Curs 10

Diferenţiabilitate pentru funcţii de mai multe variabile

10.1 Derivarea funcţiilor de mai multe variabile

Vom lua în discuţie mai întâi cazul funcţiilor reale de mai multe variabile, adică al funcţiilor $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Pentru astfel de funcţii, observăm că

$$\phi(t) = f(x + tv), \text{ unde } v \in \mathbb{R}^k \ \|v\| = 1, \ t \in \mathbb{R}$$

este o funcţie reală, de o variabilă reală.

Definiţia 10.1.1 *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde D este un deschis din $\mathbb{R}^k$.*

1. *Numim **derivată a lui f în a după versorul** v*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a + tv) - f(a)) \overset{not}{=} \frac{df}{dv}(a)$$

ori de câte ori limita există.

2. *Dacă $\frac{df}{dv}(a) \in \mathbb{R}$ vom spune că f este **derivabilă în** a **după versorul** v.*

Observaţia 10.1.2 *În loc de a spune că funcţia f este derivabilă după versorul v de multe ori se mai foloseşte expresia funcţia f este derivabilă în direcţia v deoarece $x = a + tv$ este ecuaţia dreptei care trece prin punctul a şi are direcţia v.*

Exemplul 10.1.3 Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x + y}, & \text{dacă } x + y \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x + y = 0. \end{cases}$$

Această funcţie nu este continuă în origine. Fie $v \in \mathbb{R}^2$ un versor oarecare şi să calculăm derivata pe direcţia $v = (v_1, v_2)$ în $(0, 0)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f((0, 0) + tv) - f(0, 0)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{tv_1 \cdot tv_2}{tv_1 + tv_2} = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Astfel, deşi nu este continuă în (0,0), funcţia f este derivabilă în origine pe orice direcţie $v = (v_1, v_2)$ pentru care $v_1 + v_2 \neq 0$. Mai mult, dacă $v_1 + v_2 = 0$, $f(tv) = 0$ şi atunci f este derivabilă în (0,0) şi pe astfel de direcţii.

10.2 Derivate parţiale pentru funcţii de mai multe variabile

Definiţia 10.2.1 *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$.*

1. *Spunem că funcţia f are* ***derivată parţială în raport cu variabila x_i în punctul a*** *dacă există derivata funcţiei f după direcţia e_i, unde $e_i = (0, ...0, 1, 0...0)$, 1 aflându-se pe poziţia i). Aceasta se notează fie cu $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sau $f'_{x_i}(a)$.*

2. *Spunem că funcţia f este* ***derivabilă parţial în raport cu variabila x_i în punctul a*** *dacă $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$.*

Observăm că

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{df}{de_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + t, ...a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{t}$$

adică a deriva parţial în raport cu o anumită variabilă revine la a deriva considerând toate celelalte variabile ca fiind nişte constante.

Observaţia 10.2.2 *În cazurile $k = 2$ şi $k = 3$, vom nota punctul curent (x_1, x_2) prin (x, y), respectiv (x_1, x_2, x_3) prin (x, y, z) şi vom avea*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'_x(x,y) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'_y(x,y) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x,y+t) - f(x,y)}{t}, \end{cases}$$

respectiv

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = f'_x(x,y,z) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x+t,y,z) - f(x,y,z)}{t}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = f'_y(x,y,z) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x,y+t,z) - f(x,y,z)}{t}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = f'_z(x,y,z) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x,y,z+t) - f(x,y,z)}{t}. \end{cases}$$

Exemplul 10.2.3 Calculaţi derivatele parţiale ale funcţiei $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^y.$$

Vom avea

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'_x(x,y) = y \cdot x^{y-1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'_y(x,y) = x^y \cdot \ln x.$$

Exemplul 10.2.4 Calculaţi derivatele parţiale ale funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = \sin(x + 2y^2 - 3z^3).$$

Vom avea

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \cos(x+2y^2-3z^3),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 4y\cdot\cos(x+2y^2-3z^3),\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= -9z^2\cdot\cos(x+2y^2-3z^3).
\end{aligned}$$

Calculaţi derivatele parţiale ale funcţiei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y,z)=(3x-4y+7z)\cdot e^{x^2+y^2-z^2}.$$

Vom avea

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= (3x-4y+7z)'_x\cdot e^{x^2+y^2-z^2}+(3x-4y+7z)\cdot\left(e^{x^2+y^2-z^2}\right)'_x\\
&= 3\cdot e^{x^2+y^2-z^2}+(3x-4y+7z)\cdot e^{x^2+y^2-z^2}\cdot 2x\\
&= e^{x^2+y^2-z^2}\cdot\left(3+6x^2-8xy+14xz\right).\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= (3x-4y+7z)'_y\cdot e^{x^2+y^2-z^2}+(3x-4y+7z)\cdot\left(e^{x^2+y^2-z^2}\right)'_y\\
&= -4\cdot e^{x^2+y^2-z^2}+(3x-4y+7z)\cdot e^{x^2+y^2-z^2}\cdot 2y\\
&= e^{x^2+y^2-z^2}\cdot\left(-4+6xy-8y^2+14yz\right).\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= (3x-4y+7z)'_z\cdot e^{x^2+y^2-z^2}+(3x-4y+7z)\cdot\left(e^{x^2+y^2-z^2}\right)'_z\\
&= 7\cdot e^{x^2+y^2-z^2}+(3x-4y+7z)\cdot e^{x^2+y^2-z^2}\cdot(-2z)\\
&= e^{x^2+y^2-z^2}\cdot\left(7-6xz+8yz-14z^2\right).
\end{aligned}$$

Definiţia 10.2.5 *Fie $D\subset\mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi o funcţie $f:D\to\mathbb{R}$.*

1. *Spunem că f este derivabilă parţial pe D dacă este derivabilă parţial în raport cu fiecare variabilă, în orice punct al lui D.*

2. *Spunem că f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D dacă f este derivabilă parţial pe D şi toate derivatele sale parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1..k$ sunt continue pe D. În acest caz vom nota $f\in\mathcal{C}^1(D)$.*

Ne vine uşor acum să vorbim de derivabilitate parţială pentru funcţii cu valori vectoriale.

Definiţia 10.2.6 *Fie D un deschis din $\mathbb{R}^k$ $(k\geq 1)$ şi $F:D\to\mathbb{R}^m$ $(m\geq 1)$, în care*

$$F=(f_1,f_2,...,f_m)\ \text{cu}\ f_i:D\to\mathbb{R},\ i=1..m.$$

i. *Spunem că F este **derivabilă parţial în** $a\in D$ dacă orice funcţie f_i este derivabilă parţial în a în raport cu toate variabilele $x_1,...,x_k$.*

ii. *Spunem că F este de clasă C^1 pe D dacă toate funcţiile f_i sunt de clasă C^1 pe D. Notăm $F\in\mathcal{C}^1(D)$.*

Dacă o funcţie vectorială

$$F = (f_1, f_2, ..., f_m) \text{ cu } f_i : D \to \mathbb{R},\ i = 1, ..., m.$$

este derivabilă parţial în punctul a în raport cu toate variabilele, definim **matricea Jacobiană a lui F în punctul a** (matricea care este formată din derivatele parţiale ale funcţiilor $f_1, ..., f_m$ în punctul a):

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$$

Observaţia 10.2.7 *Dacă avem $k = m$, matricea $J_F(a)$ este pătratică iar determinantul* $\det J_F(a)$ *se numeşte jacobianul sau determinantul funcţional al funcţiilor $f_1, ..., f_k$ în punctul a şi se notează*

$$\det J_F(a) = \frac{D(f_1, ..., f_k)}{D(x_1, ..., x_k)}.$$

10.3 Derivate parţiale de ordin superior

Definiţia 10.3.1 *Fie D un deschis din $\mathbb{R}^k$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă parţial pe D. Fie*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., k$$

cele k derivate parţiale ale lui f.

1. *Dacă există derivata parţială în $a \in D$ în raport cu x_j a funcţiei $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, atunci aceasta se va numi **derivată parţială de ordinul 2** a funcţiei f în punctul a şi se va nota prin*

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{sau } f''_{x_i x_j}, \quad \text{pentru} \quad i \neq j$$

   şi

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{sau } f''_{x_i^2} \quad \text{pentru} \quad i = j$$

   (pentru $i \neq j$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ se numesc derivate parţiale mixte).

2. *Dacă derivatele de la punctul 1. sunt finite în orice punct din D, obţinem funcţiile*

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : D \to \mathbb{R} \text{ pentru } \ i \neq k \qquad \text{respectiv } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} : D \to \mathbb{R} \text{ pentru } i = j,$$

   *numite **derivate parţiale de ordin 2**.*

3. *Spunem că funcţia f este **de clasă $\mathcal{C}^2$ pe** D dacă este derivabilă parţial de ordinul doi pe D în raport cu toate variabilele şi acestea sunt continue.*

Observaţia 10.3.2 *Din nou, în cazurile $k = 2$ şi $k = 3$ vom avea notaţii speciale. Pentru $k = 2$, vom avea patru derivate parţiale de ordinul II, dintre care ultimele două mixte:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\ \text{şi}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Pentru $k = 3$, vom avea nouă derivate parţiale de ordinul II, dintre care ultimele şase mixte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z),\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)\ \text{şi}\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z).$$

Exemplul 10.3.3 Calculaţi derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^y.$$

Vom avea

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f''_{xx}(x,y) = \big(y \cdot x^{y-1}\big)'_x = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2},\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f''_{yy}(x,y) = (x^y \cdot \ln x)'_y = \ln x \cdot (x^y)'_y = \ln x \cdot x^y \cdot \ln x = x^y \cdot \ln^2 x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (x^y \cdot \ln x)'_x = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1},\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = \big(y \cdot x^{y-1}\big)'_y = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x.
\end{aligned}$$

Observăm că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

Exemplul 10.3.4 Calculaţi derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \sin(x + 2y^2 - 3z^3).$$

Vom avea

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= f''_{xx}(x,y) = \big(\cos(x + 2y^2 - 3z^3)\big)'_x = -\sin(x + 2y^2 - 3z^3),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= f''_{yy}(x,y,z) = \big(4y \cdot \cos(x + 2y^2 - 3z^3)\big)'_y\\
&= 4 \cdot \cos(x + 2y^2 - 3z^3) + 4y \cdot \big(-\sin(x + 2y^2 - 3z^3)\big) \cdot 4y\\
&= 4 \cdot \cos(x + 2y^2 - 3z^3) - 16y^2 \cdot \sin(x + 2y^2 - 3z^3),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &= f''_{zz}(x,y,z) = \big(-9z^2 \cdot \cos(x + 2y^2 - 3z^3)\big)'_z\\
&= -18z \cdot \cos(x + 2y^2 - 3z^3) - 81z^4 \cdot \sin(x + 2y^2 - 3z^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) &= f''_{yx}(x,y,z) = \big(4y \cdot \cos(x+2y^2-3z^3)\big)'_x \\
&= -4y \cdot \sin(x+2y^2-3z^3) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) &= f''_{xy}(x,y,z) = \big(\cos(x+2y^2-3z^3)\big)'_y \\
&= -4y \cdot \sin(x+2y^2-3z^3), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) &= f''_{zx}(x,y,z) = \big(-9z^2 \cdot \cos(x+2y^2-3z^3)\big)'_x \\
&= 9z^2 \cdot \sin(x+2y^2-3z^3) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y) &= f''_{zy}(x,y,z) = \big(-9z^2 \cdot \cos(x+2y^2-3z^3)\big)'_y \\
&= 36yz^2 \cdot \sin(x+2y^2-3z^3) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z).
\end{aligned}$$

Observaţia 10.3.5 *1. În mod analog se pot defini derivatele parţiale de ordin $q, q \geq 2$ şi funcţiile de clasă C^q $q \geq 2$.*

2. În exemplele de mai sus derivatele parţiale mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sunt egale. Acest lucru nu este adevărat în general. Fie funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vom arăta că toate derivatele parţiale există pe $\mathbb{R}^2$, dar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Fie $(x,y) \neq (0,0)$. Atunci, cum funcţia $t \mapsto (x+t)y\dfrac{(x+t)^2-y^2}{(x+t)^2+y^2}$ este derivabilă, ne va rezulta că $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ există în (x,y). Analog se arată că $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ există în (x,y). În plus, avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= x\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Atunci, pentru $x \neq 0$, vom avea $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, iar pentru $y \neq 0$, vom avea $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$. Să studiem derivabilitatea parţială în $(0,0)$. Vom avea

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0,$$

deci f este derivabilă parţial în raport cu x în $(0,0)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Asemănător, există $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Să calculăm acum derivatele parţiale mixte de ordinul II pentru f în punctul $(0,0)$. Obţinem

$$\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1 \text{ şi}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

de unde $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1$, *iar* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$. *Rezultă concluzia.*

Vom prezenta în cele ce urmează condiţii ce asigură egalitatea derivatelor mixte.

Teorema 10.3.6 (Criteriul lui Schwarz) *Fie $D\subset\mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi $f:D\to\mathbb{R}$. Dacă există şi sunt finite derivatele parţiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ $(i\neq j)$ într-o vecinătate a lui $a\in D$, iar acestea sunt continue în a, atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a).$$

Demonstraţie. Vom arăta în primă instanţă teorema în cazul $k=2$, în care vom nota, ca de obicei, variabilele x_i, x_j cu x, y. De asemenea, vom utiliza în demonstraţie norma euclidiană, pentru o altă normă raţionând analog.

Fie $a=(a_1,a_2)\in D$ şi $V:=B(a,r)$ o vecinătate a lui a astfel încât $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ există şi sunt finite pe V. Fie $(x,y)\in V$ astfel încât $x\neq a_1$ şi $y\neq a_2$.

Atunci, pentru orice u din $[x,a_1]$ sau $[a_1,x]$, vom avea că $(u,y),(u,a_2)\in B(a,r)\subset D$. Atunci funcţia

$$\varphi(u):=f(u,y)-f(u,a_2)$$

va satisface condiţiile Teoremei lui Lagrange pe $[x,a_1]$ (sau $[a_1,x]$), deci va exista $c\in(x,a_1)$ (sau $c\in(a_1,x)$) astfel încât

$$\varphi(x)-\varphi(a_1)=\varphi'(c)\cdot(x-a_1),$$

adică

$$f(x,y)-f(x,a_2)-f(a_1,y)+f(a_1,a_2)=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(c,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(c,a_2)\right]\cdot(x-a_1) \tag{10.1}$$

De asemenea, pentru orice v din $[y,a_2]$ sau $[a_2,y]$, vom avea că $(c,v)\in B(a,r)$, deci funcţia

$$\psi(v):=\frac{\partial f}{\partial x}(c,v)$$

va satisface condiţiile Teoremei lui Lagrange pe $[y,a_2]$ (sau $[a_2,y]$), de unde rezultă că există $d\in(y,a_2)$ (sau $d\in(a_2,y)$) astfel încât

$$\psi(y)-\varphi(a_2)=\varphi'(d)\cdot(y-a_2),$$

adică

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(c,a_2)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(c,d)\cdot(y-a_2). \tag{10.2}$$

Combinând (10.1) şi (10.2), obţinem că

$$f(x,y) - f(x,a_2) - f(a_1,y) + f(a_1,a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c,d) \cdot (x-a_1) \cdot (y-a_2).$$

Inversând rolurile lui x şi y, vom găsi ξ între x şi a_1 şi η între y şi a_2 astfel încât

$$f(x,y) - f(x,a_2) - f(a_1,y) + f(a_1,a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) \cdot (x-a_1) \cdot (y-a_2),$$

de unde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c,d) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta). \tag{10.3}$$

Făcând acum $(x,y) \to (a_1,a_2)$, vom obţine $(c,d) \to (a_1,a_2)$ şi $(\xi,\eta) \to (a_1,a_2)$, de unde, folosind continuitatea funcţiilor $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ în a, obţinem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c,d) \to \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1,a_2)$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) \to \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,a_2)$. Trecând aşadar la limită pentru $(x,y) \to (a_1,a_2)$ în relaţia (10.3), obţinem concluzia.

În cazul $k > 2$, presupunem fără a restrânge generalitatea că $i < j$, şi aplicăm cele demonstrate mai sus funcţiei

$$(x_i,x_j) \mapsto f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_{j-1},x_j,a_{j+1},...,a_k).$$

Teorema este complet demonstrată. □

Observaţia 10.3.7 *Matricea care conţine toate derivatele parţiale de ordinul 2 ale unei funcţii $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (într-un punct $a \in D$)poartă numele de Hessiana funcţiei f (în punctul a):*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & ... & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2}(a) & ... & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & ... & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Pentru o funcţie care satisface condiţiile teoremei lui Schwartz $H_f(a)$ este o matrice simetrică.

10.4 Diferenţiala unei funcţii

Definiţia 10.4.1 *Spunem că $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este o* ***aplicaţie liniară,*** *sau un* ***operator liniar****, dacă satisface condiţiile:*

(AL_1) $T(x+y) = T(x) + T(y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^k$;

(AL_2) $T(\lambda x) = \lambda T(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$.

Vom nota cu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^p)$ mulţimea aplicaţiilor liniare definite între spaţiile $\mathbb{R}^k$ şi $\mathbb{R}^p$.

În cele ce urmează, vom considera $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă.

Definiţia 10.4.2 *Funcţia $f : D \to \mathbb{R}^p$ se numeşte **diferenţiabilă** în $x \in D$ dacă există o aplicaţie liniară $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^p)$ astfel încât*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Th}{\|h\|} = \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x) - T(y-x)}{\|y-x\|} = 0. \qquad (10.4)$$

*Operatorul T se numeşte **diferenţiala** funcţiei f în punctul x.*

Operatorul T din definiţia de mai sus se notează cu $df(x)$.
Observăm acum că relaţia (10.4) este echivalentă cu următoarea condiţie:

$$\begin{aligned} &\exists \alpha : D \to \mathbb{R}^p : \lim_{h\to 0} \alpha(x+h) = \alpha(x) = 0, \\ &f(x+h) = f(x) + Th + \|h\| \cdot \alpha(x+h) \quad \forall h \in D - \{x\}\,. \end{aligned} \qquad (10.5)$$

Să arătăm acest lucru. Presupunem că (10.4) are loc şi definim $\alpha : D \to \mathbb{R}$ prin

$$\alpha(x+h) := \begin{cases} \dfrac{f(x+h) - f(x) - Th}{\|h\|}, & \text{dacă } h \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } h = 0. \end{cases}$$

Atunci, folosind (10.4), avem că $\lim_{h\to 0} \alpha(x+h) = \alpha(x) = 0$. De asemenea, pentru $h \in D - \{x\}$, $h \neq 0$, avem partea finală a relaţiei (10.5) satisfăcută potrivit definiţiei funcţiei α. Pentru $h \in D - \{x\}$, $h = 0$, ultima egalitate din (10.5) este satisfăcută trivial. Invers, dacă relaţia (10.5) are loc, atunci avem că

$$0 = \lim_{h\to 0} \alpha(x+h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Th}{\|h\|},$$

de unde f este diferenţiabilă în x.

Relaţia (10.5) arată de fapt că f poate fi "bine aproximată" în jurul lui x de către funcţia afină $h \mapsto f(x) + Th$, adică

$$f(x+h) \approx f(x) + Th.$$

O exprimare echivalentă se poate obţine dacă folosim **notaţia lui Landau**: vom numi o funcţie definită pe $\mathbb{R}^n$ cu valori reale **de tip** $o(h)$ dacă

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0.$$

Atunci, folosind (10.5), diferenţiabilitatea Fréchet a funcţiei f în x este echivalentă cu a spune că $f(x+h) - f(x) - Th = o(h)$, adică

$$f(x+h) = f(x) + Th + o(h). \qquad (10.6)$$

Notaţia $o(h)$ va fi foarte utilă când vom avea de a face cu demonstraţii în care intervin limite.

Din cele afirmate până acum, putem deduce următorul rezultat.

Teorema 10.4.3 *Fie $f : D \to \mathbb{R}^p$ definită pe mulţimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^k$ şi $x \in D$.*
(i) Dacă f este diferenţiabilă în x, atunci diferenţiala sa este unică.
(ii) Dacă f este diferenţiabilă în x, atunci f este derivabilă în orice direcţie v şi $\dfrac{df}{dv}(x) = df(x)(v)$.
(iii) Dacă f este diferenţiabilă în x, atunci f este continuă în x.

Demonstraţie. (i) rezultă imediat din definiţie, folosind unicitatea limitei unei funcţii într-un punct.

(ii) Alegem $h := tv$, cu $t > 0$, în definiţia diferenţiabilităţii, unde $v \in R^k$, $\|v\| = 1$ este o direcţie arbitrară, şi obţinem

$$0 = \lim_{tv \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x) - T(tv)}{t\,\|v\|} = \frac{1}{\|v\|} \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - Tv,$$

de unde $\frac{df}{dv}(x)$ există şi este egală cu Tv. Rezultă concluzia.

(iii) Să observăm că dacă f este diferenţiabilă în x, atunci folosind (10.5) şi făcând $h \to 0$, obţinem $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$, de unde f este continuă în x. □

Putem arăta că diferenţiabilitatea este echivalentă, pentru o funcţie vectorială, cu diferenţiabilitatea corespunzătoare a funcţiilor componente.

Teorema 10.4.4 *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă, $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie şi $x \in D$. Atunci f este diferenţiabilă în x dacă şi numai dacă toate funcţiile componente $f_1, ., , , f_p : D \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile în x. În acest caz*

$$df(x) = (df_1(x), ..., df_p(x)).$$

Demonstraţie. Rezultă din teorema de echivalenţă a limitei unei funcţii vectoriale cu limitele funcţiilor coordonate. □

10.4.1 Interpretarea geometrică a diferenţialei

Pentru o funcţie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ care este diferenţiabilă într-un punct $a = (a_1, a_2)$, graficul funcţiei va admite un plan tangent în punctul $(a, f(a))$, ce are ecuaţia:

$$z - f(a) = df(a)(x - a_1, y - a_2).$$

Aşadar, ca şi în cazul funcţiilor reale de variabilă reală, graficul diferenţialei $df(a)$ este translaţia acestui plan tangent la graficul funcţiei f în origine. Din nou, pentru puncte diferite din D în care f este diferenţiabilă, planele tangente pot fi diferite. În concuzie, diferenţiala defineşte, pentru fiecare punct în care există, câte o aplicaţie liniară, al cărei grafic este translaţia planului tangent dus în punctul corespunzător la graficul funţiei în origine.

Teorema 10.4.5 (Reguli de calcul pentru diferenţiale) *Fie mulţimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^k$, $x \in D$ şi funcţiile $f, g : D \to \mathbb{R}^p$, $h : D \to \mathbb{R}$.*

(i) Dacă f şi g sunt diferenţiabile în x, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g$ este diferenţiabilă în x şi

$$d(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha df(x) + \beta dg(x).$$

(ii) Dacă f şi φ sunt diferenţiabile în x, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\varphi \cdot f$ este diferenţiabilă în x şi

$$d(\varphi \cdot f)(x) = d\varphi(x) \cdot f(x) + \varphi(x) \cdot df(x).$$

Are loc, de asemenea, următorul rezultat, numit şi **regula lanţului**.

Teorema 10.4.6 (Diferenţierea funcţiilor compuse) *Fie mulţimile deschise $D \subset \mathbb{R}^k$, $\Delta \subset \mathbb{R}^p$, şi funcţiile $f : D \to \Delta$, $g : \Delta \to \mathbb{R}^m$. Dacă f este diferenţiabilă în $x \in D$, iar g este diferenţiabilă în $y = f(x) \in \Delta$, atunci $g \circ f : D \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în x şi*

$$d(g \circ f)(x) = dg(y) \circ df(x). \tag{10.7}$$

În cele ce urmează, vom pune în evidenţă o formulă de calcul pentru diferenţialele unei funcţii $f : D \to \mathbb{R}$.

Teorema 10.4.7 *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în x. Atunci f este derivabilă parţial în x şi, pentru orice $v = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{R}^k$, are loc formula*

$$df(x)(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot v_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot v_k = \langle \nabla f(x), v \rangle . \tag{10.8}$$

Mai mult, putem scrie

$$df(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot dx_k, \tag{10.9}$$

unde prin dx_i s-a notat diferenţiala aplicaţiei de proiecţie $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dată prin $\mathrm{pr}_i(x) := x_i$ pentru orice $x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Demonstraţie. Deoarece derivata direcţională există pentru orice direcţie, va exista şi pentru direcţiile date de vectorii bazei canonice din R^k, deci f va fi derivabilă parţial în x. Cum, pentru orice $v \in R^k$, aplicaţia $v \mapsto df(x)(v)$ este liniară continuă, iar $v = v_1 e_1 + ... + v_k e_k$, rezultă

$$\begin{aligned} df(x)(v) &= df(x)(v_1 e_1 + ... + v_k e_k) = v_1 \cdot df(x)(e_1) + ... + v_k \cdot df(x)(e_k) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot v_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot v_k. \end{aligned}$$

Considerând acum funcţia $\mathrm{pr}_i : R^k \to R$, $\mathrm{pr}_i(x) = x_i$, aceasta este în mod evident diferenţiabilă şi în plus, aplicând formula de mai sus şi luând în considerare că $\dfrac{\partial\, \mathrm{pr}_i}{\partial x_j}(x) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \neq j \\ 1, & \text{dacă } i = j \end{cases}$, obţinem

$$d\,\mathrm{pr}_i(x)(v) = v_i.$$

Rezultă concluzia. □

Observaţia 10.4.8 *În cazurile $k = 2$ şi $k = 3$ vom avea, pentru orice $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,*

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot dy,$$

$$df(x, y)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot h_2,$$

şi respectiv, pentru orice $(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \cdot dz,$$

$$df(x, y, z)(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \cdot h_3.$$

Exerciţiul 10.1 Calculaţi diferenţiala funcţiei $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^y.$$

Vom avea

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \cos(x + 2y^2 - 3z^3), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 4y \cdot \cos(x + 2y^2 - 3z^3), \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -9z^2 \cdot \cos(x + 2y^2 - 3z^3).
\end{aligned}$$

Conform teoremei anterioare, va rezulta că

$$\begin{aligned}
df(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot dy \\
&= yx^{y-1} \cdot dx + x^y \cdot \ln x \cdot dy.
\end{aligned}$$

Aşadar,

$$df(2, 1) = dx + 2 \ln 2 \cdot dy,$$

adică

$$df(2, 1)(h_1, h_2) = h_1 + 2 \ln 2 \cdot h_2, \quad \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Atunci

$$df(2, 1)(-1, 3) = -1 + 2 \ln 2 \cdot 3 = -1 + 6 \ln 2.$$

Am văzut în Teorema 10.4.4 că o funcţie $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în $x \in D$ dacă şi numai dacă funcţiile componente $f_1, f_2, ..., f_p : D \to \mathbb{R}$ au această proprietate şi

$$df(x) = (df_1(x), ..., df_p(x)).$$

Luând în considerare şi Teorema 10.4.7, aceste funcţii vor fi derivabile parţial în x şi fiecare dintre ele va satisface o formulă de tipul (10.8). Putem considera atunci matricea jacobiană $J_f(x)$ ataşată funcţiei f în punctul x şi avem următorul rezultat.

Teorema 10.4.9 *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie diferenţiabilă în x. Atunci funcţiile componente $f_1, ..., f_k$ sunt derivabile parţial în x, iar matricea aplicaţiei liniare $df(x)$ în bazele canonice din $\mathbb{R}^k$ şi $\mathbb{R}^p$ este $J_f(x)$. Cu alte cuvinte, pentru orice vector $h = (h_1, ..., h_k) \in \mathbb{R}^k$, vom avea*

$$[df(x)(h)]^T = J_f(x) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix}. \tag{10.10}$$

Având în vedere cele prezentate anterior şi formula (10.10), obţinem următoarea consecinţă a regulii lanţului.

Corolarul 10.4.10 *În ipotezele Teoremei 10.4.6, are loc egalitatea*

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(y) \cdot J_f(x). \tag{10.11}$$

Demonstraţie. Vom avea, pentru $h = (h_1, ..., h_k) \in R^k$

$$\begin{aligned} J_{g\circ f}(x) \cdot h^T &= [d(g \circ f)(x)(h)]^T = [dg(y)\,(df(x)(h))]^T \\ &= \left[dg(y)\left(h \cdot J_f(x)^T\right)\right]^T = J_g(y) \cdot \left(h \cdot J_f(x)^T\right)^T \\ &= J_g(y) \cdot J_f(x) \cdot h^T. \end{aligned}$$

Rezultă egalitatea (10.11). □

Exerciţiul 10.2 Fie mulţimea $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq -2\}$ şi funcţiile

$$f : A \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = \left(\sqrt{x}, \sqrt{x^2 + 3y^2}, \sqrt{y + 2}\right),$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad g(u, v, w) = \left(u^2 + v^2 + 2w^2, u^2 - v^2\right),$$

$$h = g \circ f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Notăm cu $a := (1, -1) \in A$ şi cu $b := f(a) = (1, 2, 1)$.

Să se verifice că $dh(a) = dg(b) \circ df(a)$.

Soluţie. Să observăm că $a \in \operatorname{int} A$şi $b \in \operatorname{int} f(A)$. Obţinem

$$J_f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} & \dfrac{3y}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \\ 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{y+2}} \end{bmatrix} \text{ şi } J_f(1, -1) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$J_g(u, v, w) = \begin{bmatrix} 2u & 2v & 4w \\ 2u & -2v & 0 \end{bmatrix} \text{ şi } J_g(1, 2, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

apoi

$$\begin{aligned} h(x, y) &= g\,(f(x, y)) = g\left(\sqrt{x}, \sqrt{x^2 + 3y^2}, \sqrt{y + 2}\right) \\ &= \left(x + x^2 + 3y^2 + 2y + 4, x - x^2 - 3y^2\right), \end{aligned}$$

de unde

$$J_h(x, y) = \begin{bmatrix} 1 + 2x & 6y + 2 \\ 1 - 2x & -6y \end{bmatrix} \text{ şi } J_h(1, -1) = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Pe de altă parte avem:

$$J_g(1, 2, 1) \cdot J_f(1, -1) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

În continuare, avem:

$$\begin{aligned} df(1,-1) &= \left(\frac{1}{2}dx, \frac{1}{2}dx - \frac{3}{2}dy, \frac{1}{2}dy\right), \\ dg(1,2,1) &= (2du + 4dv + 4dw, 2du - 4dv), \\ dh(1,-1) &= (3dx - 4dy, -dx + 6dy), \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} & dg(1,2,1) \circ df(1,-1) \\ & = \left(2 \cdot \frac{1}{2}dx + 4\left(\frac{1}{2}dx - \frac{3}{2}dy\right) + 4 \cdot \frac{1}{2}dy, 2 \cdot \frac{1}{2}dx - 4\left(\frac{1}{2}dx - \frac{3}{2}dy\right)\right) \\ & = (3dx - 4dy, -dx + 6dy). \end{aligned} \qquad (\square)$$

Exemplul 10.4.11 Să studiem câteva cazuri particulare ale Corolarului 10.4.10.

(i) Pentru $D \subset \mathbb{R}$, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \Delta$, $f(t) = (u(t), v(t))$, $g : \Delta \to \mathbb{R}$, iar $h = g \circ f : D \to \mathbb{R}$, obţinem

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot u'(t) + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot v'(t), \quad \forall t \in D.$$

(ii) Pentru $D, \Delta \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \Delta$, $f(x,y) = (u,v) = (u(x,y), v(x,y))$, $g : \Delta \to \mathbb{R}$, iar $h = g \circ f : D \to \mathbb{R}$, obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial h}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial h}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial h}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

În continuare, vom pune în evidenţă un criteriu de diferenţiabilitate, ce va avea în vedere derivabilitatea parţială a funcţiilor componente.

Teorema 10.4.12 (Criteriu de diferenţiabilitate) *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie şi $x \in D$. Dacă toate funcţiile componente $f_1, f_2, ..., f_p : D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile parţial pe o vecinătate $V \subset D$ a lui x şi derivatele parţiale sunt continue în x, atunci f este Fréchet diferenţiabilă în x.*

Demonstraţie. Să observăm că este suficient să arătăm afirmaţia doar pentru una dintre funcţiile componente, având în vedere Teorema 10.4.4. Fixăm aşadar $i \in \overline{1,p}$ şi arătăm că f_i este diferenţiabilă în x.

Fie $r > 0$ astfel încât $B(x,r) \subset D$. Pentru orice $h \in B(0,r)$, avem că

$$\begin{aligned} & f_i(x+h) - f_i(x) = f_i(x_1 + h_1, ..., x_k + h_k) - f_i(x_1, ..., x_k) \\ & = [f_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) - f_i(x_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k)] \\ & + [f_i(x_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k) - f_i(x_1, x_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k)] \\ & + ... + [f_i(x_1, ..., x_{k-1}, x_k + h_k) - f_i(x_1, ..., x_{k-1}, x_k)]. \end{aligned}$$

Cum funcţia f_i este derivabilă parţial pe $B(x,r)$, ne va rezulta că funcţia

$$t \mapsto f_i(x_1 + t, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k)$$

este derivabilă parţial pe intervalul $(0, h_1)$ (sau $(h_1, 0)$), deci putem aplica Teorema lui Lagrange pentru a găsi $c_1 \in (0, h_1)$ (sau $(h_1, 0)$), astfel încât

$$\begin{aligned}
&f_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) - f_i(x_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) \\
&= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1 + c_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) \cdot h_1.
\end{aligned}$$

Analog, pentru funcţia

$$t \mapsto f_i(x_1, x_2 + t, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k)$$

găsim $c_2 \in (0, h_2)$ (sau $(h_2, 0)$), astfel încât

$$\begin{aligned}
&f_i(x_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k) - f_i(x_1, x_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k) \\
&= \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1, x_2 + c_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k) \cdot h_2.
\end{aligned}$$

Procedând la fel pentru celelalte paranteze, ne va rezulta că există $c_j \in (0, h_j)$ (sau $(h_j, 0)$), pentru $j = \overline{1, k}$, astfel încât

$$\begin{aligned}
f_i(x + h) - f_i(x) &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1 + c_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) \cdot h_1 \\
&+ \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1, x_2 + c_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k) \cdot h_2 \\
&+ ... + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1, ..., x_{k-1}, x + c_k) \cdot h_k.
\end{aligned}$$

Fie acum $T : R^k \to R$ dat prin

$$T(h) = T(h_1, ..., h_k) := \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \cdot h_j.$$

Să observăm că $T \in L(R^k, R)$. Putem scrie atunci că

$$\begin{aligned}
&\frac{f_i(x + h) - f_i(x) - Th}{\|h\|} = \\
&= \frac{h_1}{\|h\|} \cdot \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1 + c_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_k)\right] \\
&+ \frac{h_2}{\|h\|} \cdot \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1, x_2 + c_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1, x_2, ..., x_k)\right] \\
&+ ... + \frac{h_k}{\|h\|} \cdot \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1, ..., x_{k-1}, x + c_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1, x_2, ..., x_k)\right].
\end{aligned}$$

Dacă $h \to 0$ ne va rezulta $h_j \to 0$, şi implicit $c_j \to 0$, pentru orice $j \in \overline{1, k}$. De asemenea, $\frac{|h_j|}{\|h\|} \leq 1$, pentru orice $j \in \overline{1, k}$, iar $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ fiind continue în x, vom avea că

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1 + c_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) \to \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_k),$$

$$...$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1, ..., x_{k-1}, x + c_k) \to \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_k)$$

dacă $h \to 0$.
Atunci, putem scrie că

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_i(x+h) - f_i(x) - Th}{\|h\|} = 0,$$

deci f_i este diferenţiabilă în x. Teorema este complet demonstrată. $\square$

Există funcţii diferenţiabile pentru care nu este îndeplinit criteriul dat de Teorema 10.4.12 (condiţiile nu sunt necesare).

Exerciţiul 10.3 Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este diferenţiabilă în $(0,0)$ (pe $\mathbb{R}^2$), dar derivatele parţiale nu sunt continue în $(0,0)$.

Soluţie. Obţinem, cu definiţia, că $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, iar pentru $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Considerăm

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{f(u,v) - f(0,0)}{\|(u,v)\|_2} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}} \sin \frac{1}{u^2+v^2}.$$

Cum

$$0 \leq \left| \frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}} \sin \frac{1}{u^2+v^2} \right| < |u| \cdot \left| \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \right| \cdot \left| \sin \frac{1}{u^2+v^2} \right| \leq |u|,$$

rezultă că funcţia f este diferenţiabilă în $(0,0)$, cu $df(0,0) = 0$.

Luând şirul $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$, obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sin \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \cos \frac{n^2}{2},$$

deci nu există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$, aşadar nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Analog pentru $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Aşadar, nu putem aplica criteriul de diferenţiabilitate dat de teorema anterioară.

Desigur, în orice punct $(x,y) \neq (0,0)$ rezultă că f este diferenţiabilă deoarece $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue. $\square$