Curs 3

Şiruri de numere reale

3.1 Şiruri convergente

3.1.1 Numărul e

O aplicaţie importantă priveşte existenţa numărului e.

Propoziţia 3.1.1 *Şirul*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$$

este monoton şi mărginit şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n \overset{def}{=} e.$$

Demonstraţie. Observăm că

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k k!} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Atunci

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \frac{1}{k!} > x_n, \tag{3.1}$$

observând că $1 - \dfrac{j}{n} < 1 - \dfrac{j}{n+1}, 1 \leq j \leq k-1, \forall k \geq 2$. Din (3.1) rezultă

$$2 \leq x_n \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = y_n, \forall n \geq 1.$$

Observăm că pentru $k \geq 2$, $k! = 2 \cdot 3 \cdots k \geq 2^{k-1}$, deci

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

rezultând $2 \leq x_n < 3, \forall n \geq 1$ şi am demonstrat că $(x_n)_n$ este monoton crescător şi mărginit. Rezultă că există limitela $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{def}{=} e$. Deoarece $2 \leq x_n < 3, \forall n \geq 1$ deducem că $2 \leq e \leq 3$.

Numărul e se numeşte **numărul lui Euler**. $\square$

3.1.2 Criteriul Cesaro-Stolz

Următorul criteriu şi consecinţele sale permit calculul unor limite prin reducerea la cazuri mai simple:

Teorema 3.1.2 *(**Cesaro-Stolz**) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale cu proprietăţile:*
1. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton şi nemărginit,
2. există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \ell$.

Aplicaţii

Corolarul 3.1.3 *Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la x, atunci şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde*

$$S_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n},$$

converge către aceeaşi limită x.

Demonstraţie. Aplicăm criteriul Cesaro-Stolz şirurilor $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$, şi (n), $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_{n+1}-s_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{1} = x$. □

Corolarul 3.1.4 *Dacă şirul de numere pozitive $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge spre x, atunci şirul*

$$x_1, \sqrt{x_1x_2}, ..., \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$$

tinde de asemenea către x.

Demonstraţie. Considerăm şirul

$$\ln \sqrt[n]{x_1x_2...x_n} = \frac{\ln x_1 + ... + \ln x_n}{n}.$$

Aplicăm criteriul Cesaro-Stolz şirurilor $(\ln x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi (n),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_1 + ... + \ln x_n + \ln x_{n+1} - (\ln x_1 + ... + \ln x_n)}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_{n+1}}{1} = \ln x,$$

de unde rezultă concluzia. □

Corolarul 3.1.5 *Dacă şirul de numere $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, converge spre $x, x_n > 0$, atunci şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = x$.*

Demonstraţie. Scriem

$$\sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{\frac{x_1}{1}\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}.$$

Aplicând consecinţa 3.1.4 şirului $y_1 = \dfrac{x_1}{1}, ..., y_n = \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ obţinem rezultatul. □

Exerciţiul 3.1 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, dacă $x_n = \dfrac{u^n}{n}, u > 0$.

Soluţie. Notăm $x_n = u^n, y_n = n$. Şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface condiţiile criteriului lui Cesaro-Stolz, deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u^{n+1}-u^n}{n+1-n} = (u-1)\lim_{n\to\infty} u^n,$$

de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } u \le 1, \\ \infty, & \text{dacă } u > 1. \end{cases}$ □

Exerciţiul 3.2 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, dacă $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Soluţie. Observăm că $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$. Dacă notăm $y_n = \dfrac{n!}{n^n}$, atunci

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

Conform Consecinţei 3.1.5 deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{1}{e}$. □

Exerciţiul 3.3 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, dacă $x_n = \sqrt[n]{n}$.

Soluţie. Dacă notăm $y_n = n$, atunci $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{n+1}{n}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$. Conform Consecinţei 3.1.5 deducem că
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = 1$. □

3.1.3 Şiruri fundamentale (Cauchy)

În definiţia convergenţei unui şir intervine limita şirului care numai în rare cazuri este cunoscută. Cauchy a dat un criteriu pentru a determina dacă un şir este convergent, fără să intervină limita şirului considerat.

Definiţia 3.1.6 *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte* ***şir Cauchy*** *sau* ***şir fundamental*** *dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \ge n_\varepsilon : |x_n - x_m| < \varepsilon, \tag{3.2}$$

sau, într-o formulare echivalentă,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Exerciţiul 3.4 Arătaţi că şirul (x_n), unde

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\alpha)}{2^k}, \ \forall n \ge 1,$$

este un şir Cauchy.

Soluţie. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &\le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos(k\alpha)}{2^k}\right| \\ &\le \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{p-1}}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} \\ &< \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}<\varepsilon,\ \forall n\ge n_\varepsilon=\left[\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]+1,\ \forall p\ge 1.\end{aligned}$$

Rezultă că (x_n) este şir Cauchy. □

Exerciţiul 3.5 Arătaţi că şirul (x_n), unde

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\ \forall n\ge 1,$$

nu este un şir Cauchy.

Soluţie. Arătăm că $\exists\varepsilon>0$ astfel încât $\forall n\in\mathbb{N}$,$\exists k_n,m_n\ge n$ astfel încât $|x_{k_n}-x_{m_n}|\ge\varepsilon$.
Luăm $k_n=2n, m_n=n$ şi rezultă
$x_{2n}-x_n=\dfrac{1}{n+1}+...+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}=\varepsilon,\forall n\ge 1.$ □

Teorema 3.1.7 (Criteriul general al lui Cauchy) *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.*

Demonstraţie. Să presupunem pentru început că un şir (x_n) este convergent, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ şi fie $\varepsilon>0$. Atunci,

$$\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall n\ge n_\varepsilon : |x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Pentru orice $m\ge n_\varepsilon$ avem $|x_n-x_m|\le|x_n-x|+|x-x_m|<\varepsilon$. Am arătat astfel că un şir convergent este şir Cauchy.

Reciproc, fie (x_n) un şir fundamental. Luând $\varepsilon=1$ în definiţia şirului Cauchy, rezultă că există un rang $n_1\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$\forall n,m\ge n_1 \text{ avem } |x_n-x_m|<1.$$

În particular, pentru $m=n_1$ şi pentru orice $n\ge n_1$, avem $|x_n-x_m|<1$, de unde rezultă că

$$|x_n|\le|x_n-x_{n_1}|+|x_{n_1}|\le 1+|x_{n_1}|.$$

Considerând

$$M=\max\{|x_1|,|x_2|,...,|x_{n_1-1}|,1+|x_{n_1}|\}$$

vom avea $|x_n|\le M$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, adică şirul (x_n) este mărginit.

Conform teoremei lui Cesàro, (x_n) are un subşir convergent, pe care îl vom nota cu $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Fie $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x\in\mathbb{R}$. Fie $\varepsilon>0$. Avem:

$$\begin{aligned}(x_n)\ \text{şir Cauchy} &\Rightarrow \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall n,m\ge n_\varepsilon : |x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2} \\ \lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x &\Rightarrow \exists k_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall k\ge k_\varepsilon : |x_{n_k}-x|<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Pentru $k \geq \max\{n_\varepsilon, k_\varepsilon\}$ avem $n_k \geq k \geq n_\varepsilon$ şi $|x_k - x_{n_k}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ din condiţia de şir Cauchy, deci

$$|x_k - x| \leq |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

În concluzie, şirul (x_n) este convergent şi are limita x. □

3.2 Şiruri cu limita $+\infty$ şi $-\infty$

Dintre şirurile divergente se disting unele care au o comportare similară cu cele convergente. De exemplu, şirul $x_n = n$ este divergent, fiind nemărginit. Vecinătăţile lui $+\infty$ conţin intervale de forma $(a, +\infty]$ şi remarcăm că toţi termenii şirului x_n, de la un rang încolo, se află într-un astfel de interval.

Definiţia 3.2.1 *Spunem că un şir (x_n) din $\overline{\mathbb{R}}$ are **limita** $+\infty$ (sau $-\infty$) sau că este **divergent la** $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă orice vecinătate a punctului $+\infty$ conţine toţi termenii şirului, cu excepţia, eventual, a unui număr finit dintre aceştia.*

Aceasta este definiţia cu vecinătăţi. Ca şi la şirurile convergente, avem şi o definiţie cu ε, pe care o vom da ca proprietate echivalentă cu cea definită mai sus.

Teorema 3.2.2 *1. Şirul (x_n) din $\overline{\mathbb{R}}$ are limita $+\infty$ dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : x_n \geq \varepsilon.$$

2. Şirul (x_n) din $\overline{\mathbb{R}}$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : x_n \leq -\varepsilon.$$

Demonstraţie. 1. *Necesitatea.* Fie (x_n) un şir cu limita $+\infty$. şi fie $\varepsilon > 0$. Mulţimea $(\varepsilon, \infty]$ este o vecinătate a lui $+\infty$, aşa încât, conform definiţiei, conţine toţi termenii, cu excepţia, eventual a unui număr finit dintre aceştia. Astfel, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n \in (\varepsilon, \infty]$ sau, echivalent, $x_n > \varepsilon$.

Suficienţa. Să presupunem că are loc relaţia din enunţ şi fie V o vecinătate a punctului $+\infty$. Există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(\varepsilon, \infty] \subset V$. Corespunzător, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $x_n \geq \varepsilon$. Atunci, cu atât mai mult pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n \in V$ şi afirmaţia este demonstrată.

În mod cu totul analog se procedează pentru punctul 2. □

Ca şi în cazul şirurilor convergente, putem pune în evidenţă câteva criterii pentru ca un şir să diveargă la $+\infty$ sau $-\infty$, dar şi reguli de calcul pentru astfel de şiruri.

Teorema 3.2.3 *1. Dacă (α_n) este un şir cu limita $+\infty$ iar (x_n) este un şir astfel încât $\alpha_n \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*

2. Dacă (β_n) este un şir cu limita $-\infty$ iar (x_n) este un şir astfel încât $x_n \leq \beta_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Demonstraţie. 1. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha_n > \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Dar atunci $x_n \geq \alpha_n > \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = -\infty$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\beta_n < -\varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Dar atunci $x_n \leq \beta_n < -\varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. □

Teorema 3.2.4 *1. Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, atunci $x_n + y_n \to +\infty$.*
2. Dacă $x_n \to -\infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, atunci $x_n + y_n \to -\infty$.
3. Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in (0, \infty]$, atunci $x_n \cdot y_n \to +\infty$.
4. Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in [-\infty, 0)$, atunci $x_n \cdot y_n \to -\infty$.

Observaţia 3.2.5 *Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to -\infty$ nu se poate spune nimic despre natura şirului $(x_n + y_n)$. De exemplu*
a) pentru $x_n = n$ şi $y_n = -n$ avem $x_n + y_n \to 0$;
b) pentru $x_n = n$ şi $y_n = -2n$ avem $x_n + y_n \to -\infty$;
c) pentru $x_n = 2n$ şi $y_n = -n$ avem $x_n + y_n \to +\infty$;
d) pentru $x_n = (-1)^n + n$ şi $y_n = -n$ avem $x_n + y_n = (-1)^n$, care nu are limită.
Despre astfel de situaţii vom spune că sunt cazuri de nedeterminare, sau cazuri exceptate.

Teorema 3.2.6 *Dacă $x_n \to \infty$ sau $x_n \to -\infty$ atunci $\dfrac{1}{x_n} \to 0$. Invers, dacă $x_n \to 0$ şi (x_n) are un număr finit de termeni mai mici sau egali cu 0 (respectiv mai mari sau egali cu 0) atunci $\dfrac{1}{x_n}$ (definit cu excepţia acelor termeni pentru care $x_n = 0$) are limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$).*

3.3 Puncte limită

Definiţia 3.3.1 *Un număr x este un* ***punct limită*** *a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă orice vecinătate V a lui x conţine o infinitate de termeni ai şirului (numărul x poate să aparţină sau nu şirului).*

Dacă notăm cu $\mathcal{L}$ mulţimea punctelor limită a şirului mărginit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se numeşte **limită superioară** a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marginea superioară L a mulţimii $\mathcal{L}$ şi se notează

$$L = \sup \mathcal{L} = \limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

Marginea inferioară l a mulţimii $\mathcal{L}$ se numeşte limită inferioară a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi se notează

$$l = \inf \mathcal{L} = \liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

Evident

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Teorema 3.3.2 *1. Dacă (x_n) şi (y_n) sunt şiruri de numere reale astfel încât $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, adică $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} y_n$ şi $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$.*
2. Dacă (x_n) şi (y_n) sunt şiruri mărginite atunci:

$$\limsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n;$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \leq \liminf_{n\to\infty} (x_n + y_n);$$
$$\limsup_{n\to\infty} (x_n y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n, \text{ dacă } x_n \geq 0 \text{ şi } y_n \geq 0;$$

3. Dacă $x_n \geq a > 0$ pentru orice n, atunci are loc formula:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n}}.$$

4. Dacă (x_n) şi (y_n) sunt şiruri de numere reale, atunci

$$\liminf_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n \leq \limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n),$$

iar dacă $x_n \geq 0$ şi $y_n \geq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci:

$$(\liminf_{n\to\infty} x_n)(\limsup_{n\to\infty} y_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(x_n y_n).$$

5. Dacă (x_n) este un şir convergent, atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n = \limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n),$$

iar dacă în plus $x_n \geq 0$ şi $y_n \geq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci:

$$(\lim_{n\to\infty} x_n)(\limsup_{n\to\infty} y_n) = \limsup_{n\to\infty}(x_n y_n).$$

Exemplul 3.3.3 Şirul $\left(\sin \frac{n\pi}{6}\right), n \in \mathbb{N}$ are $L = 1, l = -1$ şi şapte puncte limită

$$l_1 = -1, l_2 = -\frac{1}{2}.l_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, l_4 = 0, l_5 = \frac{1}{2}, l_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}, l_7 = 1,$$
$$\mathcal{L} = \left\{-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}.$$

Exemplul 3.3.4 Pentru şirul $x_n = (-1)^n$ avem: $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$ iar $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ deoarece $x_{2n} \to 1, x_n \to -1, \mathcal{L} = \{-1, 1\}$.

Exemplul 3.3.5 Şirul $\left(\frac{n}{n+1}\right), n \in N$ are $l = L = 1$.

Teorema 3.3.6 *Un şir (x_n) din $\overline{\mathbb{R}}$ are limită în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă $\limsup\limits_{n\to\infty}$ $x_n = \liminf\limits_{n\to\infty}$ x_n. În acest caz,*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Teorema 3.3.7 *Pentru orice şir de numere reale (x_n), există un subşir al său, monoton, convergent la limita superioară a lui (x_n) şi există un subşir monoton, convergent la limita inferioară a lui (x_n).*