Curs 2

Şiruri de numere reale

Vom studia şirurile de numere reale, în special noţiunea de convergenţă a şirurilor.

Definiţia 2.0.1 *Un* ***şir de numere reale*** *este o funcţie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

În acest caz $f(n) = x_n$ şi notăm şirul prin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau (x_n).
x_n se numeşte **termenul de rang** n al şirului. $x_0, x_1, x_2, x_3, ...$ se numesc termenii şirului.

Definiţia 2.0.2 *Fie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *un şir. Se numeşte* ***subşir*** *restricţia lui* f *la o submulţime numărabilă* $N_1 \subset \mathbb{N}$.

2.1 Modalităţi de definire a unui şir

I. Şiruri definite prin formula termenului general x_n.

$$x_n = \frac{n+1}{n^2}, n \geq 1.$$

II. Şiruri definite printr-o relaţie de recurenţă: un termen al şirului se exprimă în funcţie de k termeni anteriori, $k \geq 1$. În acest caz trebuie precizaţi şi primii k termeni ai şirului.

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}, n \geq 1, x_1 = \sqrt{2}\,(k = 1);$$
$$x_{n+2} = x_n^2 - 3x_{n+1} + 2, n \geq 0, x_0 = 1, x_1 = 2\,(k = 2);$$
$$x_0 = x, x_{n+1} = x_n + r, \text{ numerele } x, r \in \mathbb{R} \text{ date (progresie aritmetică)};$$
$$x_0 = x, x_{n+1} = x_n q, \text{ numerele } x, q \in \mathbb{R} \text{ date (progresie geometrică)}.$$

III. Şiruri definite descriptiv.

$$x_1 = 1, x_2 = 11, ..., x_n = \underbrace{11...1}_{n}.$$

Putem descrie astfel: fiecare termen se scrie cu ajutorul cifrei 1 şi numărul cifrelor de 1 este egal cu rangul termenului.

2.2 Şiruri monotone

Definiţia 2.2.1 *Un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se numeşte:*
a) ***crescător*** *dacă* $x_n \leq x_{n+1}$, *pentru* $n \in \mathbb{N}$, *sau, echivalent,*

$$x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq x_{n-1} \leq ...$$

*b) **strict crescător** dacă $x_n < x_{n+1}$, pentru $n \in \mathbb{N}$, sau, echivalent,*

$$x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n-1} < ...$$

*c) **descrescător** dacă $x_n \geq x_{n+1}$, pentru $n \in \mathbb{N}$, sau, echivalent,*

$$x_0 \geq x_1 \geq ... \geq x_n \geq x_{n-1} \geq ...$$

*d) **strict descrescător** dacă $x_n > x_{n+1}$, pentru $n \in \mathbb{N}$, sau, echivalent,*

$$x_0 > x_1 > ... > x_n > x_{n-1} > ...$$

Definiţia 2.2.2 *Un şir crescător sau descrescător se numeşte şir **monoton**. Un şir strict crescător sau strict descrescător se numeşte **strict monoton**.*

Se verifică uşor că orice subşir al unui şir monoton este un şir monoton.

Procedee utilizate pentru demonstrarea monotoniei unui şir

I. Prin folosirea definiţiei:

$$x_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N},$$

Avem $x_n < x_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \Leftrightarrow n(n+2) < (n+1)^2 \Leftrightarrow 0 < 1, \forall n \geq 0.$

II. Prin calculul diferenţei $x_{n+1} - x_n$ sau $x_n - x_{n+1}$ şi compararea cu zero:

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}, n \geq 1.$$

Calculăm

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - \\ &- \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} > 0, \end{aligned}$$

de unde $x_{n+1} > x_n$, pentru orice $n \geq 1$, deci (x_n) este un şir strict crescător.

III. Prin calculul raportului $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ sau $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$ şi compararea cu 1:

$$x_n = \frac{2^n}{n^2}, n \geq 1.$$

Avem:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{n+1} \leq 1, \quad n \geq 1.$$

Rezultă că, deoarece $x_n > 0$, $x_{n+1} \leq x_n$ şi deci şirul este monoton descrescător.

2.3 Şiruri mărginite

Definiţia 2.3.1 *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **mărginit** dacă mulţimea termenilor şirului este mărginită.*

Propoziţia 2.3.2 *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit dacă şi numai dacă există $M > 0$ astfel încât $|x_n| \leq M$ (M se presupune independent de n).*

Observaţia 2.3.3 *Este suficient ca inegalitatea să fie verificată numai începând cu un anumit rang.*

Propoziţia 2.3.4 *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit dacă şi numai dacă oricare ar fi $M > 0$ există un termen x_k din şir astfel încât $|x_k| > M$.*

În limbaj geometric, un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit dacă în afara oricărui interval mărginit există cel puţin un termen din şir.

Exemplul 2.3.5 Şirul $1, 2, ..., n, ...$ este minorat (de 0, de exemplu) dar nu este majorat. Conform Lemei lui Arhimede, oricare ar fi $M > 0$ există un număr natural $n > M$.

Şirul $x_n = (-1)^n$ este mărginit, $|(-1)^n| \leq 1$.

Şirul $y_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$ nu este mărginit.

Dacă $x > 1$, şirul $1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...$ este nemărginit.

2.4 Şiruri convergente

Definiţia 2.4.1 *Un şir de numere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **are limita** $x \in \mathbb{R}$ dacă în orice vecinătate a lui x se află toţi termenii şirului cu excepţia unui număr finit de termeni ai lui, adică $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita x dacă*

$$\forall V \in \mathcal{V}_x, \exists n_V \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_V : x_n \in V.$$

Dacă n_V este rangul primului termen al şirului care se află în V, atunci

- în V se găsesc termenii $x_{n_V}, x_{n_V+1}, x_{n_V+2}, ...$

- în afara lui V se găsesc termenii $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n_V-1}$

Scriem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **are limita** $x \in \mathbb{R}$ astfel: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$.

Definiţia 2.4.2 *Un şir de numere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **convergent** dacă are limită în $\mathbb{R}$. Dacă şirul nu are limită, sau are limită, dar aceasta este ∞ sau $-\infty$, atunci spunem că şirul este **divergent**.*

Teorema 2.4.3 (Teorema de caracterizare a şirurilor convergente) *Şirul de numere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Fie $V \in \mathcal{V}_x, V = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Conform definiţiei

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Suficienţa. Presupunem că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon$. Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ folosind definiţia limitei.

Fie V o vecinătate arbitrară a lui x. Din definiţia vecinătăţii rezultă că vecinătatea V va conţine o vecinătate simetrică a lui x, adică $\exists\varepsilon > 0$ astfel încât $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$. Conform ipotezei pentru acest $\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$. Aceasta implică faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. □

Exerciţiul 2.1 Fie şirul staţionar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_1 = x_2 = ... = x_n = ... = x$. Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Soluţie. Conform teoremei de caracterizare a şirurilor convergente,
$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| = |x - x| = 0 < \varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. □

Exerciţiul 2.2 Şirul $x_n = (-1)^n (n \geq 1)$ nu este convergent.

Soluţie. Presupunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Atunci există $n_\varepsilon \geq 1$ astfel încât $|x_n - x| < \frac{1}{2}, \forall n \geq n_\varepsilon$. Luând n par obţinem $|1 - x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, iar dacă luăm n impar obţinem $|-1 - x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, absurd. Deci şirul nu este convergent. □

Exerciţiul 2.3 Fie şirul $x_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluţie. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. □

2.4.1 Proprietăţi ale şirurilor convergente

Teorema 2.4.4 *1. Limita unui şir de numere reale, dacă există, este unică.*
2. Orice subşir al unui şir convergent este convergent la aceeaşi limită.
3. Orice şir convergent este mărginit.

Demonstraţie. 1. Să presupunem prin reducere la absurd că există un şir (x_n) care admite două limite diferite, $x, x' \in \mathbb{R}$. Atunci, conform proprietăţii de separaţie Hausdorff, există două vecinătăţi disjuncte ale celor două numere, $U \in \mathcal{V}_x$ şi respectiv $V \in \mathcal{V}_{x'}, (U \cap V = \emptyset)$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, conform definiţiei limitei, în afara lui U rămâne doar un număr finit de termeni. Astfel, V nu poate conţine decât un număr finit de termeni ai şirului, iar în afara sa rămân o infinitate de termeni (cel puţin toţi termenii care se află în U). Acest lucru contrazice însă faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x'$. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă şi deci limita unui şir, dacă există, este unică.

2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ atunci în afara oricărei vecinătăţi a lui x se află un număr finit de termeni ai şirului, deci cu atât mai mult un număr finit de termeni ai oricărui subşir al său. Deci orice subşir al unui şir convergent are aceeaşi limită cu şirul iniţial.

3. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ vom avea luând $\varepsilon = 1$ pentru $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - x| < 1 \Rightarrow |x_n| = |x + x_n - x| \leq |x| + |x_n - x| < |x| + 1 \Rightarrow \forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n| < |x| + 1$. Dacă notăm $M = \max\{|x_1|, ..., |x_{n_1-1}|, |x| + 1\}$ rezultă $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Observaţia 2.4.5 *Conform acestei teoreme, dacă un şir are două subşiruri convergente la limite diferite, atunci şirul este divergent. Astfel, de exemplu, şirul* $x_n = (-1)^n$ *analizat anterior conţine subşirurile* $x_{2n} = 1$, *care are limita* 1, *şi* $x_{2n+1} = -1$, *care are limita* -1. *Deci,* $x_n = (-1)^n$ *este un şir divergent.*

Observaţia 2.4.6 *Dacă un şir nu este mărginit, atunci el este divergent.*

Exerciţiul 2.4 Să se arate că şirul $x_n = 1 + (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$, nu are limită.

Soluţie. Presupunem că x_n are limită; fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Deoarece orice subşir al unui şir convergent este convergent la aceeaşi limită rezultă că $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$. Dar $x_{2n} = 2$, $x_{2n+1} = 0$, subşiruri constante, rezultă $2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0$, absurd.

Deci, dacă un şir are două subşiruri convergente la limite diferite, atunci şirul este divergent.

Mărginirea este o condiţie necesară, nu şi suficientă pentru convergenţă. Şirul $x_n = (-1)^n$ deşi este mărginit, $|x_n| \le 1$, nu este convergent. □

Observaţia 2.4.7 *Dacă unui şir îi adăugăm sau eliminăm un număr finit de termeni, atunci natura şirului nu se schimbă. În caz de convergenţă nu se schimbă nici limita.*

2.4.2 Operaţii cu şiruri convergente

Vom studia operaţiile cu şiruri şi legăturile între limitele şirurilor şi limita rezultatului operaţiei.

Teorema 2.4.8 *1.Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt două şiruri convergente, şirul sumă este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Analog, şirul produs este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ atunci există un $k \in N$ astfel încât $x_n \neq 0$ pentru $n \ge k$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}.$$

Demonstraţie. 1. Deoarece $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt două şiruri convergente rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. De aici rezultă că

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_\varepsilon : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \ge n'_\varepsilon : |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Dar

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$$

pentru $\forall n \ge \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Apoi

$$|x_n y_n - xy| = |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| \le |x_n| |y_n - y| + |x_n - x| |y|.$$

Conform teoremei 2.4.4 punctul 3, (x_n) este mărginit, $|x_n| \le M, \forall n \in \mathbb{N}$, rezultă

$$|x_n y_n - xy| \le M |y_n - y| + |x_n - x| |y| \le A (|y_n - y| + |x_n - x|) < A\varepsilon < \varepsilon',$$

de unde $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2. Din $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ rezultă

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon.$$

Deoarece

$$|x| = |(x - x_n) + x_n| \leq |x_n| + |x_n - x|\,,$$

luând $\varepsilon = \frac{1}{2}|x|$ rezultă

$$|x_n| \geq |x| - \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x| > 0$$

pentru $n \geq n_{\frac{1}{2}|x|}$. Deci pentru $n \geq n_{\frac{1}{2}|x|}$ are sens şirul $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ şi deoarece

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x_n - x|}{|x_n|\,|x|} \leq \frac{2}{|x|^2}|x_n - x| < \frac{2}{|x|^2}\varepsilon < \varepsilon',$$

(am folosit $|x_n| \geq \frac{1}{2}|x| \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x_n|} \leq \dfrac{2}{|x|}$), rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x}$. □

Din această teoremă decurg regulile de calcul posibile pentru operaţia de trecere la limită.

2.4.3 Criterii de convergenţă

Vom prezenta în continuare criterii şi teoreme cu ajutorul cărora vom putea calcula limita unui şir.

Propoziţia 2.4.9 (Criteriul majorării pentru şiruri) *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri astfel încât $y_n \geq 0$, $|x_n - x| \leq y_n, \forall n \geq n_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.*

Demonstraţie. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ atunci rezultă că $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |y_n - 0| = |y_n| < \varepsilon$. Deoarece $|x_n - x| \leq y_n$ rezultă că $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$ şi deci convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Exerciţiul 2.5 Se consideră şirul $x_n = \dfrac{1}{n^k}, n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluţie. Deoarece $n^k > n, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n^k} < \dfrac{1}{n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k} = 0$.□

Exerciţiul 2.6 Fie şirul $x_n = \dfrac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_k}{b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + ... + b_p}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $k, p \in \mathbb{R}_+$, $b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + ... + b_p \neq 0$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } k = p, \\ 0, & \text{dacă } p > k, \\ \infty \operatorname{sgn}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } p < k. \end{cases}$$

Soluţie. Se scrie x_n de forma

$$x_n = \frac{n^k\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + ... + \frac{a_k}{n^k}\right)}{n^p\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + ... + \frac{b_p}{n^p}\right)}.$$

Dacă $k = p$,
$$x_n = \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + ... + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + ... + \frac{b_p}{n^p}}.$$
Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_i}{n^i} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_i}{n^i} = 0$ obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{a_0}{b_0}$.
Dacă $p > k, p - k > 0$ şi
$$x_n = \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + ... + \frac{a_k}{n^k}}{n^{p-k}\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + ... + \frac{b_p}{n^p}\right)},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p-k}} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + ... + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + ... + \frac{b_p}{n^p}} = \frac{a_0}{b_0},$$
de unde deducem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
Dacă $p < k, k - p > 0$ şi
$$x_n = \frac{n^{k-p}\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + ... + \frac{a_k}{n^k}\right)}{b_0 + \frac{b_1}{n} + ... + \frac{b_p}{n^p}}, k - p > 0,$$
deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \operatorname{sgn} \frac{a_0}{b_0}$. □

Exerciţiul 2.7 Fie şirul $x_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluţie. Deoarece $2^n > n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. □

Exerciţiul 2.8 Fie şirul $x_n = \frac{1}{n}\sin(n!), n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluţie. Evident $\left|\frac{1}{n}\sin(n!)\right| \le \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \to 0$ deci, conform criteriului majorării, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin(n!) = 0$. □

Propoziţia 2.4.10 *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$ *(reciproca nu este adevărată decât în cazul* $x = 0$*).*

Demonstraţie. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, avem că
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon.$$
Pe baza inegalităţii $||x_n| - |x|| \le |x_n - x| < \varepsilon$ rezultă că
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_\varepsilon : ||x_n| - |x|| < \varepsilon$$
şi, conform teoremei de caracterizare a unui şir convergent de numere reale rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

Pentru a observa că reciproca nu este adevărată, de exemplu considerăm $x_n = (-1)^n$. Acest şir este divergent, dar şirul $|x_n| = |(-1)^n| = 1$ este convergent. □

Exerciţiul 2.9 Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1, \\ \nexists, & x \le -1. \end{cases}$$

Soluţie. 1. Justificăm $\lim_{n\to\infty} x^n = 0, |x| < 1$. Avem
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \ge n_\varepsilon$ implică

$$|x^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x|^n < \varepsilon \Rightarrow n \ln|x| < \ln\varepsilon,\ \ \ln|x| < 0$$
$$\Rightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} \Rightarrow n_\varepsilon = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}\right] + 1.$$

2. $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$ evident, şirul fiind un şir constant.
3. Justificăm $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty, x > 1$. Dacă $x > 1$ atunci putem scrie $x = 1 + \alpha, 0 < \alpha$, deci

$$x^n = (1+\alpha)^n = 1 + C_n^1\alpha + ... + C_n^n\alpha^n > 1 + C_n^1\alpha = 1 + n\alpha \to \infty.$$

4. Dacă $x \le -1$, $\lim_{n\to\infty} x^n$ nu există deoarece dacă limita ar exista, orice subşir trebuie să conveargă către aceeaşi limită, dar $x^{2n} > 0$, deci limita ar trebui să fie un număr pozitiv iar $x^{2n+1} < 0$, deci limita ar trebui să fie un număr negativ, absurd. □

Exerciţiul 2.10 Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Soluţie. 1. Dacă $\alpha > \beta$ dăm factor comun la numărator şi numitor pe α^n, respectiv α^{n+1}. Obţinem

$$x_n = \frac{1}{\alpha}\frac{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}.$$

Deoarece $\dfrac{\beta}{\alpha} < 1$, avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} = 0$$

şi rezultă $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}} = \dfrac{1}{\alpha}$.

2. Dacă $\alpha = \beta$ atunci $x_n = \dfrac{2\alpha^n}{2\alpha^{n+1}} = \dfrac{1}{\alpha} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{\alpha}$.

3. Dacă $\alpha < \beta$ dăm factor comun la numărator şi numitor pe β^n, respectiv β^{n+1}. Obţinem

$$x_n = \frac{1}{\beta}\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + 1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1} + 1}.$$

Deoarece $\dfrac{\alpha}{\beta} < 1$, avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1} = 0$$

şi rezultă $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}} = \dfrac{1}{\beta}$. □

Teorema 2.4.11 (Trecerea la limită în inegalităţi) *Dacă şirurile* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt astfel încât* $x_n \leq y_n$ *pentru* $n \geq n_1$ *şi dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ *atunci* $x \leq y$.

Demonstraţie. Fie $s_n = y_n - x_n$. Avem $s_n \geq 0$ dacă $n \geq n_1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = y - x = s$. Presupunem prin absurd că $s < 0$ atunci din $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon \Rightarrow s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon$ iar pentru $\varepsilon = -\dfrac{s}{2} > 0$, avem $s_n < s + \varepsilon = s - \dfrac{s}{2} = \dfrac{s}{2} < 0$ pentru $\forall n \geq \max\{n_\varepsilon, n_1\}$, ceea ce contrazice faptul că $s_n \geq 0$, deci $s = y - x \geq 0$. □

Observaţia 2.4.12 *Dacă* $x_n < y_n$ *pentru* $n \geq n_1$ *şi dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ *atunci* $x \leq y$. *De exemplu, pentru* $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ *şi* $b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ *avem* $a_n < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *dar* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Propoziţia următoare este un criteriu de convergenţă.

Propoziţia 2.4.13 (Lema cleştelui) *Dacă* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *pentru* $n \geq n_1$ *şi dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = x$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

Demonstraţie. Din inegalităţile $x_n \leq y_n \leq z_n$ şi scăzând din fiecare membru al inegalităţii date x_n, deducem $0 \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, pe baza criteriului majorării rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$.

Atunci

$$y_n = (y_n - x_n) + x_n,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} (y_n - x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 + \lim\limits_{n\to\infty} z_n = x$. □

2.4.4 Rezultate fundamentale

Teorema 2.4.14 (de convergenţă a şirurilor monotone)

1. Un şir de numere reale (x_n) *crescător şi majorat este convergent, iar*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

2. Un şir de numere reale (x_n) *descrescător şi minorat este convergent, iar*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm punctul 1. Pentru punctul 2., dacă (x_n) este descrescător, atunci $(-x_n)$ este crescător. Rezultatul este complet demonstrat aplicând 1. şi relaţia

$$\sup(-x_n) = -\inf x_n.$$

Pentru a demonstra 1., fie $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (există în $\mathbb{R}$ deoarece şirul este majorat). Conform teoremei de caracterizare a marginii superioare,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : M - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}.$$

Dar atunci, deoarece şirul (x_n) este crescător, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ avem:

$$M - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq M < M + \varepsilon$$

sau, echivalent,

$$|x_n - M| < \varepsilon.$$

Dar acest lucru arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (ceea ce trebuia demonstrat). $\square$

Exerciţiul 2.11 Să se studieze convergenţa şirului de termen general

$$x_n = \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{5+2(n-1)}{4+3(n-1)}.$$

Soluţie. Vom studia monotonia şi mărginirea. Pentru monotonie considerăm

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{5+2(n-1)}{4+3(n-1)} - \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{5+2(n-2)}{4+3(n-2)} \\ &= \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{5+2(n-2)}{4+3(n-2)}\left(\frac{5+2(n-1)}{4+3(n-1)} - 1\right) \\ &= \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{5+2(n-2)}{4+3(n-2)}\cdot\frac{2-n}{4+3(n-2)}. \end{aligned}$$

Pentru $n > 2, x_n - x_{n-1} < 0$, deci şirul este monoton descrescător.

Altă modalitate de a stabili monotonia: determinăm o relaţie între x_n şi x_{n+1}.

$$x_{n+1} = \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{5+2(n-1)}{4+3(n-1)}\cdot\frac{5+2n}{4+3n} = x_n\frac{5+2n}{4+3n}.$$

De aici rezultă că $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{5+2n}{4+3n} < 1$, deci şirul este monoton descrescător.

Deoarece şirul este mărginit inferior de 0 rezultă că este convergent.

Pentru a calcula limita folosim relaţia dintre x_n şi x_{n+1}. Avem $x_{n+1} = x_n\frac{5+2n}{4+3n}$. Trecând la limită şi ţinând seama că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$, obţinem

$$x = \frac{2}{3}x \Rightarrow x = 0,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. $\square$

Teorema 2.4.15 (Cantor) *Fie*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \ldots$$

un şir descrescător de intervale nemărginite şi închise ale lui $\mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. *Atunci intersecţia tuturor acestor intervale constă într-un singur punct, adică*

$$\exists x \in \mathbb{R} \textit{ astfel încât } \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}[a_n, b_n] = \{x\}.$$

Demonstraţie. Deoarece $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că

$$a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

adică şirul (a_n) este crescător, iar şirul (b_n) este descrescător. Mai mult, (a_n) este majorat de b_1 iar (b_n) este minorat de a_1 şi putem aplica teorema anterioară pentru a concluziona că şirurile (a_n) şi (b_n) sunt convergente. Având în vedere că $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ (din ipoteză), rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ şi notăm valoarea comună cu x.

Folosind Teorema 2.4.14, obţinem $a_n \leq x \leq b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deci,

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [a_n, b_n].$$

Fie y un alt punct al intersecţiei. Atunci, $a_n \leq y \leq b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi trecând din nou la limită în această inegalitate rezultă

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq y \leq \lim_{n\to\infty} b_n,$$

adică $x \leq y \leq x$, adică $x = y$. În concluzie, punctul x este unic şi teorema este complet demonstrată. □

Teorema 2.4.16 (Cesàro) *Orice şir mărginit de numere reale are cel puţin un subşir convergent.*

Demonstraţie. Fie (x_n) un şir mărginit de numere reale. Atunci există un interval pe care-l vom nota $[a_1, b_1]$ care conţine toţi termenii şirului. Alegem un termen oarecare, $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Cel puţin unul din intervalele $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ sau $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului. Notăm intervalul respectiv cu $[a_2, b_2]$ şi alegem un termen oarecare $x_{n_2} \in [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. Observăm că lungimea lui $[a_2, b_2]$ este $\frac{b_1-a_1}{2}$. Procedând în acelaşi mod, obţinem un interval

$$[a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$$

şi un element $x_{n_3} \in [a_3, b_3]$, iar lungimea intervalului $[a_3, b_3]$ este $\frac{b_2-a_2}{2}$. Inductiv, obţinem un şir de intervale $[a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{N}$, fiecare conţinând o infinitate de termeni ai şirului (x_n), din care am fixat un termen, $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. În plus, aceste intervale satisfac condiţiile teoremei lui Cantor:

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

iar

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = ... = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}},$$

de unde rezultă că $\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = 0$. Fie x punctul din teorema lui Cantor:

$$\{x\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} [a_k, b_k].$$

Atunci $x \in [a_k, b_k]$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Cum şi $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$ rezultă că

$$|x_{n_k} - x| \leq |b_k - a_k| = \frac{1}{2^{k-1}} (b_1 - a_1) \to 0.$$

Conform criteriului majorării, subşirul (x_{n_k}) este convergent şi are limita x iar teorema este demonstrată. □