Curs 1

Mulţimi. Funcţii. $\mathbb{R}$ şi $\overline{\mathbb{R}}$. Numere cardinale

1.1 Mulţimi

Noţiunea de mulţime este una fundamentală, adică nu se defineşte (ca şi punctul sau dreapta în geometrie). Acceptăm totuşi că o mulţime este o colecţie de obiecte diferite, pe care le vom numi elemente. De obicei, mulţimile vor fi notate cu litere mari iar elementele mulţimilor cu litere mici.

Dacă A este o mulţime, atunci vom nota prin $x \in A$ faptul că x este element al mulţimii A, iar prin $x \notin A$ vom marca faptul că x nu este element al lui A. Numim **mulţime vidă**, notată $\emptyset$, mulţimea care nu conţine niciun element.

Fie A şi B două mulţimi. Dacă orice element al mulţimii A este şi element al mulţimii B vom spune că A este o **submulţime** a lui B sau că B este o **supramulţime** a lui A. sau că A este inclusă în B şi vom nota acest lucru prin $A \subset B$ sau $B \supset A$. În caz contrar A **nu este submulţime** a lui B şi vom nota acest lucru prin $A \not\subset B$ sau $B \not\supset A$.

Spunem despre două mulţimi că sunt **egale** dacă au aceleaşi elemente. Notăm acest lucru prin $A = B$ şi observăm imediat că $A = B$ dacă şi numai dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$. Dacă A şi B nu sunt egale vom scrie $A \neq B$.

Pe parcurs vom folosi submulţimi ale mulţimii numerelor reale:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ - mulţimea numerelor naturale
- $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ - mulţimea numerelor întregi
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ - mulţimea numerelor raţionale
- $\mathbb{R}$ - mulţimea numerelor reale
- $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$ reprezintă mulţimile respective din care se elimină elementul 0.

Fiind dată o mulţime oarecare X, vom nota prin $\mathcal{P}(X)$ familia tuturor submulţimilor lui X, adică $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$. Pentru două submulţimi A şi B ale X definim următoarele mulţimi:

1. $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ numită **reuniunea** mulţimilor A şi B;
2. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$ numită **intersecţia** mulţimilor A şi B;
3. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$ numită **diferenţa** mulţimilor A şi B;

4. $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ numită **diferenţa simetrică** a mulţimilor A şi B;
5. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ şi $b \in B\}$ numită **produsul cartezian** al mulţimilor A şi B;
6. $cA = X \setminus A$ numită **complementara** mulţimii A.

Reuniunea şi intersecţia pot fi extinse la familii oarecare de mulţimi. Astfel, dacă I este o mulţime de indici şi $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de părţi ale unei mulţimi arbitrare X, numim **reuniunea** familiei $(A_i)_{i\in I}$ mulţimea

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I \text{ astfel încât } x \in A_i\}.$$

Numim **intersecţia** familiei $(A_i)_{i\in I}$ mulţimea

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid x \in A_i,\ \forall i \in I\}$$

Dacă $I = \{1, 2, ..., n\}$ sau $I = \mathbb{N}$, atunci vom scrie în loc de $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ (respectiv $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ sau $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ (respectiv $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ sau $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$), după caz.

Exerciţiul 1.1 Să se arate că au loc **legile lui de Morgan**:

$$c\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} cA_i,$$
$$c\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} cA_i$$

Soluţie. Avem

$$x \in c\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x \notin A_i,\ \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} cA_i.$$

Cealaltă relaţie se arată analog. □

1.2 Funcţii

Definiţia 1.2.1 *O submulţime a produsului cartezian $X \times Y$ se numeşte **funcţie** sau **relaţie funcţională** de la X la Y, notată $f : X \to Y$, dacă pentru orice $x \in X$ există un singur $y \in Y$ aşa încât $(x, y) \in f$.*

În locul termenului de funcţie mai sunt folosiţi şi termenii de **aplicaţie**, **transformare**, **operator**. Mulţimile X şi Y poartă numele de **domeniu de definiţie**, respectiv **domeniu de valori** pentru funcţia f. Dacă $(x, y) \in f$ vom spune că y este **valoarea lui** f **în** x şi vom nota aceasta prin $f(x) = y$. Din definiţie remarcăm că dacă $f(x) = y_1$ şi $f(x) = y_2$, atunci $y_1 = y_2$. Altfel spus, o funcţie nu poate lua două valori distincte într-un acelaşi punct.

Dacă $f : X \to Y$ este o funcţie, A este o submulţime a lui X, mulţimea

$$f(A) := \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$$

se numeşte **imaginea lui** A **prin funcţia** f, iar dacă B este o submulţime a lui Y, mulţimea

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

se numeşte **imaginea reciprocă** sau **contraimaginea** mulţimii B prin funcţia f.

Definiţia 1.2.2 *Fie $f : X \to Y$ o funcţie.*

(i) Spunem că f este o ***injecţie*** *sau că este* ***funcţie injectivă*** *dacă pentru orice $x_1, x_2 \in X$ cu $x_1 \neq x_2$ avem $f(x_1) \neq f(x_2)$ sau, echivalent,*

$$(x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

(ii) Spunem că f este o ***surjecţie*** *sau că este o* ***funcţie surjectivă*** *dacă pentru orice $y \in Y$ există $x \in X$ astfel încât $f(x) = y$ sau, echivalent,*

$$f(X) = Y.$$

(iii) Spunem că funcţia f este o ***bijecţie*** *sau că este* ***funcţie bijectivă*** *dacă este, simultan, injectivă şi surjectivă.*

Observaţia 1.2.3 *Pentru o funcţie $f : X \to Y$, relaţia $f^{-1} : Y \to X$ dată prin $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$ nu este, în general, o funcţie. Se observă că f^{-1} este o funcţie dacă şi numai dacă f este o bijecţie. În această situaţie şi f^{-1} este o funcţie bijectivă.*

Definiţia 1.2.4 *Dacă f este o funcţie de la X la Y, iar g este o funcţie de la Y la Z,* ***compunerea*** *funcţiilor g şi f, notată $g \circ f$, este aplicaţia de la X la Z dată prin*

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad \forall x \in X.$$

Se verifică imediat asociativitatea compunerii funcţiilor: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ Este evident că această operaţie nu este comutativă: în general, $f \circ g \neq g \circ f$.

Dată o mulţime nevidă X, vom vota prin Id_X **aplicaţia identică**, i.e. $\mathrm{Id}_X : X \to X$, $\mathrm{Id}_X(x) := x$, $\forall x \in X$.

1.3 Mulţimea numerelor reale

Definim mulţimea $\mathbb{R}$ axiomatic, unele din axiome sunt de fapt proprietăţi ale mulţimilor $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ceea ce face ca prin această definiţie să se regăsească în mulţimea $\mathbb{R}$ proprietăţile mulţimilor anterioare.

1.3.1 Structura algebrică a numerelor reale

În definirea axiomatică a mulţimii $\mathbb{R}$ vom cere ca această mulţime să verifice un sistem de axiome împărţit în cinci grupe.

1. Axiomele operaţiei de adunare

Pe $\mathbb{R}$ definim o lege internă notată " $+$ ", numită **adunare**:

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow x + y \in \mathbb{R}$.

În acest fel fiecărei perechi ordonate de elemente $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i se ataşează un singur element $x + y \in \mathbb{R}$, astfel încât sunt satisfăcute proprietăţile:

GA_1 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + (y + z) = (x + y) + z$, *proprietatea de asociativitate,*

GA_2 $\exists! 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$, *proprietatea de existenţa elementului neutru,* 0 *este element neutru,*

GA_3 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R} : x + (-x) = (-x) + x = 0$, *proprietatea de existenţa elementului opus,*

GA_4 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = y + x$, *proprietatea de comutativitate.*

Rezultă că $(\mathbb{R}, +)$ este grup abelian.

Observaţia 1.3.1 *Elementul $x + (-y)$ îl vom nota cu $x - y$ şi îl vom numi diferenţa dintre x şi y.*

2. Axiomele operaţiei de înmulţire

Introducem încă o lege internă notată " $\cdot$ " numită **înmulţire**:

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow x \cdot y \in \mathbb{R}$.

În acest fel fiecărei perechi ordonate de elemente $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i se ataşează un singur element $x \cdot y \in \mathbb{R}$, pentru care vom folosi şi notaţia xy, astfel încât sunt satisfăcute proprietăţile:

GM_1 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, *proprietatea de asociativitate,*

GM_2 $\exists ! 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = 1x = x$, *proprietatea de existenţa elementului unitate,* 1 este *element unitate*

GM_3 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$, *proprietatea de existenţa elementului invers,*

GM_4 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = y \cdot x$, *proprietatea de comutativitate.*

Rezultă că $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ este grup abelian.

Observaţia 1.3.2 *Inversul x^{-1} al elementului $x \neq 0$ se mai notează $\frac{1}{x}$. Produsul $x \cdot \frac{1}{y}$ dintre un număr x şi inversul unui număr $y \neq 0$ se mai scrie $\frac{x}{y}$ şi se numeşte* ***câtul*** *dintre x şi y. Împărţirea cu 0 nu se poate efectua, deoarece 0 nu are invers. Nu dăm niciun înţeles împărţirii cu 0, nu o definim. Spunem că împărţirea cu 0 este o operaţie fără sens.*

3. Axioma distributivităţii

AD $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ proprietatea de *distributivitate a înmulţirii faţă de adunare.*

Mulţimea $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ale cărei elemente satisfac $GA_1 - GA_4$, $GM_1 - GM_4$ şi AD este **corp comutativ** numit corpul comutativ al numerelor reale. Axioma AD asigură compatibilitatea între între operaţiile de adunare şi de înmulţire. Aceste axiome concentrează toate disponibilităţile de calcul în $\mathbb{R}$.

Rezultă următoarele proprietăţi:

P_1 $x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

P_2 $(-1) \cdot x = -x, \forall x \in \mathbb{R}$,

P_3 $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

P_4 $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$.

Axiomele de mai sus nu-l determină pe $\mathbb{R}$, deoarece şi mulţimea $\mathbb{Q}$ le verifică.

4. Axiomele de ordine

Definiţia 1.3.3 *Spunem că $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un* ***corp comutativ total ordonat*** *dacă dacă între elementele sale este definită o relaţie notată cu " $\leq$ " astfel încât sunt îndeplinite relaţiile:*

O_1 $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$ *(proprietatea de reflexivitate),*

O_2 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ *(proprietatea de tranzitivitate),*

O_3 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$, *(proprietatea de antisimetrie),*

O_4 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, *avem $x \leq y$ sau $y \leq x$, (proprietatea de totală ordonare),*

O_5 $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \le y \Rightarrow x+z \le y+z$, *(proprietatea de compatibilitate a relaţiei de ordine cu adunarea),*

O_6 $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \le y$ *şi* $0 \le z \Rightarrow xz \le yz$, *(proprietatea de compatibilitate a relaţiei de ordine cu înmulţirea).*

Dacă $x \le y$ iar $x \neq y$, vom folosi notaţia $x < y$.

Evidenţiem **proprietăţile**:

P_5 dacă $0 < x \le y$ atunci $\frac{1}{y} \le \frac{1}{x}$,

P_6 dacă $x \le y$ atunci $-y \le -x$,

P_7 $0 \le x^2$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$,

P_8 dacă $x^2 + y^2 = 0$ atunci $x = 0, y = 0$.

Deoarece şi $\mathbb{Q}$ verifică toate axiomele enunţate mai sus, rezultă că ele sunt insuficiente pentru a-l determina pe $\mathbb{R}$ şi de aceea este necesară introducerea unor noi axiome. Pentru aceasta este necesar să introducem unele noţiuni noi.

Intervale

Fie a şi b două numere reale astfel încât $a < b$. Definim următoarele mulţimi:

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, numit **interval deschis**;

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$, numit **interval închis**;

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$, numit **interval deschis în** a**, închis în** b;

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$, numit **interval închis în** a**, deschis în** b.

Spunem despre intervalele definite mai sus că sunt **intervale mărginite**. De asemenea, definim şi următoarele tipuri de **intervale nemărginite**:

$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$;

$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$;

$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;

$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$;

$(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$.

Se remarcă faptul că o mulţime de numere reale este interval dacă odată cu două elemente distincte ale sale conţine şi orice număr real situat între acestea.

Mulţimi majorate/minorate. Supremum/infimum.

Definiţia 1.3.4 *Fie A o mulţime de numere reale.*

1. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ aşa încât $x \le \alpha$ pentru orice $x \in A$, vom spune despre mulţimea A că este ***mărginită superior****, iar despre α că este un* ***majorant*** *pentru A. În caz contrar, spunem despre mulţimea A că este* ***nemărginită superior****.*

2. Dacă există $\beta \in \mathbb{R}$ aşa încât $\beta \le x$ pentru orice $x \in A$ vom spune despre mulţimea A că este ***mărginită inferior****, iar despre β că este un* ***minorant*** *pentru A. În caz contrar, spunem despre mulţimea A că este* ***nemărginită inferior****.*

3. Dacă pentru A există şi majoranţi şi minoranţi, spunem că A este o ***mulţime mărginită****.*

Exemplul 1.3.5 1. $\mathbb{N}$ este o mulţime mărginită inferior de orice număr negativ, dar este nemărginită superior.

2. $\mathbb{Z}$ este nemărginită, atât inferior cât şi superior.

3. Pentru intervalul $I = [a, b)$ observăm că orice număr real cel puţin egal cu b este un majorant în vreme ce orice număr cel mult egal cu a este un minorant, deci I este o mulţime mărginită. Observăm de asemenea că putem da exemple de mulţimi pentru care un majorant (minorant) este un element al mulţimii. Remarcăm totuşi că există şi mulţimi care nu conţin nici majoranţi, nici minoranţi ca elemente ale mulţimii: intervalele deschise (a, b).

4. Pentru mulţimea $A = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, numărul 1 este un majorant, iar 0 este un minorant.

Definiţia 1.3.6 *Fie $A \subset \mathbb{R}$.*

Spunem despre un număr real M că este ***marginea superioară*** *a mulţimii A, sau* ***supremum*** *al mulţimii A, şi notăm $M = \sup A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) M este un majorant al mulţimii A :

$$a \leq M, \ \forall a \in A;$$

(ii) M este mai mic decât orice alt majorant al mulţimii A :

$$(a \leq M', \forall a \in A) \Rightarrow M \leq M'.$$

Definiţia 1.3.7 *Spunem despre un număr real m că este* ***marginea inferioară*** *a mulţimii A, sau* ***infimum*** *al mulţimii A, şi notăm $m = \inf A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) m este un minorant al mulţimii A :

$$m \leq a, \ \forall a \in A;$$

(ii) m este mai mare decât orice alt minorant al mulţimii A :

$$(m' \leq a, \forall a \in A) \Rightarrow m' \leq m.$$

Următoarele rezultate caracterizează marginea superioară, respectiv marginea inferioară a unei mulţimi de numere reale.

Teorema 1.3.8 *Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă şi $M \in \mathbb{R}$. Atunci $M = \sup A$ dacă şi numai dacă:*

(i) $a \leq M$, $\forall a \in A$ şi

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un element $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Demonstraţie. Fie $M = \sup A$. Conform definiţiei, este un majorant, deci prima condiţie este îndeplinită.

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece $M - \varepsilon < M$, $M - \varepsilon$ nu este un majorant pentru A. Deci, relaţia $a \leq M - \varepsilon$ nu are loc pentru orice $a \in A$ şi, astfel, există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Reciproc, dacă $M \in \mathbb{R}$ îndeplineşte condiţiile din enunţ, observăm în primul rând că este un majorant al mulţimii A (condiţia (i)). Fie acum un alt majorant, M', al mulţimii A şi să presupunem că $M' < M$. Notăm cu $\varepsilon := \frac{M-M'}{2}$. Din (ii), rezultă că există $x_\varepsilon \in A$ aşa încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$, adică $\frac{M+M'}{2} < x_\varepsilon$. Dar $M < \frac{M+M'}{2}$ şi atunci $M < x_\varepsilon$, ceea ce contrazice condiţia (i). Deci, presupunerea făcută este falsă şi atunci $M \leq M'$, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Observaţia 1.3.9 *Conform acestei teoreme, dacă* $M = \sup A$*, pentru orice număr natural nenul* n *există* $x_n \in A$ *astfel încât* $0 < M - x_n < \frac{1}{n}$.

În mod analog se poate demonstra următorul rezultat, care caracterizează marginea inferioară a unei mulţimi:

Teorema 1.3.10 *Fie* $A \subset \mathbb{R}$*, nevidă şi* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Atunci* $m = \inf A$ *dacă şi numai dacă:*
(i) $m \leq a$, $\forall a \in A$ *şi*
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$*, există un element* $x_\varepsilon \in A$ *astfel încât* $x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Exemplul 1.3.11 Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, atunci $\sup(a, b) = b$, $\inf(a, b] = a$ etc.

Teorema 1.3.12 *Există numere iraţionale.*

Demonstraţie. Arătăm că numărul $\sqrt{2}$, care există conform teoremei precedente, este irational. Dacă ar fi raţional, ar exista două numere naturale p şi q, care se pot presupune prime între ele, încât $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, p şi q prime între ele; de aici rezultă că $2q^2 = p^2 \Rightarrow 2/p \Rightarrow p = 2p' \Rightarrow q^2 = 2p'^2 \Rightarrow 2/q$ adică p şi q ar avea factor comun pe 2. □

Exemplul 1.3.13 Dacă $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q^2 \leq 2\}$ atunci $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ iar $\inf A = 0$. Deşi $\mathbb{Q}$ este un corp total ordonat, el nu este complet în sensul precizat de următoarea axiomă.

5. Axioma de completitudine (Cantor - Dedekind). Orice submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$ care este majorată admite cel puţin o margine superioară în $\mathbb{R}$, adică există $\sup A \in \mathbb{R}$.

Propoziţia 1.3.14 *Dacă* A *şi* B *sunt submulţimi nevide ale lui* $\mathbb{R}$ *astfel încât* $A \subset B$ *iar* B *este majorată, atunci* $\sup A \leq \sup B$.

Demonstraţie. Deoarece $A \subset B$ iar B este majorată rezultă că şi A este majorată. Conform axiomei de completitudine, există $\sup A$ şi $\sup B$ în $\mathbb{R}$. Să notăm $\sup A$ cu α iar $\sup B$ cu β şi să presupunem prin reducere la absurd că $\alpha > \beta$. Conform Teoremei 1.3.8, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un element $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$. Alegem $\varepsilon := \alpha - \beta$. Există, deci, $x_\varepsilon \in A \subset B$ astfel încât $\alpha - (\alpha - \beta) < x_\varepsilon$, adică $\beta < x_\varepsilon$. Dar acest lucru contrazice faptul că $\beta = \sup B$. □

Propoziţia 1.3.15 *Dacă* A *este o submulţime nevidă, majorată a lui* $\mathbb{R}$*, atunci mulţimea* $-A := \{-x \mid x \in A\}$ *este minorată şi* $\inf(-A) = -\sup A$.

Demonstraţie. Mulţimea A fiind majorată, există $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$. Atunci, $x \leq \alpha$ pentru orice $x \in A$, de unde avem $-x \geq -\alpha$.

Din $x \leq \alpha$ pentru orice $x \in A$ rezultă că $-\alpha \leq -x$ pentru orice $x \in A$, deci $-\alpha$ este un minorant pentru $-A$.

Fie acum $\varepsilon > 0$. Conform Teoremei 1.3.8, există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$. Dar atunci $-x_\varepsilon \in -A$ şi $(-\alpha) + \varepsilon > (-x_\varepsilon)$. Aplicăm acum Teorema 1.3.10 pentru a concluziona că $\inf(-A) = -\alpha = -\sup A$. □

Următoarele rezultate se deduc analog.

Propoziţia 1.3.16 *Orice submulţime nevidă, minorată a lui* $\mathbb{R}$ *admite margine inferioară în* $\mathbb{R}$.

Propoziţia 1.3.17 *Dacă A şi B sunt submulţimi nevide ale lui $\mathbb{R}$ astfel încât $A \subset B$ iar B este mărginită, atunci A este mărginită şi*

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Teorema 1.3.18 (Proprietatea lui Arhimede) *Dacă x şi y sunt numere reale strict pozitive, atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $nx > y$.*

Demonstraţie. Presupunem că are loc contrariul: pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $nx \leq y$. Atunci, mulţimea $A := \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ este majorată de y şi deci, conform axiomei de completitudine, are margine superioară în $\mathbb{R}$. Fie $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$. Pentru $\varepsilon := x > 0$, există un element de forma $kx \in A$ astfel încât $\alpha - \varepsilon < kx$ sau, echivalent, $\alpha < kx + x = (k+1)x$. Dar $(k+1)x \in A$ şi astfel relaţia $\alpha < (k+1)x$ contrazice faptul că α este marginea superioară a lui A. Presupunerea făcută este deci falsă şi există $n \in \mathbb{N}$ cu $nx > y$. $\square$

Observaţia 1.3.19 *1. Aplicând Proprietatea lui Arhimede pentru $x := \varepsilon > 0$ oarecare şi $y := 1$, obţinem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{n} < \varepsilon$. De aici rezultă că $\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} = 0$.*

2. Aplicând Proprietatea lui Arhimede pentru $x := 1$ şi $y := a > 0$, obţinem că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a < n$.

Corolarul 1.3.20 *Dacă $a \geq 0$, iar pentru orice $\varepsilon > 0$, raţional, are loc $a < \varepsilon$, atunci $a = 0$.*

Demonstraţie. Să presupunem că $a \neq 0$. Rezultă că a este strict pozitiv şi conform proprietăţii lui Arhimede există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $na > 1$. Dar $\frac{1}{2n} \in \mathbb{Q}$ şi conform ipotezei avem $a < \frac{1}{2n}$. Obţinem că $na < \frac{1}{2} < 1$, ceea ce contrazice relaţia obţinută anterior, $na > 1$. Presupunerea făcută este, deci, falsă şi atunci $a = 0$. $\square$

Definiţia 1.3.21 *Se numeşte **parte întreagă** a lui $y \in \mathbb{R}$ numărul întreg n cu proprietatea $n \leq y < n + 1$. Partea întreagă a lui y se notează $[y]$.*

Teorema 1.3.22 (Densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$) *Între orice două numere reale distincte se află cel puţin un număr raţional.*

Demonstraţie. Fie x şi y numere reale cu $x \neq y$. Pentru a fixa lucrurile, să presupunem că $x < y$. Trebuie să arătăm că există $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x < r < y$. Deoarece $y - x > 0$, conform Proprietăţii lui Arhimede există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\frac{1}{n} < y - x. \tag{1.1}$$

Fie $m := [nx + 1]$, partea întreagă a lui x. Atunci $m - 1 \leq nx < m$ sau, împărţind această relaţie prin n:

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{n} < x < \frac{m}{n}. \tag{1.2}$$

Combinând acum relaţiile (1.2) şi (1.1), obţinem:

$$x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y.$$

Numărul raţional căutat este $r = \frac{m}{n}$. $\square$

Teorema 1.3.23 (Densitatea lui $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$) *Între orice două numere reale distincte se află cel puţin un număr iraţional.*

Demonstraţie. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Folosind densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$, putem găsi $p \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x < p < y$. Folosind Proprietatea lui Arhimede, găsim că, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ suficient de mare, $x < p + \frac{\sqrt{2}}{n} < y$. Cum $p + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, rezultă concluzia. $\square$

Elemente de topologie pe $\mathbb{R}$

În dezvoltarea conceptelor de analiză matematică vom utiliza diverse noţiuni topologice, toate acestea sprijinindu-se pe cea de vecinătate a unui punct. Vom da în cele ce urmează definiţia acesteia pe $\mathbb{R}$ şi vom enumera câteva proprietăţi de bază. Mai multe detalii legate de aceste aspecte, prezentate într-un cadru mai general, vor fi studiate în capitolul **Spaţiul** $\mathbb{R}^k$.

Pentru a o defini noţiunea de vecinătate, vom folosi distanţa dintre două puncte.

Definiţia 1.3.24 *Pentru orice număr real x definim **modulul** sau **valoarea absolută** a lui x prin*

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Se arată cu uşurinţă următoarele proprietăţi:

Propoziţia 1.3.25 *Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Atunci:*
(i) $|x| \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $|x| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$;
(ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;
(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;
(iv) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Definiţia 1.3.26 *Fie $x_0 \in \mathbb{R}$.*
*(i) Se numeşte **interval deschis centrat în** x_0 un interval de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, unde $\varepsilon > 0$.*
*(ii) O mulţime $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte **vecinătate** pentru $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V$.*

Notăm cu $\mathcal{V}(x)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor lui x.

Exemplul 1.3.27 Intervalul $(0, 2)$ este deschis, centrat în 1. Acest interval este vecinătate pentru orice punct din $(0, 2)$, dar nu este vecinătate pentru 0 sau pentru 2.

Exemplul 1.3.28 Mulţimea numerelor raţionale nu este vecinătate pentru niciun punct $x_0 \in \mathbb{Q}$ deoarece orice interval de numere reale conţine şi numere raţionale, şi iraţionale.

Teorema 1.3.29 (Proprietatea de separaţie Hausdorff) *Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \neq y$, atunci există o vecinătate U pentru x şi o vecinătate V pentru y astfel încât $U \cap V = \emptyset$.*

Demonstraţie. Deoarece $x \neq y$ rezultă că $\varepsilon = |x - y|$ este un număr strict pozitiv. Considerând $U = (x - \frac{\varepsilon}{3}, x + \frac{\varepsilon}{3})$ şi $V = (y - \frac{\varepsilon}{3}, y + \frac{\varepsilon}{3})$ remarcăm că $U \cap V = \emptyset$. Într-adevăr, dacă ar exista $z \in U \cap V$ am avea:

$$\varepsilon < |x - y| \leq |x - z| + |y - z| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3},$$

adică $\varepsilon < \dfrac{2\varepsilon}{3}$, ceea ce este absurd. $\square$

Mulţimea vecinătăţilor unui punct are următoarele proprietăţi.

Propoziţia 1.3.30 *Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Atunci:*
(i) pentru orice $V \in \mathcal{V}(x_0)$, $x_0 \in V$;
(ii) orice supramulţime a unei vecinătăţi pentru x_0 este de asemenea vecinătate pentru x_0;
(iii) dacă U şi V sunt două vecinătăţi ale lui x_0, atunci $U \cap V$ este vecinătate a lui x_0.
(iv) dacă V este vecinătate pentru x_0, atunci există o vecinătate W pentru x_0 astfel încât V este vecinătate pentru orice $y \in W$.

1.4 Dreapta reală încheiată

În secţiunea anterioară am observat că există submulţimi ale lui $\mathbb{R}$ minorate dar nemajorate ($\mathbb{N}$) sau invers, respectiv altele care nu sunt nici majorate, nici minorate ($\mathbb{Z}$). Pentru a evita această situaţie (dar şi din alte motive) se face convenţia de a adăuga mulţimii $\mathbb{R}$ două elemente care nu fac parte din $\mathbb{R}$, notate cu $+\infty$ şi $-\infty$. Mulţimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ o vom nota cu $\overline{\mathbb{R}}$ şi o vom numi **dreapta reală încheiată** sau **compactificată**. Vom prelungi ordinea uzuală a lui $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$ prin:

$$-\infty < x, \quad x < +\infty, \quad -\infty < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

În acest fel, $\overline{\mathbb{R}}$ devine o mulţime total ordonată.

De asemenea, prelungim şi operaţiile algebrice din $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$, fără a fi însă definite peste tot:
$x + \infty = \infty + x = \infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$
$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$
$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty$, pentru $x > 0$ şi $x \in \overline{\mathbb{R}}$
$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty$, pentru $x < 0$ şi $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Următoarele operaţii sunt nedefinite (se mai numesc şi **nedeterminări**, şi vor fi reluate mai târziu):

$$\infty + (-\infty), \quad (-\infty) + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime nevidă, majorată, atunci $\sup A \in \mathbb{R}$, conform axiomei de completitudine. Dacă A nu este majorată, atunci vom pune, prin definiţie, $\sup A := +\infty$, iar daca A nu este minorată, vom pune $\inf A := -\infty$. În acest fel, orice submulţime nevidă din $\overline{\mathbb{R}}$ are margine superioară şi margine inferioară în $\overline{\mathbb{R}}$.

Putem să extindem acum şi notaţiile pentru intervale de numere reale. Dacă a şi b sunt două elemente din $\overline{\mathbb{R}}$, cu $a < b$ definim:

$(a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$, numit **interval deschis**;

$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \le x \le b\}$, numit **interval închis**;

$(a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \le b\}$, numit **interval deschis în a, închis în b**;

$[a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \le x < b\}$, numit **interval închis în a, deschis în b**.

Definiţia 1.4.1 *Numim **vecinătate** a punctului $+\infty$ (respectiv $-\infty$) orice mulţime $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $(a, +\infty]$ (respectiv $[-\infty, a)$), unde $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Conform acestei definiţii, orice interval de forma $(a, +\infty]$ este vecinătate a punctului $+\infty$, în timp ce orice interval de forrma $[-\infty, a)$ este vecinătate a punctului $-\infty$.

1.5 Numere cardinale

În continuare prezentăm câteva elemente legate de numerele cardinale. Numărând elementele unei mulţimi, stabilim de fapt o bijecţie între elementele mulţimii de numărat şi o mulţime de numere naturale $\{1, , ...n\}$. Pornind de la acest aspect, definim următoarea relaţie pe mulţimea părţilor unei mulţimi X.

Definiţia 1.5.1 *Spunem că două mulţimi $A, B \in \mathcal{P}(X)$ sunt* ***echipotente*** *sau* ***cardinal echivalente*** *dacă există o bijecţie de la A la B. Vom nota $A \sim B$.*

Se verifică uşor că " $\sim$ " satisface următoarele proprietăţi (spunem că este o **relaţie de echivalenţă**):

(i) **reflexivitatea**: Dacă $A \sim B$, există $f : A \to B$, bijectivă. Dar atunci inversa acestei funcţii este o bijecţie între B şi A. Deci, $B \sim A$

(ii) **simetria**: $A \sim A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(X)$ deoarece aplicaţia identică $\mathrm{Id}_A : A \to A$ este bijecţie

(iii) **tranzitivitatea**: Dacă $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ sunt bijective, atunci $g \circ f : A \to C$ este de asemenea o bijecţie. Astfel, dacă $A \sim B$ şi $B \sim C$ atunci $A \sim C$.

Definiţia 1.5.2 *Pentru orice mulţime $A \in \mathcal{P}(X)$ vom numi* ***cardinalul*** *lui A, notat* $\mathrm{card}\, A$, *clasa de echivalenţă a mulţimii A, adică familia tuturor submulţimilor lui X echipotente cu A. Deci, pentru $A, B \in \mathcal{P}(X)$,* $\mathrm{card}\, A = \mathrm{card}\, B$ *este echivalent cu $A \sim B$.*

Definiţia 1.5.3 *O mulţime $A \in \mathcal{P}(X)$ echivalentă cu o mulţime de numere naturale de forma $\{1, , ..., n\}$ se numeşte* ***mulţime finită*** *iar în acest caz spunem că A* ***are cardinalul*** *n. Dacă $A \in \mathcal{P}(X)$ nu este finită, vom spune că este* ***mulţime infinită***.

Convenim că mulţimea vidă este finită, de cardinal 0.

Definiţia 1.5.4 *O mulţime $A \in \mathcal{P}(X)$ echipotentă cu $\mathbb{N}$ se numeşte* ***numărabilă****. Cardinalul său se notează cu $\aleph_0$. O mulţime care este finită sau numărabilă se numeşte* ***cel mult numărabilă****.*

Observaţia 1.5.5 *Pentru o mulţime nevidă A, vom numi* ***şir de elemente din*** *A o funcţie $f : \mathbb{N} \to A$. Vom putea atunci nota $a_i := f(i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Aşadar, pentru o mulţime numărabilă, va exista $f : \mathbb{N} \to A$ bijectivă, şi atunci fiecare element din A se va putea scrie în mod unic sub forma a_i, cu $i \in \mathbb{N}$, iar mulţimea sub forma*

$$A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Exemplul 1.5.6 Mulţimea $\mathbb{Z}$ este numărabilă: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} k, & \text{dacă } n = 2k \\ -k, & \text{dacă } n = 2k+1 \end{cases}$$

este în mod clar o bijecţie. Deci, $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{Z}$ au acelaşi cardinal.

Pe mulţimea numerelor cardinale se poate introduce o relaţie de ordine.

Definiţia 1.5.7 *Fie $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Spunem că avem* $\mathrm{card}\, A \le \mathrm{card}\, B$ *dacă există o injecţie de la mulţimea A la mulţimea B.*

Este uşor de verificat că această relaţie este reflexivă şi tranzitivă. Pentru antisimetrie vom arăta mai întâi următoarea lemă.

Lema 1.5.8 *Dacă* $A_1 \supset A_2 \supset A_3$ *iar* $\operatorname{card} A_1 = \operatorname{card} A_3$, *atunci* $\operatorname{card} A_1 = \operatorname{card} A_2$.

Demonstraţie. Fie $f : A_1 \to A_3$, bijectivă. Deci, $A_3 = f(A_1)$. Dar $A_2 \subset A_1$. Notăm $A_4 := f(A_2)$ şi avem că $A_4 = f(A_2) \subset f(A_1) = A_3$. Procedând recurent, vom construi un şir de mulţimi

$$A_n = f(A_{n-2}) \text{ pentru } n \geq 4.$$

Observăm că $A_1 \supset A_2 \supset ...A_n \supset A_{n+1}...$ Fie $M_0 := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ şi $M_k := A_k \setminus A_{k+1}$, $k \geq 1$. Atunci,

$$A_1 = \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k \text{ iar } \mathrm{A}_2 = \bigcup_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{\infty} M_k.$$

Deoarece f este bijecţie de la A_1 la A_3, rezultă că $A_n \setminus A_{n+1} \sim A_{n+2} \setminus A_{n+3}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ sau, echivalent, $M_n \sim M_{n+2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Definim atunci funcţia bijectivă $g : A_1 \to A_2$ în felul următor:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{pentru } x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{2k-1} \\ x, & \text{pentru } x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} M_{2k}, \end{cases}$$

ceea ce arată că $A_1 \sim A_2$. $\square$

Teorema 1.5.9 (Schröder - Bernstein) *Dacă* $A, B \in \mathcal{P}(X)$ *astfel încât* $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ *şi* $\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} A$, *atunci* $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.

Demonstraţie. Fie f o bijecţie de la A la $f(A) \subset B$ şi g o bijecţie de la B la $g(B) \subset A$. Notăm cu $A_1 := g(B)$, $B_1 := f(A)$ şi $A_2 := g(B_1)$.

Se observă că $A_2 \subset A_1 \subset A$, $A_2 = g(B_1) = g(f(A))$, iar $g \circ f$ este bijectivă. Atunci, $A \sim A_2$ şi conform lemei anterioare rezultă că $A_1 \sim A$, de unde $\operatorname{card} B = \operatorname{card} A$. $\square$

Exemplul 1.5.10 Folosind cele de mai sus, putem arăta:

1. Dacă A şi B sunt numărabile, atunci $A \times B$ este numărabilă. În particular, $\mathbb{N}^2$ este numărabilă.

Într-adevăr, dacă A şi B sunt numărabile, atunci putem scrie

$$A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \quad \text{şi } B = \{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}.$$

Definim atunci $f : A \times B \to \mathbb{N}$ prin

$$f(a_i, b_j) = 2^i \cdot 3^j.$$

Funcţia f este injectivă întrucât dacă presupunem că $f(a_i, b_j) = f(a_k, b_l)$ ar trebui să avem

$$2^i \cdot 3^j = 2^k \cdot 3^l.$$

Dacă $i \neq k$ atunci fie $i < k$, fie $i > k$. Dar dacă $i < k$, rezultă că

$$3^j = 2^{k-i} 3^l,$$

de unde 3^j trebuie să fie divizibil cu 2, ceea ce este absurd. Analog raţionăm dacă $j > k$. Deci, $i = k$ şi analog se justifică $j = l$. În concluzie, f este injectivă şi $\text{card}(A \times B) \leq \aleph_0$. Cum în mod evident avem şi $\aleph_0 \leq \text{card}(A \times B)$, rezultă că $A \times B$ este numărabilă.
În particular, $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.

2. Mulţimea numerelor raţionale este numărabilă.

Definim funcţia

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}^2, \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = (m, n).$$

În mod evident, f este injectivă, deci $\text{card}\,\mathbb{Q} \leq \text{card}\,\mathbb{N}^2 = \aleph_0$. Având loc şi inegalitatea inversă, avem, de fapt, egalitate şi atunci $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Teorema 1.5.11 *Mulţimea* $(0, 1)$ *a numerelor reale cuprinse între* 0 *şi* 1 *nu este numărabilă.*

Demonstraţie. Fie $X = (0, 1)$. Vom scrie fiecare element al lui X sub forma unei fracţii zecimale infinite procedând în felul următor (simbolul lui König) :

- sau numărul real se scrie în mod normal sub forma unei fracţii zecimale infinite, de exemplu

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots$$

$$\pi - 3 = 0,1415926\ldots$$

$$\frac{\sqrt{2}}{10} = 0,141421$$

şi îl vom păstra sub această formă;

- sau numărul real nu are decât un număr finit de zecimale, de exemplu

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{7}{40} = 0,175$$

şi în acest caz se înlocuieşte ultima zecimală prin numărul imediat inferior şi apoi se scrie o infinitate de 9, astfel :

$$\frac{1}{2} = 0,499999\ldots$$

$$\frac{7}{40} = 0,1799999\ldots$$

S-a realizat astfel o corespondenţă biunivocă între elementele lui X şi toate simbolurile lui König de forma $0, a_1a_2a_3\ldots$, a_i fiind o cifră oarecare cuprinsă între 0 şi 9.

Pentru a demonstra că mulţimea X nu este numărabilă vom raţiona prin reducere la absurd presupunând că toate elementele lui X pot fi scrise sub forma unui şir.

Primul element al lui X este $0, a_1^1a_2^1a_3^1\ldots$

Al doilea element al lui X este $0, a_1^2a_2^2a_3^2\ldots$

Al treilea element al lui X este $0, a_1^3a_2^3a_3^3\ldots$ etc.

Presupunerea că toate elementele lui X sunt în acest şir este falsă, deoarece există un simbol al lui König ce nu figureză aici şi anume

$$b = 0, b_1b_2b_3\ldots b_p\ldots,$$

unde $b_1 \neq a_1^1, b_2 \neq a_2^2, \ldots\ldots b_p \neq a_p^p, \ldots.$ Acest simbol reprezintă un număr real cuprins între 0 şi 1, deci va fi un element al lui X. Totuşi el este diferit de orice element din şirul de mai sus, deci b nu aparţine lui X. Ajungem astfel la o contradicţie ce ne conduce la a afirma că mulţimea X nu este numărabilă. □

Corolarul 1.5.12 *Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale nu este numărabilă şi are acelaşi cardinal cu $(0,1)$.*

Demonstraţie. Se consideră bijecţia $\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{x}{|x|+1}\right) \in (0,1)$. □

Corolarul 1.5.13 *Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale nu este numărabilă şi are acelaşi cardinal cu $[0,1]$.*

Demonstraţie. Se consideră bijecţia $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$,

$$f(x) := \begin{cases} -e^{-x^2}, & \text{dacă } x < 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ e^{-x^2}, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

iar apoi bijecţia $g : \mathbb{R} \to [0,1]$, $g(x) := \frac{1}{2} \cdot (1 + f(x))$. Teorema este demonstrată. □

Exerciţiul 1.2 Punctele unui segment de dreaptă constituie o mulţime nenumărabilă.
Soluţie. Fie AB un astfel de segment. Alegem o axă $x'Ox$ astfel ca originea O să fie în A şi astfel ca vectorul său unitar să coincidă cu vectorul AB. Oricărui punct M al lui AB (punctele A şi B fiind excluse îi va corespunde abscisa lui M care va fi un număr cuprins între 0 şi 1, deci un element al mulţimii $X = (0,1)$ şi această corespondenţă este biunivocă. Mulţimea punctelor segmentului AB (A şi B fiind excluse) este astfel echipotentă cu mulţimea $(0,1)$ care nu este numărabilă. Faptul că adăugăm extremităţile A şi B nu schimbă cu nimic concluzia.