacă o funcție nu are limită la  $+\infty$ , atunci graficul acesteia nu are asimptotă orizontală către  $+\infty$ . Mai departe, dacă  $+\infty$  nu este punct de acumulare pentru domeniul funcției (de exemplu, dacă acesta este un interval de tip  $(-\infty, a)$ , cu  $a \in \mathbb{R}$ ), atunci de asemenea nu putem vorbi despre asimptotă orizontală la graficul acesteia către  $+\infty$ , afirmații similare putându-se face și despre asimptotele orizontale către  $-\infty$ .

**Exemple** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 3x + 2}$ . Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2},$$

deci dreapta  $y = \frac{1}{2}$  este asimptotă orizontală la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ . Printr-un calcul similar, se obține că această dreaptă este asimptotă orizontală la graficul funcției  $f$  și spre  $-\infty$ .

2. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . Deoarece

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1, \end{aligned}$$

urmează că dreapta  $y = -1$  este asimptotă orizontală la graficul funcției  $f$  spre  $-\infty$ . Printr-un calcul similar, se obține că dreapta  $y = 1$  este asimptotă orizontală la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ , cele două asimptote orizontale, către  $-\infty$  respectiv către  $+\infty$ , fiind diferite între ele.

3. Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  nu există, graficul funcției  $f$  nu are asimptotă orizontală către  $+\infty$ . Nu putem vorbi despre asimptotă orizontală către  $-\infty$ , deoarece  $-\infty$  nu este punct de acumulare pentru domeniul funcției.

**Asimptote oblice**

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $+\infty$  fiind punct de acumulare al mulțimii  $D$ . Vom spune că dreapta  $y = mx + n$ ,  $m \in \mathbb{R}^*$ ,  $n \in \mathbb{R}$ , este *asimptotă oblică* la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$  dacă

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \text{iar} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = n.$$

Similar, fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $-\infty$  fiind punct de acumulare al mulțimii  $D$ . Vom spune că dreapta  $y = mx + n$ ,  $m \in \mathbb{R}^*$ ,  $n \in \mathbb{R}$ , este *asimptotă oblică* la graficul funcției  $f$  spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$  dacă

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \text{iar} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = n.$$

În aceste situații, graficul funcției se apropie foarte mult de dreapta oblică  $y = mx + n$  spre  $+\infty$ , respectiv spre  $-\infty$ .

Să notăm că, deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ , o condiție necesară (dar nu și suficientă) ca graficul unei funcții să aibă asimptotă oblică spre  $+\infty$  este ca acea funcție să aibă limită infinită la  $+\infty$ . În concluzie, existența unei asimptote oblice spre  $+\infty$  exclude existența unei asimptote orizontale spre  $+\infty$  și reciproc, un raționament similar putând fi efectuat relativ la existența asimptotelor orizontale sau oblice spre  $-\infty$ .

**Exemple** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x^2+x+1}$ . Atunci

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - 1}{x(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^3(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = 1,$$

iar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + x - 1}{x^2 + x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = -1.$$

De aici, dreapta  $y = x - 1$  este asimptotă oblică la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ . Printr-un calcul similar, se obține că această dreaptă este asimptotă oblică la graficul funcției  $f$  și spre  $-\infty$ .

2. Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ . Atunci

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1,$$

iar

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \infty \cdot 1 = +\infty.\end{aligned}$$

Cum  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = +\infty$ , urmează că graficul lui  $f$  nu are asimptote oblice spre  $+\infty$ . Nu putem vorbi despre asimptote oblice spre  $-\infty$  deoarece  $-\infty$  nu este punct de acumulare pentru domeniul funcției.

### Asimptote verticale

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  fiind punct de acumulare la stânga al mulțimii  $D$ . Vom spune că dreapta  $x = a$  este *asimptotă verticală* la stânga spre  $+\infty$  (respectiv spre  $-\infty$ ) la graficul funcției  $f$  dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty, \quad (\text{respectiv } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty).$$

Similar, fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  fiind punct de acumulare la dreapta al mulțimii  $D$ . Vom spune că dreapta dreapta  $x = a$  este *asimptotă verticală* la dreapta spre  $+\infty$  (respectiv spre  $-\infty$ ) la graficul funcției  $f$  dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty, \quad (\text{respectiv } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty).$$

În aceste situații, graficul funcției  $f$  se apropie foarte mult de dreapta verticală  $x = a$ , în circumstanțele precizate. Să notăm că existența asimptotelor verticale nu exclude nici existența asimptotelor orizontale, nici a celor oblice, deoarece acestea din urmă sunt determinate cu ajutorul unor limite pentru  $x \rightarrow +\infty$  sau  $x \rightarrow -\infty$ , nu pentru  $x$  tinzând la valori finite, așa cum este cazul asimptotelor verticale. De asemenea, întrucât existența asimptotelor verticale presupune existența unor limite infinite, graficele funcțiilor mărginite pe domeniile de definiție nu au asimptote verticale, iar asimptotele verticale ale funcțiilor nemărginite se caută în punctele "patologice" ale domeniului de definiție sau funcției, de exemplu zerouri ale unor numitori sau argumente de funcții logaritmice.

**Exemple** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ . Atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x+1}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x+1}{x-1} = \infty,$$

iar dreapta  $x = 1$  este asimptotă verticală la stânga la graficul funcției  $f$  spre  $-\infty$ , respectiv la dreapta spre  $+\infty$ .

2. Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ . Atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty,$$

iar dreapta  $x = 0$  este asimptotă verticală la dreapta la graficul funcției  $f$  spre  $-\infty$ . Să notăm că  $0$  nu este punct de acumulare la stânga pentru domeniul lui  $f$  (de fapt,  $f$  nici măcar nu este definită pentru  $x < 0$ ), dreapta  $x = 0$  nefiind și asimptotă verticală la stânga la graficul funcției  $f$ .

### Exercițiu

Determinați asimptotele funcției  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$ .

### Soluție

Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = -\infty \cdot 1 = -\infty,$$

graficul funcției nu are asimptote orizontale.

Studiem acum existența asimptotelor oblice, începând cu cea spre  $+\infty$ . Se observă că

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

deci dreapta  $y = x$  este asimptotă oblică la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ . Un calcul similar arată că această dreaptă este asimptotă oblică la graficul funcției  $f$  și spre  $-\infty$ .

În ceea ce privește existența asimptotelor verticale, observăm că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0^-} e^{-1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0^+} e^{-1} = +\infty,$$

deci dreapta  $x = -1$  este asimptotă verticală la stânga la graficul funcției  $f$  spre  $-\infty$ , respectiv asimptotă verticală la dreapta la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ . Similar,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{0}{1} \cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0 \cdot 0 = 0,$$

în vreme ce

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x+1} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{1} = \infty,$$

deci dreapta  $x = 0$  este asimptotă verticală la dreapta (nu însă și la stânga) la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ . ■

## 7.4.2 Convexitate. Concavitate

Adesea, informațiile oferite de prima derivată a unei funcții nu sunt suficiente pentru descrierea precisă a modului de variație a acelei funcții. În special, aceste informații pot fi insuficiente pentru determinarea formei graficului funcției. În cele ce urmează, vom studia rolul derivatei a doua a unei funcții în precizarea formei graficului acelei funcții.

**Funcții convexe și strict convexe**

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval. Vom spune că  $f$  este *convexă* pe  $I$  dacă oricare ar fi  $x, y \in I$  și oricare ar fi  $t \in [0, 1]$  are loc inegalitatea

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

De asemenea, vom spune că  $f$  este *strict convexă* pe  $I$  dacă oricare ar fi  $x, y \in I$  și oricare ar fi  $t \in (0, 1)$  are loc inegalitatea

$$f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y).$$

**Interpretarea geometrică a convexității**

Deoarece  $M(tx + (1 - t)y, f(tx + (1 - t)y))$  este punctul de pe graficul funcției corespunzător abscisei  $tx + (1 - t)y$ , iar  $N(tx + (1 - t)y, tf(x) + (1 - t)f(y))$  este punctul cu aceeași abscisă de pe segmentul determinată de  $A(x, f(x))$  și  $B(y, f(y))$ , observăm că  $f$  este convexă dacă și numai dacă pentru orice două puncte  $A, B$  de pe graficul funcției, porțiunea de grafic dintre  $A$  și  $B$  se află sub segmentul  $AB$  determinat de acestea.

**Funcții concave și strict concave**

Similar, vom spune că  $f$  este *concavă* pe  $I$  dacă oricare ar fi  $x, y \in I$  și oricare ar fi  $t \in [0, 1]$  are loc inegalitatea

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y),$$

respectiv că  $f$  este *strict concavă* pe  $I$  dacă oricare ar fi  $x, y \in I$  și oricare ar fi  $t \in (0, 1)$  are loc inegalitatea

$$f(tx + (1 - t)y) > tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Se observă că  $f$  este (strict) concavă dacă și numai dacă  $-f$  este (strict) convexă.

**Interpretarea geometrică a concavității**

Prin analogie cu interpretarea geometrică a convexității unei funcții, se observă că  $f$  este concavă dacă și numai dacă pentru orice două puncte  $A, B$  de pe graficul funcției, porțiunea de grafic dintre  $A$  și  $B$  se află deasupra segmentului  $AB$  determinat de acestea.

### O proprietate de monotonie

În cele ce urmează, se va observa că proprietatea unei funcții de a fi convexă implică monotonia unui anumit raport incremental.

**Teorema 7.19.** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval și fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  convexă pe  $I$ . Fie deasemenea  $a \in \mathbb{R}$ . Atunci funcția  $g_a : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , este crescătoare.

**Demonstrație.** Fie  $x, y \in I$ ,  $x < y$ ,  $x, y \neq a$ . Să presupunem că  $a < x < y$ , în celelalte situații raționându-se analog. Atunci există  $t \in (0, 1)$  astfel ca  $x = ta + (1 - t)y$  și atunci, deoarece  $f$  este convexă,  $f(x) \leq tf(a) + (1 - t)f(y)$ , deci  $f(x) - f(a) \leq (1 - t)(f(y) - f(a))$ . Cum  $x - a = (1 - t)(y - a)$ , urmează că

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \implies g_a(x) \leq g_a(y),$$

de unde concluzia. ■

### Continuitatea funcțiilor convexe

Cu ajutorul proprietății de mai sus, putem deduce că o funcție convexă este continuă pe interiorul domeniului ei de definiție.

**Teorema 7.20.** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval și fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  convexă pe  $I$ . Fie deasemenea  $a \in \overset{\circ}{I}$ . Atunci  $f$  este continuă în  $a$ .

**Demonstrație.** Deoarece  $a \in \overset{\circ}{I}$ , există  $\varepsilon > 0$  astfel ca  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$ . Conform proprietății anterioare, urmează că

$$\frac{f(a - \varepsilon) - f(a)}{-\varepsilon} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \quad \text{pentru } x \in I,$$

de unde, notând

$$L = \max \left( \left| \frac{f(a - \varepsilon) - f(a)}{-\varepsilon} \right|, \left| \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \right| \right),$$

se obține că  $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq L$ , deci  $|f(x) - f(a)| \leq L|x - a|$  pentru  $x \in I$ , ceea ce înseamnă că  $f$  este continuă în  $x = a$ . ■



**O altă interpretare grafică a noțiunii de convexitate**

Tot cu ajutorul Teoremei 7.19, putem demonstra următorul rezultat.

**Teorema 7.21.** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval și fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  convexă pe  $I$ . Fie de asemenea  $a \in I$  un punct în care  $f$  este derivabilă lateral. Atunci

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'_s(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \quad \text{pentru } x < a < y \in I.$$

**Demonstrație.** Fie  $h_1, h_2 > 0$  în așa fel încât  $x < a - h_1 < a + h_2 < y$ . Atunci

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(a - h_1) - f(a)}{-h_1} \leq \frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}.$$

Prin trecere la limită pentru  $h_1, h_2 \rightarrow 0$ , urmează concluzia. ■

În particular, dacă  $f$  este derivabilă în  $a$ , urmează că

$$f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a), \quad \text{pentru } x \in I,$$

deci

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a), \quad \text{pentru } x \in I. \quad (7.5)$$

Cum  $B(x, f(a) + f'(a)(x - a))$  este punctul de pe tangenta la graficul funcției  $f$  în  $A(a, f(a))$  corespunzător abscisei  $x$ , urmează că o funcție derivabilă  $f$  este convexă pe  $I$  dacă și numai dacă pentru orice punct  $A(a, f(a))$  de pe grafic, graficul funcției este situat deasupra tangentei în  $A$  la grafic.

**Studiul convexității și concavității cu ajutorul derivatei de ordinul al doilea**

În cele ce urmează, vom vedea că se poate preciza convexitatea sau concavitățile unei funcții cunoscând semnul derivatei de ordinul al doilea.

**Teorema 7.22.** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval și fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de două ori derivabilă pe  $I$ . Atunci au loc următoarele afirmații.

1.  $f''(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in I$  dacă și numai dacă  $f$  este convexă pe  $I$ .
2.  $f''(x) \leq 0$  pentru orice  $x \in I$  dacă și numai dacă  $f$  este concavă pe  $I$ .

**Demonstrație.** Vom demonstra doar prima afirmație, cea de-a doua putând fi obținută printr-un raționament analog.

„ $\Leftarrow$ ” Dacă  $f''(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in I$ , fie atunci  $x, y \in I$ ,  $x < y$  și  $t \in [0, 1]$ . Deoarece are loc șirul de echivalențe

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) \\ \Leftrightarrow (t + (1-t))f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) \\ \Leftrightarrow t[f(tx + (1-t)y) - f(x)] &\leq (1-t)[f(y) - f(tx + (1-t)y) - f(x)], \end{aligned}$$

rămâne să demonstrăm ultima inegalitate. Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalul  $[x, tx + (1-t)y]$ , obținem că există  $c_1 \in (x, tx + (1-t)y)$  astfel încât

$$f(tx + (1-t)y) - f(x) = f'(c_1)[tx + (1-t)y - x],$$

deci

$$t[f(tx + (1-t)y) - f(x)] = t(1-t)(y-x)f'(c_1). \quad (7.6)$$

Aplicând din nou teorema lui Lagrange, de această dată pe intervalul  $[tx + (1-t)y, y]$  obținem că există  $c_2 \in (tx + (1-t)y, y)$  astfel încât

$$f(y) - f(tx + (1-t)y) = f'(c_2)[y - (tx + (1-t)y)],$$

deci

$$(1-t)[f(y) - f(tx + (1-t)y)] = t(1-t)(y-x)f'(c_2). \quad (7.7)$$

Conform (7.6) și (7.7), rămâne să comparăm  $f'(c_1)$  și  $f'(c_2)$ . Deoarece  $c_1 \in (x, tx + (1-t)y)$ , iar  $c_2 \in (tx + (1-t)y, y)$ , urmează că  $c_1 < c_2$ . Cum  $f'' \geq 0$  pe  $I$ , urmează că  $f'$  este crescătoare pe  $I$ , deci  $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ , de unde concluzia.

„ $\Rightarrow$ ” Dacă  $f$  este convexă pe  $I$ , fie  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$ . Atunci, aplicând inegalitatea (7.5) pentru  $x = x_2$  și  $a = x_1$ , respectiv pentru  $x = x_1$  și  $a = x_2$ , obținem că

$$f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

respectiv

$$f(x_1) - f(x_2) \geq f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

deci

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Cum  $x_1, x_2$  sunt arbitrari, urmează că  $f'$  este crescătoare pe  $I$ , ceea ce implică faptul că  $f'' \geq 0$  pe  $I$ . ■

Se poate observa că dacă  $f'' > 0$  pe  $I$ , atunci  $f$  este strict convexă pe  $I$ .

**Exemple** 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ , deoarece  $f''(x) = 2 > 0$  pentru  $x \in \mathbb{R}$ .

2.  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  este concavă pe  $(0, \infty)$ , întrucât  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  pentru  $x \in (0, \infty)$ .

3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este convexă pe  $[0, \infty)$  și concavă pe  $(-\infty, 0]$ , întrucât  $f''(x) = x$ ,  $f''(x) \geq 0$  pentru  $x \in [0, \infty)$ ,  $f''(x) \leq 0$  pentru  $x \in (-\infty, 0]$ .

### Inegalitatea lui Jensen

Pornind de la definiția convexității, se poate demonstra prin inducție matematică faptul că dacă  $f$  este convexă pe  $I$ , atunci

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n)$$

pentru orice  $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$  și orice  $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$  cu  $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$ , inegalitate cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Jensen*, pentru funcții concave având loc inegalitatea inversă.

În particular, pentru  $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ , se obține că

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n},$$

pentru orice  $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ , pentru funcții concave având loc inegalitatea inversă.

**Exemple** 1. Deoarece  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  este concavă pe  $[0, \pi]$ , urmează că dacă  $A, B, C$  sunt unghiuri ale unui triunghi, atunci

$$\sin \frac{A + B + C}{3} \geq \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3},$$

de unde, ținând seama că  $A + B + C = \pi$ , obținem că

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2. Deoarece  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  este concavă pe  $(0, \infty)$ , urmează că

$$\begin{aligned} \ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} &\geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n} \\ &= \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}, \end{aligned}$$

pentru orice  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, \infty)$  ceea ce înseamnă că

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

pentru orice  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, \infty)$ , ceea ce, împreună cu observația că inegalitatea rămâne adevărată și atunci când unul sau mai mulți  $x_i$  sunt nuli, demonstrează validitatea inegalității mediilor.

### Puncte de inflexiune

Fie  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^3$ . Observăm că, deoarece  $g''(x) = 3x$ ,  $g$  este concavă pe  $(-\infty, 0]$  și convexă pe  $[0, \infty)$ , în  $x_0 = 0$  schimbându-se convexitatea funcției. Graficul funcției  $f$  are tangentă în punctul corespunzător  $(x_0, g(x_0)) = (0, 0)$ , porțiunea din graficul lui  $g$  corespunzătoare lui  $x \geq 0$  aflându-se deasupra acestei tangente, iar porțiunea din graficul lui  $g$  corespunzătoare lui  $x \leq 0$  aflându-se dedesubtul acesteia. În cele ce urmează, vom încadra această situație tipică într-un cadru mai general.

Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ . Atunci  $x_0$  se numește *punct de inflexiune al funcției  $f$*  dacă

1.  $f$  este continuă în  $x_0$ ;
2.  $f$  are derivată în  $x_0$ , finită sau infinită;
3. Există  $a, b \in I$ ,  $a < x_0 < b$  astfel încât

$f$  este convexă pe  $(a, x_0)$  și concavă pe  $(x_0, b)$ , sau

$f$  este concavă pe  $(a, x_0)$  și convexă pe  $(x_0, b)$ .

În această situație, se spune că punctul corespunzător  $A(x_0, f(x_0))$  este *punct de inflexiune al graficului funcției  $f$* .

Din punct de vedere geometric, faptul că  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției  $f$  înseamnă că graficul funcției  $f$  are tangentă în  $A(x_0, f(x_0))$ , iar tangenta în  $A$

„traversează” graficul funcției  $f$ , în sensul că de o parte a lui  $A$  tangenta se află sub grafic, iar de cealaltă parte se află deasupra graficului.

Având în vedere caracterizarea convexității unei funcții cu ajutorul semnului derivatei de ordinul al doilea, se obține următorul rezultat.

**Teorema 7.23.** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ . Dacă sunt îndeplinite condițiile

1.  $f$  este continuă în  $x_0$ ;
2.  $f$  are derivată în  $x_0$ , finită sau infinită;
3. Există  $a, b \in I$ ,  $a < x_0 < b$  astfel încât

$$f''(x) \geq 0 \text{ pe } (a, x_0) \text{ și } f''(x) \leq 0 \text{ pe } (x_0, b), \text{ sau}$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ pe } (a, x_0) \text{ și } f''(x) \geq 0 \text{ pe } (x_0, b),$$

atunci  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției  $f$ .

În condițiile acestei teoreme, putem spune că  $x_0$  este punct de inflexiune numai dacă  $f''$  își schimbă semnul la trecerea de la stânga lui  $x_0$  la dreapta lui  $x_0$ . De asemenea, are loc următorul rezultat.

**Teorema 7.24.** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă de două ori pe  $I$ , iar  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$  un punct de inflexiune al lui  $f$ . Atunci  $f''(x_0) = 0$ .

**Exemple** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ . Atunci  $f$  este de două ori derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f''(x) = 6x$ . Atunci  $f$  este concavă pe  $(-\infty, 0]$ , respectiv convexă pe  $[0, \infty)$ . Cum  $f$  este continuă în  $0$ , iar  $f$  are derivată în  $0$ ,  $f'(0) = 0$ , urmează că  $0$  este punct de inflexiune.

2. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ . Atunci  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$  și derivabilă de două ori pe  $\mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ , iar

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}.$$

Cum  $f$  are derivată în  $0$ ,  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$ , iar  $f$  este convexă pe  $(-\infty, 0)$  respectiv concavă pe  $(0, \infty)$ ,  $0$  este punct de inflexiune.

## Aplicații

7.1. Cu ajutorul formulei de derivare  $(x^k)' = kx^{k-1}$ , determinați valoarea sumei  $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ .

7.2. Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} a^2 + x + 1, & x > 0 \\ a \sin x + b \cos x, & x \leq 0 \end{cases}$ , să fie derivabilă în  $x_0 = 0$ .

7.3. Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 0 \\ e^x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ , să fie derivabilă în  $x_0 = 0$ .

7.4. Fie  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + |x|$ ,  $g(x) = 1 - |x|$ . Demonstrați că  $f, g$  nu sunt derivabile în  $x_0 = 0$ , dar  $f + g$  este derivabilă în  $x_0 = 0$ .

7.5. Fie  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  pară și derivabilă în  $x_0 = 0$ . Demonstrați că  $f'(0) = 0$ .

7.6. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  derivabilă în  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Determinați

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0) \right)$ ; 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( f(x_0 + \frac{1}{n^2}) - f(x_0 - \frac{1}{n^2}) \right)$ ;  
3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( f(x_0 + \frac{1}{n}) + f(x_0 + \frac{2}{n}) + f(x_0 + \frac{3}{n}) - 3f(x_0) \right)$ .

7.7. Determinați (dacă există) punctele de pe graficul funcțiilor  $f$  următoare,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , în care tangenta este paralelă cu axa  $Ox$

- 1)  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$ ; 2)  $f(x) = x^5 + 2x + 1$ ; 3)  $f(x) = 4x + 2$ .

7.8. Fie  $f : (\frac{2}{3}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(3x - 2)$ . Determinați punctele de pe graficul funcției  $f$  în care tangenta este paralelă cu dreapta  $y = 3x + 4$ .

7.9. Determinați ecuațiile tangentelor la graficul funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - x^2$  în punctele de abscise respectiv  $0, \frac{1}{2}, 1$  și precizați unghiurile pe care aceste tangente le fac cu axa  $Ox$ .

7.10. Să se arate că dreapta  $y = 7x - 2$  este tangentă la curba  $y = x^3 + 4x$ .

7.11. Determinați cea mai mică pantă posibilă a tangentei la curba  $y = x^3 - 3x^2 + 7x$ .

**7.12.** Demonstrați că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , este continuă în  $x_0 = 0$ , dar graficul său nu are tangentă în  $A(0,0)$ .

**7.13.** Fie funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + 1$ ,  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{x+1}{x}$ . Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât graficele celor două funcții să aibă tangentă comună într-un punct de abscisă 1.

**7.14.** Precizați dacă graficele funcțiilor  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = |1 - x^2|$ ,  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$ ,  $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_3(x) = \max(x^2 + 5x, 4x + 2)$ , au puncte unghiulare sau de întoarcere.

**7.15.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 - 4}$ . Demonstrați că  $f$  verifică relația

$$f(x)f'(x) = x\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

**7.16.** Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}$ . Demonstrați că  $f$  verifică relația

$$xf''(x) + f'(x) - f(x) = 0, \quad \text{pentru } x \in (0, \infty).$$

**7.17.** Demonstrați că

$$(\ln(ax + b))^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-1)! a^n}{(ax + b)^n}, \quad \text{pentru } n \geq 1.$$

**7.18.** Folosind eventual o descompunere în fracții simple, demonstrați că

$$\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2n!} \left[ \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right], \quad \text{pentru } n \geq 1.$$

**7.19.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2}$ . Demonstrați că  $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$ , unde  $P_n$  este un polinom de gradul  $n$  și determinați o formulă de recurență pentru calculul lui  $P_n$ .

**7.20.** Determinați

$$1) (x \ln(3x - 1))^{(n)}; \quad 2) (x^2 \cos x)^{(n)}; \quad 3) ((x^2 + x + 3)e^{2x})^{(n)}; \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

**7.21.** Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ . Demonstrați că  $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{f(x)}{x^{2n}}$ .

**7.22.** Fie  $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ . Demonstrați că  $f$  este strict crescătoare și precizați mulțimea valorilor funcției.

**7.23.** Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ ,  $f(x) = e^x + x^2 + 3x$ . Demonstrați că  $f$  este strict crescătoare, bijectivă și calculați  $(f^{-1})'(e^2 + 10)$ .

**7.24.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}$ . Demonstrați că  $f$  este strict descrescătoare, bijectivă și calculați  $(f^{-1})'(2)$ .

**7.25.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x_0 = 1$  să fie punct de extrem.

**7.26.** Fie  $a, b, c \in (0, \infty)$ . Dacă  $a^x + b^x + c^x \geq 3$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , demonstrați folosind teorema lui Fermat că  $abc = 1$ .

**7.27.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție polinomială de gradul  $n$ ,  $n \geq 2$ , cu  $n$  rădăcini reale distincte. Demonstrați că ecuația  $f'(x) = 0$  are exact  $n - 1$  rădăcini reale distincte.

**7.28.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Demonstrați că ecuația

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-(n+1)} = 0,$$

are exact  $n$  rădăcini reale.

**7.29.** Determinați numărul de rădăcini reale ale ecuațiilor

- 1)  $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ ; 2)  $x^4 - 14x^2 + 24x - 6 = 0$ ; 3)  $x^5 - 5x + 1 = 0$ ;  
4)  $3x \ln x + 2 = 0$ ; 5)  $xe^x - 2 = 0$

**7.30.** Demonstrați că ecuația  $2x^3 + 3x + m = 0$  are o unică rădăcină reală indiferent de valoarea parametrului  $m \in \mathbb{R}$ .

**7.31.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție Rolle pe  $[a, b]$  cu proprietatea că  $f(a)^2 + b^2 = f(b)^2 + a^2$ . Să se demonstreze că ecuația  $f(x)f'(x) = x$  are măcar o rădăcină în intervalul  $(a, b)$ .

**7.32.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție Rolle pe  $[a, b]$ .

1. Demonstrați că  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x - a)(x - b)f(x)$ , este de asemenea o funcție Rolle pe  $[a, b]$ .

2. Demonstrați că există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$ .

**7.33.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ . Determinați punctele în care funcția nu este derivabilă.



**7.34.** 1. Demonstrați că  $e^x \geq 1 + x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Folosind această inegalitate, demonstrați că

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

pentru orice  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  (inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică a  $n$  numere pozitive).

**7.35.** Folosind teorema lui Lagrange, demonstrați inegalitățile

1.  $na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$ ,  $0 \leq a < b$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2.  $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ ,  $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$ .

3.  $3^p + 6^p > 4^p + 5^p$ ,  $p > 1$ .

4.  $(x+1) \cos \frac{\pi}{x+1} - x \cos \frac{\pi}{x}$ , pentru  $x \geq 2$ .

**7.36.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^6+5}$ . Demonstrați cu ajutorul teoremei lui Lagrange că  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**7.37.** Folosind teorema lui Lagrange, demonstrați că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x - \sin x} = 1$ .

**7.38.** Folosind teorema lui Lagrange, arătați că ecuația  $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , are doar soluțiile  $x = 0$  și  $x = 1$ .

**7.39.** Fie  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  două funcții derivabile cu proprietățile că  $f(2012) = g(2012)$  și  $f' \cdot g^2 = g' \cdot f^2$ . Demonstrați că  $f = g$ .

**7.40.** Demonstrați că pe intervalele indicate funcțiile următoare diferă printr-o constantă, a cărei valoare se cere

1.  $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ,  $g(x) = \operatorname{arctg} x$  pe  $\mathbb{R}$ .

2.  $f(x) = \operatorname{arctg}(x+2)$ ,  $g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{(x+1)^2}{2}$  pe  $\mathbb{R}$ .

**7.41.** Fie  $f, g : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x$ ,  $g(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ . Demonstrați că  $f$  și  $g$  au aceeași derivată pe  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ , dar  $(f-g)(\sqrt{3}) = \pi$ ,  $(f-g)(-\sqrt{3}) = -\pi$ , deci  $f$  și  $g$  nu diferă printr-o constantă. Cum explicați?

**7.42. Demonstrați inegalitățile**

1.  $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ , pentru orice  $x > 0$ .
2.  $e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
4.  $1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \geq \sqrt{1 + x^2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
5.  $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ , pentru orice  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

**7.43.** Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . Determinați valoarea maximă a lui  $f$  și deduceți de aici că  $e^x \geq x^e$  pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .

**7.44. Determinați valorile limitelor**

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{\sin(\operatorname{tg} x)}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 - n(x-1)}{(x-1)^2}$ ;
- 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(4 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{4x})}$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{\sin x}}$ ; 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x} \right)$ ;
- 8)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$ ; 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ ; 10)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \ln \frac{1}{x-2}$ ; 11)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x$ ;
- 12)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ ; 13)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\frac{2}{3+4 \ln x}}$ .

**7.45.** Dezvoltați funcția polinomială  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$  după puterile lui  $x - 2$ .

**7.46.** Determinați polinomul lui Taylor de ordinul  $n$  asociat următoarelor funcții în punctele date

- 1)  $f(x) = e^{-3x}$ ;  $x_0 = -\frac{1}{3}$ ; 2)  $f(x) = \ln(1 + 3x)$ ;  $x_0 = \frac{1}{3}$ ; 3)  $f(x) = \sqrt{4x - 3}$ ;  $x_0 = 1$ ;
- 4)  $f(x) = \cos^2 x$ ;  $x = \frac{\pi}{6}$ ; 5)  $f(x) = \operatorname{sh} x$ ;  $x_0 = 1$ .

**7.47. Determinați asimptotele funcțiilor**

1.  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$ ;
2.  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \ln(1 + x)$ ;
3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x-1)(x-2)}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \\ 0, & x = 1 \text{ sau } x = 2 \end{cases}$ ;

4.  $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\left| \frac{x^3 - x}{x + 2} \right|};$
5.  $f : (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \left( \frac{3 - x}{3 + x} \right);$
6.  $f : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1};$
7.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin^2 x + 2 \cos 3x;$
8.  $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 2|^{\frac{1}{x-1}}.$

**7.48.** Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât graficul funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$  să aibă dreapta  $y = 1$  ca asimptotă orizontală.

**7.49.** Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât graficul funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + ax + a}$ , să aibă o unică asimptotă verticală.

**7.50.** Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât graficul funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x + 2}$  să aibă dreapta  $y = x + 2$  ca asimptotă oblică spre  $+\infty$ .

**7.51.** Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât graficul funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{ax^2 + bx}$  să aibă dreapta  $y = 2x + 1$  ca asimptotă oblică spre  $+\infty$ .

**7.52.** Demonstrați că graficul unei funcții polinomiale de grad  $n, n \geq 2$ , nu are asimptote.

**7.53.** Determinați o funcție  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  care să aibă ca asimptote verticale toate dreptele  $x = k, k \in \mathbb{Z}$ .

**7.54.** Fie  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}, I$  interval, două funcții convexe. Demonstrați că  $f + g$  este o funcție convexă. Se poate spune același lucru și despre  $f - g$ ?

**7.55.** Determinați intervalele de convexitate și concavitate pentru funcțiile

1.  $f : (-\infty, -1) \cup [1, +\infty), f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}};$
2.  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \ln x;$
3.  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x};$
4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3} \sin x + 2 \cos x;$
5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}.$

Au aceste funcții puncte de inflexiune?

**7.56.** Studiind eventual convexitatea funcției  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$ , demonstrați că  $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n+y^n}{2}$ , pentru orice  $x, y \geq 0$  și orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

**7.57.** Studiind eventual convexitatea funcției  $f : [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ , demonstrați că în orice triunghi  $ABC$  există relația  $\sqrt{\sin \frac{A}{2}} + \sqrt{\sin \frac{B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{C}{2}} \leq 3\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**7.58.** Studiind eventual convexitatea funcției  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln x$ , demonstrați că  $\ln \frac{x+y}{2} < \frac{x}{x+y} \ln x + \frac{y}{x+y} \ln y$ , pentru orice  $x, y > 0$ .

# Index

## Șir

- convergent, 39
  - caracterizare analitică, 40
- definit recurent, 32
- fundamental (Cauchy), 67
- limita unui, 37
  - limită inferioară, 64
  - limită superioară, 64
  - puncte limită, 62
- mărginit, 35
- monoton
  - crescător, 36
  - descrescător, 36
- Rolle, 247
- subșir al unui, 34

## Asimptotă

- oblică, 275
- orizontală, 273
- verticală, 276

## Axioma

- de completitudine (Cantor-Dedekind), 11

## Continuitate

- într-un punct, 198
- caracterizări analitice
  - cu  $\varepsilon - \delta$ , 205
  - cu șiruri, 204

## laterală, 200

- pe o mulțime, 201
- prelungirea prin continuitate, 204
- puncte de discontinuitate, 201
  - de specia (speța) întâi, 201
  - de specia (speța) a doua, 202
- uniformă, 211

## Contractție, 212

## Criterii de convergență a seriilor

- Abel, 124
- al radicalului
  - cu inegalități, 110
  - cu limită, 112
  - cu limite extreme, 111
- al raportului
  - cu inegalități, 113
  - cu limită, 115
  - cu limite extreme, 114

## Cauchy, 95

- de comparație
  - cu inegalități, 105
  - cu limită, 107
  - cu limite extreme, 106
  - cu rapoarte, 109
- de condensare, 101

## Dirichlet, 122

## Leibniz, 126

## Raabe-Duhamel

- cu inegalități, 117
  - cu limită, 120
  - cu limite extreme, 119
- Criterii de existență a limitei unei funcții
  - Cauchy-Bolzano, 169
  - cleștelui, 172
  - majorării, 167
- Criterii de existență a limitei unui șir
  - cleștelui, 49
  - majorării, 45
- Derivate
  - într-un punct, 220
  - ale funcțiilor elementare, 225
  - de ordin superior, 237
  - laterale, 222
  - pe o mulțime, 223
- Difeomorfism
  - de clasă  $C^k$ , 238
- Diferențiala unei funcții
  - într-un punct, 235
  - de ordin superior, 241
- Formula
  - Leibniz, 239
- Formula lui Taylor
  - formula lui MacLaurin, 269
  - polinomul lui Taylor, 264
  - restul lui Cauchy, 268
  - restul lui Lagrange, 269
  - restul lui Peano, 267
  - restul lui Schlömilch-Roche, 268
- Funcție
  - bijectivă, 24
  - concavă, 279
  - convexă, 279
  - impară, 25
  - injectivă, 24
  - Lipschitz, 212
  - mărginită, 26
  - monotonă, 26
  - pară, 25
  - periodică, 25
  - Rolle, 245
  - surjectivă, 24
- Inegalitatea
  - Bernoulli, 22
  - Cauchy-Buniakowski-Schwarz, 22
  - mediilor, 21
- Lema
  - Bolzano, 207
- Limita unei funcții
  - într-un punct, 161
  - caracterizări analitice
    - cu  $\varepsilon - \delta$ , 162
    - cu șiruri (Heine), 163
  - laterală, 165
  - limite fundamentale, 186
  - limitele funcțiilor elementare, 177
- Majorant, 11
- Margine a unei mulțimi
  - caracterizări analitice, 13
  - inferioară, 11
  - superioară, 11
- Minorant, 10
- Mulțime
  - închisă, 149
  - a punctelor interioare, 144

- aderentă, 143
  - compactă, 151
  - de puterea continuului, 158
  - densă, 152
  - derivată, 140
  - deschisă, 147
  - frontieră, 146
  - mărginită, 12
  - majorată, 10
  - minorată, 10
  - numărabilă, 154
- Produs după Cauchy a două serii, 129
- Progresie
- aritmetică, 32
  - geometrică, 32
- Proprietatea
- Arhimede, 14
  - Darboux, 209
  - de separație Hausdorff, 20
- Punct
- aderent, 142
  - critic, 245
  - de întoarcere, 223
  - de acumulare, 139
  - de extrem global, 243
  - de frontieră, 146
  - de inflexiune, 284
  - de maxim local, 242
  - de minim local, 242
  - exterior, 145
  - interior, 144
  - izolat, 140
  - unghiular, 223
- Regula lui L'Hôpital
- cazul  $\frac{0}{0}$ , 254
  - cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ , 258
- Serie
- șirul sumelor parțiale, 87
  - absolut convergentă, 127
  - alternantă, 98
  - armonică, 95
  - armonică generalizată, 103
  - condiționat convergentă (semiconvergentă), 127
  - convergentă, 87
  - divergentă, 87
  - rest de ordin  $p$ , 94
  - telescopică, 90
- Teorema
- Cauchy, 253
  - de punct fix a lui Banach, 212
  - Fermat, 244
  - Lagrange (a creșterilor finite), 248
  - Rolle, 245
  - Stolz-Césaro, 72
  - Weierstrass, 213
- Vecinătate, 19

## Bibliografie

- [1] S. Caraman, *Lecture notes on mathematical analysis*, Editura Societății Academice „Matei-Teiu Botez”, Iași, 2008.
- [2] E. Çınlar, R. V. Vanderbei, *Mathematical methods of engineering analysis*, <http://www.princeton.edu/~rvdb/506book/book.pdf>
- [3] I. Crăciun, *Calcul diferențial*, Editura Lumina, București, 1997.
- [4] V. Geangalău, *1001 probleme de analiză matematică*, Editura Junimea, Iași, 1994.
- [5] W. J. Kaczor, M. T. Novak, *Problems in mathematical analysis I: real numbers, sequences and series*, Student Mathematical Library **4**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [6] W. J. Kaczor, M. T. Novak, *Problems in mathematical analysis II: continuity and differentiation*, Student Mathematical Library **12**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [7] M. Mureșan, *A concrete approach to classical analysis*, Springer Verlag, New York, 2009.
- [8] M. Nicolescu, N. Roșculet, S. Marcus, *Analiză matematică, vol. I* (Ediția a IV-a), Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984.
- [9] I. Nistor, *Probleme de analiză matematică, vol. I*, Editura Cermi, Iași, 2007.
- [10] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iași, 1998.
- [11] G. Procopiuc, *Matematică*, Editura Universității Tehnice „Gh. Asachi”, Iași, 1999.



- [12] M. Roșculeț, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984.
- [13] G. Sirețchi, *Calcul diferențial și integral, vol. I-II*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985.