Ecuaţii cu variabile separabile Sunt ecuaţii de forma $\boxed{\textbf{(EVS) } x' = f(t)g(x)}$, unde $f : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}$, $g : (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, iar g nu se anulează, membrul drept putându-se scrie ca un produs intre o funcţie care depinde doar de variabila t şi o funcţie care depinde doar de variabila x.

Rezolvarea (EVS): Se separă cele două variabile prin împărţire, într-un membru rămânând doar x' şi funcţii de variabila x iar în celălalt doar funcţii de variabila t. Se integrează în ambii membri, folosind-se şi faptul că $dx = x'dt$.

$\boxed{\textbf{Exemplul 1} \quad x' = 2t(1 + x^2)}$

Prin împărţire cu $1 + x^2$, separăm variabilele şi obţinem $\dfrac{x'}{1+x^2} = 2t$. Prin integrare şi folosirea formulei $dx = x'dt$, deducem

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int 2tdt \implies \operatorname{arctg} x = t^2 + C \implies x = \operatorname{tg}(t^2 + C).$$

$\boxed{\textbf{Exemplul 2} \quad x' + te^x = e^x}$

Deoarece $x' = e^x - te^x = e^x(1-t)$, putem separa variabilele şi obţine $\dfrac{x'}{e^x} = 1 - t$. Atunci $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x} = \int (1-t)dt$, de unde

$$\int e^{-x}dx = t - \frac{t^2}{2} + C \implies -e^{-x} = t - \frac{t^2}{2} + C \implies x = -\ln(-t + \frac{t^2}{2} + C).$$

Ecuaţii liniare Sunt ecuaţii de forma $\boxed{\textbf{(EL) } x' = a(t)x + b(t)}$, unde $a, b : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, membrul drept fiind o funcţie de gradul 1 (numită şi funcţie liniară) în variabila x.

Rezolvarea (EL) Se rezolvă mai întâi ecuaţia omogenă (fără termen liber) asociată $x' = a(t)x$, scrisă sub forma $x' - a(t)x = 0$, prin înmulţirea cu e^P, P reprezentând o primitivă a lui $-a$ (coeficientul lui x din ecuaţia omogenă, în scrierea cu 0 în membrul drept). Se caută apoi o soluţie particulară a ecuaţiei iniţiale (EL) de o formă apropiată soluţiei ecuaţiei omogene, prin metoda variaţiei constantelor (constanta C este înlocuită de o funcţie u). În final, pentru a se obţine soluţia generală a ecuaţiei neomogene se adună cele două soluţii, cea a ecuaţiei omogene şi cea particulară a ecuaţiei iniţiale.

Altfel Se poate folosi formula $x(t) = e^{Q(t)} \displaystyle\int b(t)e^{-Q(t)}dt$, unde Q este o primitivă a lui a aleasă convenabil.

$\boxed{\textbf{Exemplul 1} \quad x' = -2tx + 2te^{-t^2}}$

Ecuaţia omogenă asociată este $x' + 2tx = 0$. Coeficientul lui x din ecuaţia omogenă este $2t$, iar cum $\displaystyle\int 2tdt = t^2 + C$, o primitivă a sa este $P(t) = t^2$. Înmulţim deci ecuaţia omogenă cu e^{t^2}. Avem atunci

$$x'e^{t^2} + x \cdot 2te^{t^2} = 0 \implies x'e^{t^2} + x(e^{t^2})' = 0 \implies (xe^{t^2})' = 0 \implies xe^{t^2} = C \implies x = Ce^{-t^2}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este deci $\mathbf{x_O = Ce^{-t^2}}$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei iniţiale (EL) de o formă apropiată soluţiei ecuaţiei omogene, prin metoda variaţiei constantelor, anume $\mathbf{x_P = u(t)e^{-t^2}}$. Înlocuind în ecuaţia iniţială, obţinem

$$(u(t)e^{-t^2})' = -2tu(t)e^{-t^2} + 2te^{-t^2} \implies u'(t)e^{-t^2} - u(t) \cdot 2te^{-t^2} = -2tu(t)e^{-t^2} + 2te^{-t^2} \implies u'(t)e^{-t^2} = 2te^{-t^2} \implies u'(t) = 2t.$$

De aici, $u(t) = \int 2tdt = t^2 + C$. Întrucât avem nevoie doar de o soluţie particulară, alegem $u(t) = t^2$, de unde $\mathbf{x_P = t^2e^{-t^2}}$. Prin urmare, $\mathbf{x = x_O + x_P = (C + t^2)e^{-t^2}}$.

Altfel: Deoarece $\displaystyle\int -2tdt = -t^2$, o primitivă Q a lui a este $Q(t) = -t^2$. Atunci

$$x(t) = e^{-t^2} \int 2te^{-t^2}e^{t^2}dt = e^{-t^2} \int 2tdt = e^{-t^2}(t^2 + C).$$

$\boxed{\textbf{Exemplul 2} \quad x' = -\dfrac{x}{t} + e^t, t > 0}$

Ecuaţia omogenă asociată este $x' = -\dfrac{x}{t}$, sau $x' + \dfrac{x}{t} = 0$. Coeficientul lui x din ecuaţia omogenă este $\dfrac{1}{t}$, iar cum $\displaystyle\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C$, o primitivă a sa este $P(t) = \ln t$. Înmulţim deci ecuaţia omogenă cu $e^{\ln t}$, adică cu t. Avem atunci

$$tx' + x = 0 \implies (tx)' = 0 \implies tx = C \implies x = \frac{C}{t}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este deci $\mathbf{x_O} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{t}}$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei iniţiale (EL) de o formă apropiată soluţiei ecuaţiei omogene, prin metoda variaţiei constantelor, anume $\mathbf{x_P} = \frac{\mathbf{u(t)}}{\mathbf{t}}$. Înlocuind în ecuaţia iniţială, obţinem

$$\left(\frac{u(t)}{t}\right)' = -\frac{u(t)}{t^2} + e^t \implies \frac{u'(t)t - u(t)}{t^2} = -\frac{u(t)}{t^2} + e^t \implies \frac{u'(t)t}{t^2} = e^t \implies u'(t) = te^t,$$

de unde $u(t) = \int te^t dt$. Integrând prin părţi obţinem că $u(t) = te^t - e^t + C$. Întrucât avem nevoie doar de o soluţie particulară, alegem $u(t) = te^t - e^t$, de unde $\mathbf{x_P} = \frac{\mathbf{te^t - e^t}}{\mathbf{t}}$. Prin urmare, $\mathbf{x} = \mathbf{x_O} + \mathbf{x_P} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{t}} + \frac{\mathbf{e^t(t-1)}}{\mathbf{t}}$.

Altfel: Deoarece $\int -\frac{1}{t} dt = -\ln|t| + C = -\ln t + C$, o primitivă Q a lui a este $Q(t) = -\ln t$. Atunci

$$x(t) = e^{-\ln t} \int e^t e^{\ln t} dt = \frac{1}{t} \int e^t t dt = \frac{1}{t} \int (e^t)' t dt = \frac{1}{t}\left(e^t t - \int e^t t' dt\right) = \frac{1}{t}(e^t t - e^t + C).$$

Ecuaţii Bernoulli Sunt ecuaţii de forma $\boxed{\textbf{(EB) } x' = a(t)x + b(t)x^\alpha}$, unde $a, b : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (pentru $\alpha = 0$ s-ar obţine o ecuaţie liniară, iar pentru $\alpha = 1$ s-ar obţine o ecuaţie cu variabile separabile).

Rezolvarea (EB) Se face schimbarea de variabilă $y = x^{1-\alpha}$, obţinându-se o ecuaţie liniară în y.

Exemplul 1 $x' = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t^2}x^2, t > 0$

Cum $\alpha = 2$, schimbarea de variabilă este $y = x^{1-2}$, adică $y = x^{-1}$, sau $y = \frac{1}{x}$, observându-se de asemenea că $x \equiv 0$ este soluţie a ecuaţiei date. Atunci $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{x'}{x^2}$.

Înmulţind atunci ecuaţia cu $-\frac{1}{x^2}$, obţinem $-\frac{x'}{x^2} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{t^2}$, adică $y' = \frac{1}{t}y - \frac{1}{t^2}$ (o ecuaţie liniară în y).

Ecuaţia omogenă asociată este $y' - \frac{1}{t}y = 0$. Coeficientul lui y din ecuaţia omogenă este $-\frac{1}{t}$, iar cum $\int -\frac{1}{t} dt = -\ln|t| + C$, o primitivă a sa este $P(t) = -\ln t$. Înmulţim deci ecuaţia omogenă cu $e^{-\ln t} = \frac{1}{e^{\ln t}} = \frac{1}{t}$. Avem atunci

$$\frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 0 \implies \left(\frac{1}{t}y\right)' = 0 \implies \frac{1}{t}y = C \implies y = Ct.$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este deci $\mathbf{y_O} = \mathbf{Ct}$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei liniare sub forma $\mathbf{y_P} = \mathbf{u(t)t}$. Înlocuind în ecuaţia liniară, obţinem

$$(tu(t))' = \frac{1}{t}tu(t) - \frac{1}{t^2} \implies u(t) + tu'(t) = u(t) - \frac{1}{t^2} \implies u'(t) = -\frac{1}{t^3}.$$

Atunci $u(t) = \int -\frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2t^2} + C$. Întrucât avem nevoie doar de o soluţie particulară, alegem $u(t) = \frac{1}{2t^2}$, de unde $\mathbf{y_P} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2t}}$. Prin urmare, $\mathbf{y} = \mathbf{y_O} + \mathbf{y_P} = \mathbf{Ct} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2t}}$, iar $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Ct} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2t}}}$.

Exemplul 2 $x' = 2x^2 - 2\frac{x}{t}$

Cum $\alpha = 2$, schimbarea de variabilă este $y = x^{1-2}$, adică $y = x^{-1}$, sau $y = \frac{1}{x}$, observându-se de asemenea că $x \equiv 0$ este soluţie a ecuaţiei date. Atunci $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{x'}{x^2}$.

Înmulţind atunci ecuaţia cu $-\frac{1}{x^2}$, obţinem $-\frac{x'}{x^2} = -2 + 2\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{t}$, adică $y' = \frac{2}{t}y - 2$ (o ecuaţie liniară în y).

Ecuaţia omogenă asociată este $y' - \frac{2}{t}y = 0$. Coeficientul lui y din ecuaţia omogenă este $-\frac{2}{t}$, iar cum $\int -\frac{2}{t} dt = -\ln(t^2) + C$, o primitivă a sa este $P(t) = -\ln(t^2) = \ln\frac{1}{t^2}$. Înmulţim deci ecuaţia omogenă cu $e^{\ln\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t^2}$. Avem atunci

$$\frac{1}{t^2}y' - \frac{2}{t^3}y = 0 \implies \left(\frac{1}{t^2}y\right)' = 0 \implies \frac{1}{t^2}y = C \implies y = Ct^2.$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este deci $\mathbf{y_O = Ct^2}$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei liniare sub forma $y_P = u(t)t^2$. Înlocuind în ecuaţia liniară, obţinem

$$(t^2u(t))' = \frac{2}{t}t^2u(t) - 2 \implies u'(t)\cdot t^2 + u(t)\cdot 2t = 2tu(t) - 2 \implies u'(t) = -\frac{2}{t^2}.$$

Atunci $u(t) = \int -\frac{2}{t^2}dt = \frac{2}{t} + C$. Întrucât avem nevoie doar de o soluţie particulară, alegem $u(t) = \frac{2}{t}$, de unde $y_P = 2t$. Prin urmare, $\mathbf{y = y_O + y_P = Ct^2 + 2t}$, iar $\mathbf{x = \dfrac{1}{Ct^2 + 2t}}$.

Ecuaţii cu diferenţială exactă Sunt ecuaţii de forma $\boxed{\textbf{(EDE)}\ P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0}$, unde $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1, neidentic nule pe mulţimea simplu conexă D, verificând condiţia $\boxed{\textbf{(C)}\ \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x)}$ pentru $(t,x) \in D$.

Rezolvarea (EDE) Se verifică mai întâi condiţia **(C)**. În această situaţie, expresia $P(t,x)dt + Q(t,x)dx$ este (exact) diferenţiala unei funcţii, adică există $F : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă pe D astfel ca $dF(t,x) = P(t,x)dt + Q(t,x)dx$. Ecuaţia **(EDE)** devine atunci $dF(t,x) = 0$, soluţiile **(EDE)** putând fi scrise sub forma implicită

$$F(t, x(t)) = C,$$

unde C este o constantă arbitrară.

Funcţia F se determină ştiind că dacă $dF(t,x) = P(t,x)dt + Q(t,x)dx$, atunci deoarece $dF(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)dx$, urmează că $\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = P(t,x), \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = Q(t,x) \end{cases}}$. Se integrează prima ecuaţie şi se determină F până la o funcţie de variabila x. Funcţia de variabila x se determină prin înlocuire în cea de-a doua ecuaţie.

$\boxed{\textbf{Exemplu}\quad (xe^{tx} - 4tx)dt + (te^{tx} - 2t^2)dx = 0}$

Etapa 1. Verificarea condiţiei (C). În această situaţie, $P(t,x) = xe^{tx} - 4tx$, $Q(t,x) = te^{tx} - 2t^2$. Condiţia **(C)** se reduce la $\frac{\partial}{\partial x}(xe^{tx} - 4tx) = \frac{\partial}{\partial t}(te^{tx} - 2t^2)$. Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial x}(xe^{tx} - 4tx) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{tx}) - \frac{\partial}{\partial x}(4tx) = e^{tx} + xte^{tx} - 4t, \quad \frac{\partial}{\partial t}(te^{tx} - 2t^2) = \frac{\partial}{\partial t}(te^{tx}) - \frac{\partial}{\partial t}(2t^2) = e^{tx} + txe^{tx} - 4t,$$

condiţia **(C)** este verificată.

Etapa 2. Determinarea funcţiei F. Determinăm funcţia F rezolvând sistemul $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} = xe^{tx} - 4tx \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = te^{tx} - 2t^2 \end{cases}$. Deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial t} = xe^{tx} - 4tx$, urmează că

$$F(t,x) = \int (xe^{tx} - 4tx)dt = x\int e^{tx}dt - 4x\int tdt = e^{tx} - 2t^2x + \varphi(x)$$

(fiind dată derivata lui F în raport cu t, putem determina pe F prin integrare, dar nu total, ci doar pînă la o funcţie de variabila rămasă). Determinăm pe φ înlocuind în cea de-a doua ecuaţie. Avem că

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{tx} - 2t^2x + \varphi(x)) = te^{tx} - 2t^2 \implies te^{tx} - 2t^2 + \varphi'(x) = te^{tx} - 2t^2 \implies \varphi'(x) = 0,$$

sau $\varphi'(x) = 0$, adică φ este constantă. Soluţia ecuaţiei se reprezintă implicit sub forma

$$e^{tx} - 2t^2x = C.$$

Ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi omogene

$$\boxed{a_nx^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1x'(t) + a_0x(t) = 0} \tag{EO}$$

Se determină rădăcinile ecuaţiei caracteristice $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$, folosindu-se eventual schema lui Horner şi faptul că rădăcinile întregi se pot căuta printre divizorii termenului liber.

Dacă rădăcinile sunt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, reale şi distincte, atunci

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}.$$

Dacă rădăcinile sunt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, reale şi cu ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, \ldots, m_p$, atunci

$$x(t) = \left(c_{11} e^{\lambda_1 t} + c_{12} t e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_{1m_1} t^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 t}\right) + \left(c_{21} e^{\lambda_2 t} + c_{22} t e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_{2m_2} t^{m_2 - 1} e^{\lambda_2 t}\right) + \\ \ldots + \left(c_{p1} e^{\lambda_p t} + c_{p2} t e^{\lambda_p t} + \ldots + c_{pm_p} t^{m_p - 1} e^{\lambda_p t}\right).$$

Dacă ecuaţia caracteristică are şi rădăcini complexe, atunci pentru perechea de rădăcini complexe conjugate $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, ambele de multiplicitate m, porţiunea corespunzătoare din soluţie este

$$P = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 t e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \ldots + C_m t^{m-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ + D_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t) + D_2 t e^{\alpha t} \sin(\beta t) + \ldots + D_m t^{m-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi neomogene

$$\boxed{a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)} \tag{EN}$$

Se utilizează formula $\mathbf{x_N(t)} = \mathbf{x_O(t)} + \mathbf{x_P(t)}$, unde $\mathbf{x_N(t)}$ este soluţia generală a ecuaţiei neomogene, $\mathbf{x_O(t)}$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate, iar $\mathbf{x_P(t)}$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. Soluţia particulară $\mathbf{x_P(t)}$ se poate determina în următoarele moduri.

Cu ajutorul unei formule explicite Dacă $f(t) = P(t)$, atunci $\mathbf{x_P(t)} = t^l Q(t)$, unde l este ordinul de multiplicitate al lui 0 ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice, iar grad Q = grad P. Dacă $f(t) = Ce^{\alpha t}$, atunci $\mathbf{x_P(t)} = C_1 t^l e^{\alpha t}$, unde l este ordinul de multiplicitate al lui α ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice. Dacă, în general, $f(t) = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t))$, atunci $\mathbf{x_P(t)} = t^l e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin(\beta t))$, unde l este ordinul de multiplicitate al lui $\alpha + i\beta$ ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice, iar grad Q_1 = grad Q_2 = max(grad P_1, grad P_2).

Cu ajutorul metodei variaţiei constantelor După determinarea bazei $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ în spaţiul liniar de soluţii ale ecuaţiei omogene, se caută $\mathbf{x_P(t)}$ sub forma $\mathbf{x_P(t)} = \gamma_1(t)x_1(t) + \gamma_2(t)x_2(t) + \ldots + \gamma_n(t)x_n(t)$, unde $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t)$ verifică sistemul

$$\begin{cases} \gamma_1'(t)x_1(t) + \gamma_2'(t)x_2(t) + \ldots + \gamma_n'(t)x_n(t) = 0 \\ \gamma_1'(t)x_1'(t) + \gamma_2'(t)x_2'(t) + \ldots + \gamma_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \gamma_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \ldots + \gamma_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}.$$

(primii $n-1$ membri drepţi sunt 0, iar ultimul membru drept este termenul liber din ecuaţia iniţială).

Rezolvaţi ecuaţia $x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 2e^{3t}$ cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 2 \\ x'(0) = 3 \end{cases}$.

Ecuaţia dată este o ecuaţie neomogenă. Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă $x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 0$. Ecuaţia caracteristică ataşată este $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, cu rădăcinile reale distincte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Soluţia ecuaţiei omogene este atunci

$$x_O(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Întrucât membrul drept este o exponenţială, căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene $x_P(t)$ de forma $x_P(t) = Ct^l e^{3t}$, unde l este ordinul de multiplicitate al lui 3 ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice. Cum 3 nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, urmează că $l = 0$, iar $x_P(t) = Ce^{3t}$.

Pentru a determina C, înlocuim $x_P(t)$ în ecuaţia iniţială, obţinând că

$$(Ce^{3t})''(t) - 5(Ce^{3t})' + 4Ce^{3t} = 6e^{3t} \implies 9Ce^{3t} - 5 \cdot 3e^{3t} + 4Ce^{3t} = 2e^{3t} \implies -2Ce^{3t} = 2e^{3t} \implies C = -1.$$

Altfel, putem căuta $x_P(t)$ sub forma $x_P(t) = \gamma_1(t)e^t + \gamma_2(t)e^{4t}$ (înlocuim C_1 şi C_2 din expresia lui x_O cu γ_1 şi γ_2), unde $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ verifică sistemul $\begin{cases} \gamma_1'(t)e^t + \gamma_2'(t)e^{4t} = 0 \\ \gamma_1'(t)(e^t)' + \gamma_2'(t)(e^{4t})' = 2e^{3t} \end{cases}$. Atunci $\begin{cases} \gamma_1'(t)e^t + \gamma_2'(t)e^{4t} = 0 \\ \gamma_1'(t)e^t + 4\gamma_2'(t)e^{4t} = 2e^{3t} \end{cases}$. Prin eliminare, obţinem că $3\gamma_1'(t)e^t = -2e^{3t}$, de unde $\gamma_1'(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}$, ceea ce conduce la $\gamma_1(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}$. Similar, $3\gamma_2'(t)e^{4t} = 2e^{3t}$, de unde $\gamma_2'(t) = \frac{2}{3}e^{-t}$, ceea ce conduce la $\gamma_2(t) = -\frac{2}{3}e^{-t}$. De aici,

$$x_P(t) = \gamma_1(t)e^t + \gamma_2(t)e^{4t} = -\frac{1}{3}e^{2t} \cdot e^t - \frac{2}{3}e^{-t} \cdot e^{4t} = -e^{3t}.$$

Atunci
$$x(t) = x_N(t) = x_O(t) + x_P(t) = C_1e^t + C_2e^{4t} - e^{3t}.$$
Întrucât există condiţii iniţiale, putem determina C_1 şi C_2. Pentru $t = 0$ obţinem că $x(0) = C_1 + C_2 - 1$. Observăm de asemenea că $x'(t) = C_1e^t + 4C_2e^{4t} - 3e^{3t}$, de unde pentru $t = 0$ obţinem că $x'(0) = C_1 + 4C_2 - 3$. Din condiţiile iniţiale obţinem sistemul $\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 2 \\ C_1 + 4C_2 - 3 = 3 \end{cases}$, cu soluţiile $C_1 = 2$, $C_2 = 1$. Atunci soluţia ecuaţiei date este
$$x(t) = 2e^t + e^{4t} - e^{3t}.$$

Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$ cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Metoda eliminării Se derivează prima ecuaţie şi se înlocuieşte y' din cea de-a doua ecuaţie. Se formează un sistem conţinând prima ecuaţie a sistemului şi ecuaţia nou obţinută. Se reduce apoi $y(t)$ pentru a se obţine o ecuaţie doar în $x(t)$. Se obţine
$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ x''(t) = 2x'(t) + y'(t) \end{cases} \implies \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ x''(t) = 2x'(t) + x(t) + 2y(t) \end{cases} \implies \begin{cases} 2x'(t) = 4x(t) + 2y(t) \\ x''(t) = 2x'(t) + x(t) + 2y(t) \end{cases} \implies 2x'(t) - x''(t) = 3x(t) - 2x'(t) \implies x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0$. Ecuaţia caracteristică asociată este $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Atunci
$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{3t}.$$

Determinăm acum $y(t)$. Cum $x'(t) = 2x(t) + y(t)$, urmează că $y(t) = x'(t) - 2x(t)$. Deoarece $x(t) = C_1e^t + C_2e^{3t}$, avem că $x'(t) = C_1e^t + 3C_2e^{3t}$ şi atunci
$$y(t) = x'(t) - 2x(t) = C_1e^t + C_2e^{3t} - 2(C_1e^t + 3C_2e^{3t}) = -C_1e^t + C_2e^{3t}.$$

De aici, pentru $t = 0$, deducem că $x(0) = C_1 + C_2$, iar $y(0) = -C_1 + 3C_2$. Impunând condiţiile iniţiale, obţinem $\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$, de unde $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Obţinem deci soluţia problemei Cauchy sub forma
$$\begin{cases} x(t) = e^t + 2e^{3t} \\ y(t) = -e^t + e^{3t} \end{cases}.$$

Metoda valorilor proprii Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinăm mai întâi valorile proprii ale acestei matrice. Ecuaţia caracteristică $\det(\lambda I_2 - A) = 0$ revine la $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$, adică $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Determinăm baze în spaţiile proprii asociate valorilor proprii.

$S(1) : \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2v_1 + v_2 = v_1 \\ v_1 + 2v_2 = v_2 \end{cases} \implies \begin{cases} v_2 = -v_1 \\ v_2 = -v_1 \end{cases}$, deci o bază este $B_1 = \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

$S(3) : \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2v_1 + v_2 = 3v_1 \\ v_1 + 2v_2 = 3v_2 \end{cases} \implies \begin{cases} v_1 = v_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}$, deci o bază este $B_2 = \left\{ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Atunci $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1e^{\lambda_1 t}V_1 + C_2e^{\lambda_2 t}V_2 = C_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^t + C_2e^{3t} \\ -C_1e^t + C_2e^{3t} \end{pmatrix}$. Impunând condiţiile iniţiale, obţinem $\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$, de unde $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Obţinem deci soluţia problemei Cauchy sub forma
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + 2e^{3t} \\ -e^t + e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Metoda transformatei Laplace Prin aplicarea transformatei Laplace fiecăreia dintre cele două ecuaţii ale sistemului obţinem
$$\begin{cases} sX(s) - 3 = 2X(s) + Y(s) \\ sY(s) - 1 = X(s) + 2Y(s) \end{cases} \implies \begin{cases} (s-2)X(s) - Y(s) = 3 \\ -X(s) + (s-2)Y(s) = 1 \end{cases} \implies X(s) = \frac{3s-5}{(s-1)(s-3)}, \quad Y(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-3)}$$

Descompunem acum $X(s)$ şi $Y(s)$ în fracţii simple. Deoarece

$$X(s)=\frac{3s-5}{(s-1)(s-3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-3}\ |\cdot(s-1)\implies\frac{3s-5}{s-3}=A+\frac{B(s-1)}{s-3}\overset{s=1}{\implies}A=1$$
$$X(s)=\frac{3s-5}{(s-1)(s-3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-3}\ |\cdot(s-3)\implies\frac{3s-5}{s-1}=\frac{A(s-3)}{s-1}+B\overset{s=3}{\implies}B=2$$
$$Y(s)=\frac{s+1}{(s-1)(s-3)}=\frac{C}{s-1}+\frac{D}{s-3}\ |\cdot(s-1)\implies\frac{s+1}{s-3}=C+\frac{D(s-1)}{s-3}\overset{s=1}{\implies}C=-1$$
$$Y(s)=\frac{s+1}{(s-1)(s-3)}=\frac{C}{s-1}+\frac{D}{s-3}\ |\cdot(s-3)\implies\frac{s+1}{s-1}=\frac{C(s-3)}{s-1}+D\overset{s=3}{\implies}D=2,$$

urmează că

$$X(s)=\frac{3s-5}{(s-1)(s-3)}=\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s-3},\quad Y(s)=\frac{s+1}{(s-1)(s-3)}=\frac{-1}{s-1}+\frac{2}{s-3}.$$

Cum $\frac{1}{s-1}$ este imaginea lui e^t iar $\frac{1}{s-3}$ este imaginea lui e^{3t}, urmează că

$$x(t)=e^t+2e^{3t},\quad y(t)=-e^t+e^{3t}.$$

Formule de calcul pentru transformate Laplace

$\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}$	$\mathcal{L}[e^{at}]=\frac{1}{s-a}$	$\mathcal{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathcal{L}[t^ne^{at}]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\mathcal{L}[\cos(at)]=\frac{s}{s^2+a^2}$	$\mathcal{L}[\sin(at)]=\frac{a}{s^2+a^2}$	$\mathcal{L}[\mathrm{ch}(at)]=\frac{s}{s^2-a^2}$	$\mathcal{L}[\mathrm{sh}(at)]=\frac{a}{s^2-a^2}$
$\mathcal{L}[x'(t)]=sX(s)-x(0+)$ (derivarea argumentului)	$\mathcal{L}[\int_0^t x(\tau)d\tau]=\frac{X(s)}{s}$ (integrarea argumentului)	$\mathcal{L}[tx(t)]=-\frac{d}{ds}(X(s))$ (derivarea imaginii)	$\mathcal{L}[\frac{x(t)}{t}]=\int_s^\infty X(\tau)d\tau$ (integrarea imaginii)
$\mathcal{L}[e^{at}x(t)]=X(s-a)$ (teorema deplasării)	$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ (produsul de convoluţie)	$\mathcal{L}[(f*g)(t)]=F(s)G(s)$ (imaginea produsului de convoluţie)	$\mathcal{L}[x(kt)]=\frac{1}{k}X(\frac{s}{k})$ (teorema asemănării)
$\mathcal{L}[x^{(n)}(t)]=s^nX(s)-s^{n-1}x(0+)-s^{n-2}x'(0+)-\ldots-x^{(n-1)}(0+)$ (imaginea derivatei de ordinul n a argumentului)			

Aici, $X(s)$ reprezintă transformata Laplace a lui $x(t)$, adică $\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$.

- Pentru aplicarea teoremei deplasării în calculul imaginii $\mathcal{L}[e^{at}x(t)]$, se calculează mai întâi transformata Laplace a funcţiei obţinute după eliminarea exponenţialei, iar apoi se înlocuieşte s cu $s-a$.
- Pentru aplicarea teoremei asemănării în calculul imaginii $\mathcal{L}[x(kt)]$, se elimină mai întâi coeficientul de asemănare k şi se calculează transformata Laplace a funcţiei rămase. Se împart la k atât rezultatul obţinut (adică se înmulţeşte cu $\frac{1}{k}$) cât şi argumentul s (adică se înlocuieşte s cu $\frac{s}{k}$).
- Pentru aplicarea teoremei derivării imaginii în calculul imaginii $\mathcal{L}[tx(t)]$, se calculează mai întâi transformata Laplace a funcţiei obţinute după eliminarea lui t, se derivează rezultatul obţinut, căruia i se schimbă apoi semnul.

Precizaţi transformatele Laplace ale funcţiilor

a)$f(t)=2t^3-4\sin 3t$ b)$f(t)=e^{2t}\sin 3t$ c)$f(t)=3t^3e^{4t}+2\,\mathrm{ch}\,5t$ d)$f(t)=t\cos 6t$ e)$f(t)=\int_0^t \sin 2(t-\tau)\cos 3\tau d\tau$.

a) Utilizând proprietatea de liniaritate a transformatei Laplace obţinem

$$\mathcal{L}[2t^3-4\sin 3t]=2\mathcal{L}[t^3]-4\mathcal{L}[\sin 3t]=2\frac{3!}{s^4}-4\frac{3}{s^2+3^2}=12\left(\frac{1}{s^4}-\frac{1}{s^2+9}\right).$$

b) Conform teoremei deplasării, $\mathcal{L}[e^{2t}\sin 3t]=X(s-2)$, unde $X(s)$ este transformata Laplace a lui $\sin 3t$ (funcţia obţinută după eliminarea exponenţialei). Deoarece $X(s)=\mathcal{L}[\sin 3t]=\frac{3}{s^2+3^2}$, înlocuindu-se s cu $s-2$ urmează că $X(s-2)=\frac{3}{(s-2)^2+3^2}$, deci

$$\mathcal{L}[e^{2t}\sin 3t]=\frac{3}{(s-2)^2+3^2}.$$

c) Utilizând proprietatea de liniaritate a transformatei Laplace obţinem

$$\mathcal{L}[3t^3e^{4t} + 2\operatorname{ch} 5t] = 3\mathcal{L}[t^3e^{4t}] + 2\mathcal{L}[\operatorname{ch} 5t].$$

Conform teoremei deplasării, $\mathcal{L}[t^3e^{4t}] = X(s-4)$, unde $X(s)$ este transformata Laplace a lui t^3 (funcţia obţinută după eliminarea exponenţialei). Deoarece $X(s) = \mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{s^4}$, înlocuindu-se s cu $s-4$ urmează că $X(s-4) = \frac{3!}{(s-4)^4}$, iar

$$\mathcal{L}[3t^3e^{4t} + 2\operatorname{ch} 5t] = 3\frac{3!}{(s-4)^4} + 2\frac{s}{s^2-5^2} = \frac{18}{(s-4)^4} + \frac{2s}{s^2-5^2}.$$

d) Conform formulei de derivare a imaginii, $\mathcal{L}[t\cos 6t] = -\frac{d}{ds}(X(s))$, unde $X(s)$ este transformata Laplace a lui $\cos 6t$ (funcţia obţinută după eliminarea lui t). Deoarece $X(s) = \frac{6}{s^2+6^2}$, urmează că

$$\mathcal{L}[t\cos 6t] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+6^2}\right) = -\frac{-s^2+4}{(s^2+6^2)^2} = \frac{s^2-4}{(s^2+6^2)^2}.$$

e) Observăm mai întâi că $\int_0^t \sin 2(t-\tau)\cos 3\tau d\tau = (\sin 2t) * (\cos 3t)$. Din formula imaginii produsului de convoluţie, obţinem că

$$\mathcal{L}[\int_0^t \sin 2(t-\tau)\cos 3\tau d\tau] = \mathcal{L}[(\sin 2t) * (\cos 3t)] = \mathcal{L}[\sin 2t]\mathcal{L}[\cos 3t] = \frac{2}{s^2+2^2}\frac{s}{s^2+3^2} = \frac{2s}{(s^2+2^2)(s^2+3^2)}.$$

Cărui original îi corespunde imaginea $\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$?

Descompunem $\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$ în fracţii simple, sub forma $\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$. Prin identificarea coeficienţilor, se obţine $A = C = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, adică

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}.$$

Cum $\frac{1}{s+1}$ este imaginea lui e^{-t}, $\frac{s}{s^2+1}$ este imaginea lui $\cos t$, iar $\frac{1}{s^2+1}$ este imaginea lui $\sin t$, urmează că originalul căutat este $\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$.

Rezolvaţi ecuaţia $x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 2e^{3t}$ cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 2 \\ x'(0) = 3 \end{cases}$.

Aplicând transformata Laplace în ambii membri ai ecuaţiei împreună cu formula imaginii derivatei de ordinul n a argumentului, obţinem

$$s^2X(s) - sx(0+) - x'(0+) - 5(sX(s) - x(0+)) + 4X(s) = 2\frac{1}{s-3}.$$

Cum soluţia ecuaţiei este o funcţie de două ori derivabilă cu derivata de ordinul al doilea continuă, $x(0+) = x(0)$ şi $x'(0+) = x'(0)$, de unde

$$(s^2-5s+4)X(s) - 2s + 7 = 2\frac{1}{s-3} \implies (s^2-5s+4)X(s) = 2s - 7 + 2\frac{1}{s-3}.$$

Această din urmă egalitate, numită şi ecuaţia operatorială, putea fi obţinută şi în următorul fel: $X(s)$ se înmulţeşte cu polinomul caracteristic P, dar în variabila s în loc de λ. Astfel se obţine membrul stâng al ecuaţiei operatoriale.

Prin eliminarea termenului liber al lui P şi împarţirea cu s se obţine polinomul P_0, care se înmulţeste cu data iniţiala pentru $x(0)$. Prin eliminarea termenului liber al lui P_0 şi împarţirea cu s se obţine polinomul P_1, care se înmulţeste cu data iniţiala pentru $x'(0)$. In cazul unei ecuaţii de ordinul n sunt necesare polinoamele P_0, P_1,... P_{n-1}, în număr de n, egal cu gradul ecuaţiei. Fiecare polinom se înmulţeşte apoi cu data iniţială pentru derivata de ordinul corespunzător a soluţiei, adunându-se rezultatele. La rezultatul final se adaugă transformata Laplace a membrului drept iniţial. Astfel se obţine membrul drept al ecuaţiei operatoriale.

În cazul de faţă, $P(s) = s^2 - 5s + 4$, $P_0(s) = \dfrac{s^2 - 5s}{s} = s - 5$, $P_1 = \dfrac{s}{s} = 1$, iar imaginea membrului drept este $\mathcal{L}[2e^{3t}] = \dfrac{2}{s-3}$. Ecuaţia operatorială este atunci

$$(s^2 - 5s + 4)X(s) = (s-5)\cdot 2 + 1\cdot 3 + \frac{2}{s-3} \implies (s^2 - 5s + 4)X(s) = 2s - 7 + \frac{2}{s-3} \implies X(s) = \frac{2s - 7 + \frac{2}{s-3}}{(s-1)(s-4)}$$
$$\implies X(s) = \frac{(2s-7)(s-3)+2}{(s-1)(s-3)(s-4)}.$$

Descompunem $X(s)$ în fracţii simple, sub forma $X(s) = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s-3} + \dfrac{C}{s-4}$. Obţinem că $A = 2$, $B = -1$, $C = 1$, de unde

$$X(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-3} + \frac{1}{s-4}.$$

Cum $\dfrac{1}{s-1}$ este imaginea lui e^t, $\dfrac{1}{s-3}$ este imaginea lui e^{3t} iar $\dfrac{1}{s-4}$ este imaginea lui e^{4t}, obţinem că

$$x(t) = 2e^t - e^{3t} + e^{4t}.$$

Dacă f este în aşa fel încât $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{(s+3)^2(s-5)}$, calculaţi $\mathcal{L}[e^{-3t}f(4t)]$.

Conform teoremei deplasării, $\mathcal{L}[e^{-3t}f(4t)] = F(s+3)$, unde $F(s)$ este transformata Laplace a lui $f(4t)$ (funcţia obţinută după eliminarea exponenţialei). Deoarece $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{(s+3)^2(s-5)}$, urmează conform teoremei asemănării că $\mathcal{L}[f(4t)] = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(\frac{s}{4}+3)^2(\frac{s}{4}-5)}$ (se împart cu 4, coeficientul de asemănare, atât imaginea cât şi argumentul s, adică se înmulţeşte cu $\dfrac{1}{4}$ şi înlocuieşte s cu $\dfrac{s}{4}$). De aici, $\mathcal{L}[f(4t)] = \dfrac{16}{(s+12)^2(s-20)}$, iar $\mathcal{L}[e^{-3t}f(4t)] = \dfrac{16}{(s+15)^2(s-17)}$.

Dacă f este în aşa fel încât $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{s+3}{s^2+4}$, calculaţi $\mathcal{L}[tf(t)]$.

Conform teoremei derivării imaginii,

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[f(t)]\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s+3}{s^2+4}\right) = -\frac{-s^2-6s+4}{(s^2+4)^2} = \frac{s^2+6s-4}{(s^2+4)^2}.$$

Rezolvaţi cu ajutorul metodei transformatei Laplace ecuaţia $x(t) = 2 + \displaystyle\int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau$.

Observăm că ecuaţia dată se poate scrie sub forma $x(t) = 2 + t * x(t)$. Aplicând transformata Laplace în ambii membri, obţinem că

$$X(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}X(s) \implies X(s)\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s} \implies X(s) = \frac{2s}{s^2-1} = \frac{2s}{(s-1)(s+1)}.$$

Descompunem $X(s)$ în fracţii simple, sub forma $X(s) = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s+1}$. Obţinem că $A = 1$, $B = 1$, de unde

$$X(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}.$$

Cum $\dfrac{1}{s-1}$ este imaginea lui e^t, iar $\dfrac{1}{s+1}$ este imaginea lui e^{-t}, urmează că $x(t) = e^t + e^{-t}$.

Rezolvaţi sistemul simetric $\dfrac{dx}{x(y-z)} = \dfrac{dy}{y(z-x)} = \dfrac{dz}{z(x-y)}$.

Vom determina $3 - 1 = 2$ integrale prime. Deoarece (*) $\dfrac{dx}{xy-xz} = \dfrac{dy}{yz-yx} = \dfrac{dz}{zx-zy}$, adunând primele două rapoarte obţinem $\dfrac{d(x+y)}{z(y-x)} = \dfrac{dz}{z(x-y)}$, deci $d(x+y) = -dz$, sau $d(x+y+z) = 0$. Urmează că $x+y+z = C_1$.

Altfel, putem observa că adunând primele două rapoarte din (*) la cel de-al treilea obţinem numitorul 0. Numărătorul corespunzător trebuie să fie de asemenea 0, de unde $dx + dy + dz = 0$, adică $d(x+y+z) = 0$, sau $x+y+z = C_1$.

Deoarece $\frac{\frac{dx}{x}}{y-z} = \frac{\frac{dy}{y}}{z-x} = \frac{\frac{dz}{z}}{x-y}$, sau (**) $\frac{d(\ln x)}{y-z} = \frac{d(\ln y)}{z-x} = \frac{d(\ln z)}{x-y}$, adunând primele două rapoarte obţinem $\frac{d(\ln(xy))}{y-x} = \frac{d(\ln z)}{x-y}$, deci $d(\ln(xy)) = -d(\ln z)$, sau $d(\ln(xyz)) = 0$. Urmează că $xyz = C_2$. Soluţia sistemului este deci $\begin{cases} x+y+z = C_1 \\ xyz = C_2 \end{cases}$.

Din nou, putem observa că adunând primele două rapoarte din (**) la cel de-al treilea obţinem numitorul 0. Numărătorul corespunzător trebuie să fie de asemenea 0, de unde $d(\ln x) + d(\ln y) + d(\ln z) = 0$, adică $d(\ln x + \ln y + \ln z) = 0$, sau $xyz = C_2$.

Determinaţi soluţia problemei Cauchy $\begin{cases} (1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + xy\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \\ u(0,y) = y^2 \end{cases}$

Sistemul simetric asociat este $\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{xy}$. Este necesară o singură integrală primă. Pentru determinarea ei, scriem egalitatea de mai sus, separând variabilele, sub forma $\frac{xdx}{1+x^2} = \frac{dy}{y}$, de unde $\frac{1}{2}d(\ln(1+x^2)) = d(\ln y)$, sau $d(\ln(1+x^2)) = 2d(\ln y) = d(\ln y^2)$. De aici, $d\left(\ln\frac{1+x^2}{y^2}\right) = 0$. Urmează că relaţia de utilizat este $\frac{1+x^2}{y^2} = C$. Pentru $x = 0$, obţinem că $\frac{1}{y^2} = C$, sau $y^2 = \frac{1}{C}$. Combinând cu data iniţială, obţinem $u = \frac{1}{C}$ (relaţie valabilă doar pentru $x = 0$). Pentru a obţine expresia lui u valabilă şi pentru celelalte valori ale lui x, înlocuim $C = \frac{1+x^2}{y^2}$, de unde $u(x,y) = \frac{y^2}{1+x^2}$.

Determinaţi soluţia problemei Cauchy $\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x - y \\ u(1,y) = 1 + y^2 \end{cases}$

Sistemul simetric asociat este $(*)\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{du}{x-y}$. Sunt necesare două integrale prime.

Deoarece $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$, urmează că $d(\ln x) = -d(\ln y)$, deci $d(\ln x) + d(\ln y) = 0$, adică $d(\ln(xy)) = 0$, sau $xy = C_1$. Scăzând primele două din al treilea, obţinem numitorul 0, de unde şi numărătorul corespunzător este 0. Urmează că $-dx - dy + du = 0$, de unde $u - x - y = C_2$.

Determinăm acum relaţia între C_1 şi C_2. Pentru $x = 1$, obţinem că $y = C_1$, respectiv $(1+y^2) - 1 - y = C_2$, adică $y^2 - y = C_2$. Urmează că relaţia între constante este $C_1^2 - C_1 = C_2$. Inlocuind C_1 şi C_2 cu membrii stângi corespunzători ai integralelor prime, obţinem $(xy)^2 - xy = u - x - y$, de unde soluţia problemei Cauchy este $u = u(x,y) = x^2y^2 - xy + x + y$.

Determinaţi suprafaţa integrală a ecuaţiei $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = -xy$ care conţine curba $\begin{cases} y = x^3 \\ z = x^2 \end{cases}$.

Sistemul simetric asociat este $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$. Sunt necesare $3 - 1 = 2$ integrale prime. Deoarece $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$, urmează că $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, ceea ce conduce la $\frac{y}{x} = C_1$. Amplificăm primul raport cu y, al doilea cu x şi al treilea cu z. Obţinem că $\frac{ydx}{xyz} = \frac{xdy}{xyz} = \frac{zdz}{-xyz}$, deci $ydx = xdy = -zdz$. De aici, $xdy + ydx = -2zdz$, deci $d(xy) = -d(z^2)$, iar $d(xy + z^2) = 0$, ceea ce conduce la $xy + z^2 = C_2$. Determinăm acum relaţia între C_1 şi C_2. Formăm sistemul $\begin{cases} \frac{y}{x} = C_1 \\ xy + z^2 = C_2 \\ y = x^3 \\ z = x^2 \end{cases}$. De aici, $\begin{cases} x^2 = C_1 \\ 2x^4 = C_2 \end{cases}$, deci $C_2 = 2C_1^2$. Înlocuind C_1, C_2 cu membrii stângi corespunzători ai integralelor prime, obţinem $xy + z^2 = 2\left(\frac{y}{x}\right)^2$.