Curs 11

Aplicaţii ale calculului diferenţial. Puncte de extrem

11.1 Diferenţiale de ordin superior

Să trecem acum la definirea diferenţialelor de ordin superior.

Definiţia 11.1.1 *Fie $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem că f este* ***diferenţiabilă de ordinul** n **în*** *$x \in D$ dacă f este derivabilă parţial de ordinul $(n-1)$ pe o vecinătate $V \subset D$ a lui x, iar derivatele parţiale de ordinul $(n-1)$ sunt diferenţiabile în x.*

Vom spune că f este ***diferenţiabilă de ordinul** n **pe*** *D dacă f este diferenţiabilă de ordinul n în orice $x \in D$.*

Reamintim că, pentru o funcţie diferenţiabilă într-un punct x, avem formula

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot dx_k.$$

Va fi atunci natural să considerăm următoarea definiţie a diferenţialelor de ordin superior.

Definiţia 11.1.2 *Fie $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă de ordin n în $x \in D$. Numim* ***diferenţială de ordin*** *n a funcţiei f în punctul x aplicaţia $d^n f(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dată prin*

$$d^n f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot dx_k \right)^{(n)},$$

unde notaţia din membrul drept semnifică faptul că expresia din paranteză se ridică, formal, la puterea simbolică n după o formulă de tip binomial, în care puterea semnifică ordinul de derivare.

Astfel,

$$\begin{array}{lll}
\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^{(n)} & \textit{reprezintă} & \frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}(x) \\
\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^{(n-1)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right) & \textit{reprezintă} & \frac{\partial^n f}{\partial x_i^{n-1} \partial x_j}(x) \\
\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^{(n-2)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)^{(2)} & \textit{reprezintă} & \frac{\partial^n f}{\partial x_i^{n-2} \partial x_j^2}(x) \ \textit{etc. ...,}
\end{array}$$

sau, în general,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right)^{(\alpha_1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right)^{(\alpha_2)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\right)^{(\alpha_k)} \quad \textit{reprezintă} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_k^{\alpha_k}}(x),$$

unde $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k=n$.

Observaţia 11.1.3 *Să observăm acum că, deoarece f este diferenţiabilă de ordinul n în x, toate derivatele parţiale de ordin n există în baza Definiţiei 11.1.1. De asemenea, dacă o funcţie este diferenţiabilă de ordinul n într-un punct, atunci derivatele parţiale mixte de orice ordin mai mic sau egal cu n există şi sunt egale.*

În baza formulei de mai sus rezultă că, în cazul $n=2$, diferenţiala de ordinul II a funcţiei f va avea formula

$$\begin{aligned} d^2f(x) &= \sum_{1\le i,j\le k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\cdot dx_i\cdot dx_j \\ &= \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)\cdot(dx_i)^2+2\cdot\sum_{i<j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\cdot dx_i\cdot dx_j \end{aligned} \tag{11.1}$$

sau, pentru orice $h=(h_1,...,h_k)\in\mathbb{R}^k$,

$$d^2f(x)(h)=\sum_{1\le i,j\le k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\cdot h_i\cdot h_j,$$

adică diferenţiala de ordinul II este o formă pătratică. Matricea ataşată acestei forme pătratice este

$$H=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right]$$

şi se numeşte ***matricea hessiană*** *a lui f în x care, în baza egalităţii derivatelor mixte, este o matrice simetrică.*

Ca de obicei, vom particulariza în cazurile $k=2$ şi $k=3$. Vom avea astfel, pentru $k=2$

$$d^2f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot(dx)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\cdot(dy)^2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\cdot dx\cdot dy$$

şi, pentru $k=3$,

$$\begin{aligned} d^2f(x,y,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)\cdot(dx)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)\cdot(dy)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)\cdot(dz)^2 \\ &+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)\cdot dx\cdot dy+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)\cdot dx\cdot dz+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)\cdot dy\cdot dz. \end{aligned}$$

Exerciţiul 11.1 Să se scrie diferenţiala de ordinul II a funcţiei $f:(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=x^y$$

în punctul $(1,2)$, aplicată în $(-3,2)$.
Vom avea

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=f''_{xx}(x,y)=\left(y\cdot x^{y-1}\right)'_x=y\cdot(y-1)\cdot x^{y-2}, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=f''_{yy}(x,y)=(x^y\cdot\ln x)'_y=\ln x\cdot(x^y)'_y=\ln x\cdot x^y\cdot\ln x=x^y\cdot\ln^2 x, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (x^y \cdot \ln x)'_x = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = \left(y \cdot x^{y-1}\right)'_y = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x.$$

Rezultă

$$d^2 f(x,y) = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2} \cdot (dx)^2 + x^y \cdot \ln^2 x \cdot (dy)^2 + 2 \cdot \left(yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}\right) \cdot dx \cdot dy,$$

de unde

$$d^2 f(1,2) = 2(dx)^2 + 2 \cdot dx \cdot dy.$$

Aşadar,

$$d^2 f(1,2)(h_1,h_2) = 2h_1^2 + 2h_1 h_2$$

şi

$$d^2 f(1,2)(-3,2) = 18 - 12 = 6.$$

Definiţia 11.1.4 *Spunem că f este* **de clasă $\mathcal{C}^1$ pe mulţimea** *D dacă f este diferenţiabilă pe D şi df este continuă pe D. Inductiv, vom spune că f este* **de clasă** *C^n* **pe mulţimea** *D dacă f este diferenţiabilă de ordin n pe D şi $d^n f$ este continuă pe D. Vom nota*

$$\mathcal{C}^n(D) = \{f : D \to \mathbb{R}^p \mid f \text{ este de clasă } \mathcal{C}^n \text{ pe } D\},\ n \in \mathbb{N}^*$$

şi, prin conventie,

$$\mathcal{C}^0(D) = \{f : D \to \mathbb{R}^p \mid f \text{ continuă pe } D\}.$$

Spunem că f este de **clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe mulţimea** *D dacă f este diferenţiabilă de orice ordin pe D. Vom nota*

$$\mathcal{C}^\infty(D) = \{f : D \to \mathbb{R}^p,\ f \text{ este de clasă } \mathcal{C}^\infty \text{ pe } D\}.$$

11.2 Formula lui Taylor

Pentru două puncte $a, b \in \mathbb{R}^k$, vom nota cu $[a,b]$ segmentul închis de extremităţi a, b,

$$[a,b] = \{a + t(b-a) \mid 0 \le t \le 1\}.$$

Să formulăm acum extinderea Teoremei lui Taylor la cazul funcţiilor de variabilă vectorială.

Teorema 11.2.1 (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange) *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă de ordin $n+1$ pe D şi punctele distincte $a, x \in D$ astfel încât $[a,x] \subset D$. Atunci există $c \in (a,x)$ astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) &+ \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2 f(a)(x-a) \\ &+ \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(a)(x-a) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(c)(x-a). \end{aligned} \tag{11.2}$$

Demonstraţie. Fie $\{a + tv \mid t \in R\}$ dreapta care trece prin a şi are direcţia $v \neq 0 \in R^k$. Definim funcţia $h(t) = f(g(t)) = f(a+tv) = (f \circ g)(t)$, unde $g(t) = a + tv$. Avem din regula lanţului că

$$\begin{aligned} h'(t) \cdot dt &= dh(t) = df(g(t)) \circ dg(t) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+tv) \cdot dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a+tv) \cdot dx_k\right) \circ (v_1, \ldots, v_k) \cdot dt, \end{aligned}$$

deci
$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+tv)\cdot v_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a+tv)\cdot v_k = df(a+tv)(v),$$
pentru orice t suficient de mic astfel încât $a+tv$ să rămână în D.
Diferenţiind h' folosind din nou regula lanţului, obţinem
$$\begin{aligned} h''(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+tv)\right)v_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+tv)\right)v_k\right)v_1 + ... \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(a+tv)\right)v_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(a+tv)\right)v_k\right)v_k \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a+tv)v_1^2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(a+tv)v_k v_1\right) + ...+ \\ &\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(a+tv)v_1 v_k + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(a+tv)v_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+tv)v_i v_j = d^2 f(a+tv)(v). \end{aligned}$$
Putem diferenţia în continuare h'' pentru a obţine
$$h^{(3)}(t) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(a+tv)v_i v_j v_l = d^3 f(a+tv)(v),$$
şi în general
$$h^{(l)}(t) = \sum_{i_1=1}^{k}...\sum_{i_l=1}^{k}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_l}}(a+tv)d_{i_1}\cdot ... \cdot d_{i_l} = d^l f(a+tv)(v)$$
pentru orice $l \in \overline{1, k+1}$.

Aplicăm acum Formula lui MacLaurin cu restul lui Lagrange funcţiei h şi obţinem că există $\xi \in (0,t)$ (sau $(t,0)$) astfel încât
$$h(t) = h(0) + \frac{t}{1!}h'(0) + ... + \frac{t^n}{n!}h^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}h^{(n+1)}(\xi).$$

Luând $v := x-a$ şi $t := 1$, vom obţine existenţa lui $c := a + \xi(x-a) \in (a,x)$ (căci $\xi \in (0,1)$) astfel încât are loc (11.2). □

11.3 Aplicaţii ale calculului diferenţial în optimizare

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime dechisă nevidă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $M \subset D$ o mulţime nevidă. Observăm că putem extinde definiţia punctelor de extrem local din cazul funcţiilor reale (i.e., Definiţia **??**) în această situaţie, după cum urmează.

Definiţia 11.3.1 *Spunem că $a \in M$ este:*

*(i) **punct de minim local** pentru f pe mulţimea M dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in M \cap V$;*

*(ii) **punct de maxim local** pentru f pe mulţimea M dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \geq f(x)$, pentru orice $x \in M \cap V$;*

*(iii) **punct de extrem local** pentru f pe mulţimea M dacă e punct de minim sau de maxim local.*

Dacă $M = D$ în definiţia de mai sus, vom spune că punctul a este punct de minim (respectiv, maxim, extrem) local pentru f. În cazul în care în definiţia de mai sus $V = \mathbb{R}^k$, vom spune că punctul a este punct de minim (respectiv, maxim, extrem) global pentru f pe M.

În acest caz, are loc următoarea extindere a Teoremei lui Fermat.

Teorema 11.3.2 (Fermat) *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în $a \in D$. Dacă a este punct de extrem local pentru f, atunci a este punct critic, adică*

$$df(a) = 0.$$

Demonstraţie. Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că a este punct de minim local pentru f. Pentru o direcţie oarecare $v \in \mathbb{R}^k$, vom avea

$$\frac{df}{dv}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = df(a)(v).$$

În cazul în care $|t|$ este suficient de mic, numărătorul fracţiei de mai sus este negativ, deoarece a este punct de minim local. Luând limitele la stânga şi la dreapta în expresia de mai sus, ambele egale cu $\frac{df}{dv}(a)$, obţinem $\frac{df}{dv}(a) \leq 0$ şi $\frac{df}{dv}(a) \geq 0$, adică $\frac{df}{dv}(a) = df(a)(v) = 0$, pentru orice $v \in \mathbb{R}^k$, de unde avem concluzia. □

Observaţia 11.3.3 *Teorema lui Fermat oferă, ca în cazul scalar, condiţii necesare pentru ca un punct să fie de extrem local. Aceste condiţii nu sunt suficiente, după cum reiese din următorul exemplu: fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$f(x, y) := x^2 - y^2.$$

Atunci $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$, deci $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ şi $df(0, 0) = 0$. Totuşi, pentru orice $\varepsilon > 0$, vom avea

$$f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0 = f(0, 0) \text{ şi}$$
$$f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0 = f(0, 0),$$

ceea ce arată că $(0, 0)$ nu este punct de extrem local.

Mai mult, dacă notăm $(a, b) := (0, 0)$, vom avea

$$f(a, y) \leq f(a, b) \leq f(x, b), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{11.3}$$

*Un punct (a, b) care verifică o relaţie de tip (11.3) pe o vecinătate a sa se numeşte **punct şa pentru** f. Aşadar, în cazul nostru, $(0, 0)$ este punct şa pentru funcţia f.*

Pentru a determina punctele critice, sau **staţionare**, trebuie deci să rezolvăm sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Punctele de extrem se află printre soluţiile acestui sistem. Pentru a putea decide care dintre punctele staţionare este punct de extrem vom folosi următorul rezultat:

Teorema 11.3.4 (Condiţii suficiente de ordinul II) *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$ pe D şi $a \in D$ astfel încât $df(a) = 0$. Dacă:*

(i) $d^2f(a)$ este pozitiv definită, adică $d^2f(a)(h) > 0$, pentru orice $h \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, atunci a este punct de minim local pentru f;

(ii) $d^2f(a)$ este negativ definită, adică $d^2f(a)(h) < 0$, pentru orice $h \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, atunci a este punct de maxim local pentru f;

(iii) $d^2f(a)$ este nedefinită, adică există $x, y \in \mathbb{R}^k$ astfel încât $d^2f(a)(x) > 0$ şi $d^2f(a)(y) < 0$, atunci a nu este punct de extrem pentru f.

Demonstraţie. Se foloseşte Formula lui Taylor. □

Următorul rezultat, ce reprezintă un caz particular al teoremei anterioare, poate fi util uneori.

Teorema 11.3.5 *Fie f o funcţie de clasă C^2 pe un deschis $D \subset \mathbb{R}^n$ şi $a \in D$ un punct critic. Fie H matricea hessiană în care vom nota, pentru uşurinţa scrierii $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \alpha_{ij}$.*

1. *Dacă toate numerele*

$$\Delta_1 = \alpha_{11} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

   sunt strict pozitive, atunci $d^2f(a)$ este pozitiv definită şi a este punct de minim local;

2. *Dacă toate numerele*

$$-\Delta_1, \quad \Delta_2, ..., (-1)^n \Delta_n$$

   sunt strict pozitive, atunci $d^2f(a)$ este negativ definită şi a este punct de maxim local.

Exemplul 11.3.6 Să se determine punctele de extrem ale funcţiei

$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz.$$

Avem,mai întâi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2x \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4z + 2x.$$

Rezolvând sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \; \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \; \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

găsim $a = (0, 0, 0)$ ca singurul punct staţionar. Construim mai departe matricea hessiană calculând derivatele parţiale de ordinul 2 şi obţinem

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se calculează imediat $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 12 > 0$, $\Delta_3 = 8 > 0$ ceea ce spune că $d^2f(0, 0, 0)$ este pozitiv definită, deci $(0, 0, 0)$ este punct de minim local.

Pentru funcţii de două variabile, Teorema 11.3.4 poate fi pusă sub forma:

Teorema 11.3.7 *Fie f o funcţie de clasă C^2 pe un deschis $D \subset \mathbb{R}^n$ şi $a \in D$ un punct critic pentru f. Notăm $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. Dacă:*

1. *$B^2 - AC < 0$ şi $A > 0$, atunci a este punct de minim local.*
2. *$B^2 - AC < 0$ şi $A < 0$, atunci a este punct de maxim local.*
3. *$B^2 - AC > 0$, atunci a nu este punct de extrem.*

Observaţia 11.3.8 *Dacă $B^2 - AC = 0$ nu ne putem pronunţa dacă a este punct de extrem sau nu. În acest caz trebuie să studiem diferenţialele de ordin superior ale lui f.*

Să ilustrăm cele spuse anterior prin câteva exemple suplimentare.

Exerciţiul 11.2 Determinaţi extremele locale libere ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x, y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Punctele critice ale funcţiei f se vor determina rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0. \end{cases}$$

Soluţiile vor fi vectorii $\theta = (0, 0)$, $a = (-1, -1)$, $b = (1, 1)$.

Determinăm diferenţiala de ordinul II pentru fiecare dintre aceste puncte. Pentru aceasta, calculăm

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2. \end{cases}$$

Vom avea

$$d^2 f(x, y)(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \cdot h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \cdot h_1 h_2.$$

Pentru θ, obţinem

$$d^2 f(\theta)(h_1, h_2) = -2 \left(h_1 + h_2\right)^2,$$

o formă pătratică pozitiv semidefinită, deci nu putem aplica Teorema 11.3.4. Observăm însă că, pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic, avem $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^4 - \varepsilon^2 < 0 = f(0, 0)$, iar $f(\varepsilon, -\varepsilon) = 2\varepsilon^4 > 0 = f(0, 0)$, de unde rezultă că θ nu este punct de extrem.

Pentru a, vom obţine

$$d^2 f(a)(h_1, h_2) = 2\left(5h_1^2 - 2h_1 h_2 + 5h_2^2\right),$$

a cărei matrice este

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ne va rezulta că $d^2 f(a)$ este pozitiv definită, deci a este punct de minim local.

Pentru b, vom avea de asemenea

$$d^2 f(b)(h_1, h_2) = 2\left(5h_1^2 - 2h_1 h_2 + 5h_2^2\right),$$

deci şi b este punct de minim local pentru f.

Exerciţiul 11.3 Găsiţi extremele locale libere ale funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := (ax^2 + by^2 + cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2},$$

unde $a > b > c > 0$ sunt parametri fixaţi.

Determinăm mai întâi punctele critice. Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x^2-y^2-z^2} \cdot 2x(a - ax^2 - by^2 - cz^2) = 0 \\ e^{-x^2-y^2-z^2} \cdot 2y(b - ax^2 - by^2 - cz^2) = 0 \\ e^{-x^2-y^2-z^2} \cdot 2z(c - ax^2 - by^2 - cz^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(a - ax^2 - by^2 - cz^2) = 0 \\ y(b - ax^2 - by^2 - cz^2) = 0 \\ z(c - ax^2 - by^2 - cz^2) = 0. \end{cases}$$

Să observăm că două paranteze din cele de mai sus nu se pot anula simultan, din cauza condiţiei puse asupra lui a, b, c. Vom obţine aşadar punctele critice $(0, 0, 0)$, $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$

Obţinem pentru diferenţialele de ordin II:

$$d^2 f(0, 0, 0)(h_1, h_2, h_3) = 2\left(ah_1^2 + bh_2^2 + ch_3^2\right),$$

deci $(0, 0, 0)$ este punct de minim local,

$$\begin{aligned} d^2 f(1, 0, 0)(h_1, h_2, h_3) &= 2e^{-1}\left[-2ah_1^2 + (b - a)h_2^2 + (c - a)h_3^2\right] \\ &= d^2 f(-1, 0, 0)(h_1, h_2, h_3), \end{aligned}$$

de unde $(\pm 1, 0, 0)$ sunt puncte de maxim local,

$$\begin{aligned} d^2 f(0, 1, 0)(h_1, h_2, h_3) &= 2e^{-1}\left[(a - b)h_1^2 - 2bh_2^2 + (c - a)h_3^2\right] \\ &= d^2 f(0, -1, 0)(h_1, h_2, h_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 f(0, 0, 1)(h_1, h_2, h_3) &= 2e^{-1}\left[(a - c)h_1^2 + (b - c)h_2^2 - 2ch_3^2\right] \\ &= d^2 f(0, 0, -1)(h_1, h_2, h_3), \end{aligned}$$

de unde $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$ nu sunt puncte de extrem.

Exerciţiul 11.4 Să se demonstreze inegalitatea

$$|(x + y)e^{-x^2-y^2}| \le \frac{1}{\sqrt{e}}, \ \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soluţie. Determinăm extremele globale ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x + y)e^{-x^2-y^2}.$$

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{-x^2-y^2}(1 - 2x(x + y)), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{-x^2-y^2}(1 - 2y(x + y)).$$

Punctele critice ale lui f sunt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ care sunt puncte de maxim, respectiv minim local

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{e}}.$$