SUBIECT I

1. Rezolvaţi ecuaţia cu variabile separabile $x'(t) - tx(t) = x(t)$, $t \geq 0$, cu condiţia iniţială $x(0) = 2$.

2. Rezolvaţi ecuaţia liniară $x'(t) = -2x(t) + e^{-2t}$, $t \geq 0$, cu condiţia iniţială $x(0) = 1$.

3. (a) Determinaţi vectorii proprii şi valorile proprii ale matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 6 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

4. (a) Demonstraţi că $\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$.

   (b) Calculaţi $\mathcal{L}\left(3t \sin 2t + e^{3t}\frac{\sin t}{t} + \int_0^t \operatorname{ch} 2(t-\tau) \operatorname{sh}(3\tau) d\tau\right)$.

SUBIECT II

1. Rezolvaţi ecuaţia cu variabile separabile $x'(t) - te^{x(t)} = e^{x(t)}$, $t \geq 0$, cu condiţia iniţială $x(0) = 1$.

2. Rezolvaţi ecuaţia $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{3t}$, $t \geq 0$, cu condiţiile iniţiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.

3. (a) Determinaţi vectorii proprii şi valorile proprii ale matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

4. Rezolvaţi cu ajutorul metodei transformatei Laplace ecuaţia

$$x'(t) = \int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau, \text{ cu condiţia iniţială } x(0) = 1.$$

SUBIECT III

1. Rezolvaţi ecuaţia $x''(t) = e^t$, $t \geq 0$, cu condiţiile iniţiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

2. Rezolvaţi ecuaţia cu diferenţială exactă $(3t^2 + 6tx^2)dt + (6t^2x + 4x^3)dx = 0$.

3. (a) Determinaţi vectorii proprii şi valorile proprii ale matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

   (b) Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t) \end{cases}$ cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

4. (a) Dacă f este în aşa fel încât $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{(s+2)^2(s-3)}$, calculaţi $\mathcal{L}(e^{3t}f(2t))$ folosind teorema omotetiei şi teorema întârzierii imaginii.

   (b) Dacă g este în aşa fel încât $\mathcal{L}(g(t)) = \frac{s+1}{s^2+4}$, calculaţi $\mathcal{L}(tg(t))$.